5.1. Atbilde: 2009

Risinājums. A. Tā kā jāvar tulkot **uz katru** no 2009 valodām, tad ar mazāk kā 2009 vārdnīcām noteikti nepietiek.

B. Ja vārdnīcas ļauj tulkot "pa apli", kā redzams 1. zīm., tad ar 2009 vārdnīcām pietiek.

$$\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow 2008 \rightarrow 2009$$

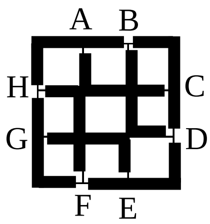
1. zīm.

5.2. Piemēram, tā: 1; 2; 4; 3; 6; 7; 5; 9; 8; 10.

5.3. Skat., piem., 2. zīm.

1	2		
3		6	
			4
	5		

2. zīm.



3. zīm.

5.4. a) jā; skat., piem., 3. zīm.

b) nē. Katrā no 8 punktiem A; B; ...; H saiet kopā 3 (nepāra skaits) nogriežņu, tāpēc katrā no tiem jābūt vismaz vienas līnijas galam. Bet 3 līnijām kopā ir tikai 6 gali.

5.5. Ja ir n iedzīvotāju, tad ir uzdoti 3n jautājumi; 1,5n atbilžu bija „jā". Katrs patiesais cilvēks atbildēja „jā" vienreiz, katrs melis – divreiz. Tātad meļu pavisam ir tieši 50%. Ja patieso B atbalstītāju ir x% no visiem iedzīvotājiem, tad meļu, kas neatbalsta B, ir (50 – x)%; tātad meļu, kas atbalsta B, ir 50% – (50 – x)% = x% no visiem iedzīvotājiem. Tātad starp B atbalstītājiem tieši puse ir meļi.

6.1. Ja kāds no cipariem ir 0; 3; 6 vai 9, Maija raksta atbilstošo viencipara skaitli. Ja Andra nosauktie skaitļi ir 1; 4; 7 vai 2; 5; 8, Maija raksta trīsciparu skaitli. Ja ir kāds cipars no kopas {1; 4; 7} un kāds – no kopas {2; 5; 8}, Maija raksta atbilstošo divciparu skaitli.

6.2. Pavisam izteiksmē ir 10 dažādi burti, tātad tie šifrē 10 dažādus ciparus. Tātad viens no tiem ir 0. Tā kā 0 nevar būt saucējā, tad tā ir skaitītājā. Tāpēc izteiksmes vērtība ir 0.

6.3. a) jā; piemēram, ja sākumā bija uzrakstīti skaitļi 1; 1; 1; 2.

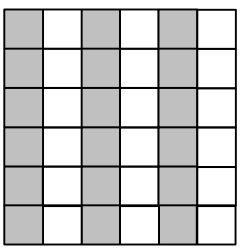
b) nē. Ievērosim, ka. $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\leq 2$. Tāpēc reizinājuma vērtība var pieaugt augstākais $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ reizes.

6.4. Atbilde: 32.

Risinājums. Viegli pārbaudīt, ka skaitļus no 10 līdz 32 ieskaitot var attēlot, ja uzrakstīto ciparu sistēmas ir {1; 2; 3; 4; 5; 6} un{0; 1; 2; 7; 8; 9}.

Lai izsacītu skaitļus līdz 33 ieskaitot (tātad arī 11 un 22), uz diviem kauliņiem jābūt gan 1, gan 2, gan 3. Septiņiem pārējiem cipariem vairs nepaliek vietas.

6.5.



4. zīm.

a) no dotā seko, ka $m\cdot n$ dalās ar 3. Tātad vai nu m, vai n dalās ar 3. Varam pieņemt, ka n dalās ar 3. Tad sagriežam taisnstūri strēmelēs $1\times n$ un pēc tam šīs strēmeles – gabalos 1×3.

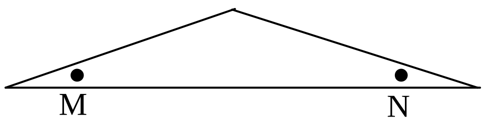
b) nē. Kvadrātu 6×6 var sagriezt kvadrātos 2×2. Pierādīsim ,ka to nevar sagriezt L – tetramino.

Iekrāsosim kvadrāta rūtiņas, kā parādīts 4. zīm. Katrs L – tetramino satur vai nu 3, vai 1 melnu rūtiņu. Tāpēc 9 L – tetramino kopā satur nepāra skaitu melnu rūtiņu. Bet melno rūtiņu pavisam ir 18.

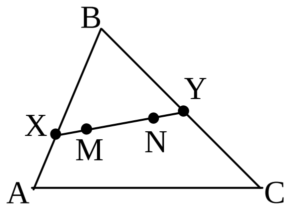
7.1. Atbilde: nē.

Pierādījums. Ievērosim, ka $x \cdot y = 2^{20} \cdot 5^{20}$. Ja vai nu x, vai y dalās gan ar 2, gan ar 5, tad tas beidzas ar ciparu 0. Atliek vienīgā iespēja, kad viens no skaitļiem x un y ir 2^{20}, bet otrs ir 5^{20}. Bet $2^{20} = 1048576$.

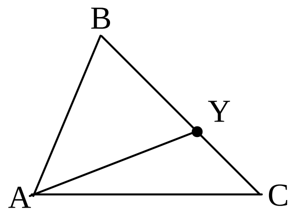
7.2. a) jā, skat., piem, 5. zīm.



5. zīm.



6. zīm.



7. zīm.

b) nē. Novelkam taisni MN; pieņemsim, ka tā krusto trijstūra kontūru punktos X un Y (6. zīm.) Vispirms pieņemam, ka ne X, ne Y nav T virsotne. Tā kā $\angle$YXA + $\angle$YXB = 180°, tad viens no šiem leņķiem nav šaurs; varam pieņemt, ka $\angle AXY \geq 90°$. Tad $\angle$AXY ir lielākais leņķis trijstūrī AXY, tāpēc AY ir tur garākā mala; tāpēc AY>XY>MN. Tā kā $\angle$AYB + $\angle$AYC = 180°, tad viens no šiem leņķiem nav šaurs; ja tas ir, piemēram, $\angle$AYC, tad kā iepriekš iegūstam, ka AC>AY>XY>MN. Ja kāds no punktiem ir T virsotne, uzreiz nonākam pie augšminētā sprieduma otrās daļas.

Piezīme: vērtējumā būs ļoti būtiski, cik pilnīgi skolēna izklāsts aptver **visas** situācijas.

7.3. Atbilde: četras summas.

Risinājums: Piemēru ar 4 summām skat. 8 zīm.

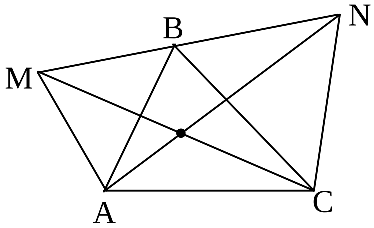
11	15	19	
6	8	9	23
4	2	3	9
1	5	7	13

8. zīm.

Pierādīsim, ka tas ir maksimums. Vienīgie iespējamie pirmskaitļi – summu vērtības – ir 7; 11; 13; 17; 19; 23. Lai visas 6 summas būtu pirmskaitļi, tām jābūt tieši šādām. Bet tādas tās nevar būt, jo 7 iegūstams tikai kā 1+2+4 un 23 – tikai kā 6+8+9; tad trešajā rindā/kolonnā summa būtu (1+2+...+9)-7-23=15, kas nav pirmskaitlis.

Ievērosim, ka visu 6 apskatāmo summu summa noteikti ir 2(1+2+..+9)=90. Tāpēc, ja 5 summas būtu pirmskaitļi no jau minētajām, tad tāda būtu arī sestā summa. Kā jau redzējām, tas nevar būt. Tāpēc arī 5 summas nevar būt pirmskaitļi.

7.4.



Tā kā AB=MB, BN=BC un $\angle ABN = \angle ABC + 60° = \angle MBC < 150°$, tad ΔABN=ΔMBC (mlm). Tāpēc AN=MC.

7.5. Pieņemsim, ka rūķīšu ir n. Viegli izsekot, ka katras naudas dalīšanas rezultātā starpības starp jebkuru divu rūķīšu naudas daudzumiem mainās par skaitļa n daudzkārtni. Tā kā sākumā šīs starpības visas ir 0, tad tās vienmēr ir skaitļa n daudzkārtņi, tāpēc 17 dalās ar n.

Tā kā 17 ir pirmskaitlis un rūķīšu ir vairāk nekā viens, tad n=17. Piemērs: sākumā ir 17 rūķīšu, katram 24 dālderi. Viens rūķītis iedod katram no 16 citiem pa vienam dālderim.

8.1. a) nē; saskaņā ar Vjeta teorēmu jābūt $p + x_1 + x_2 = 0$.

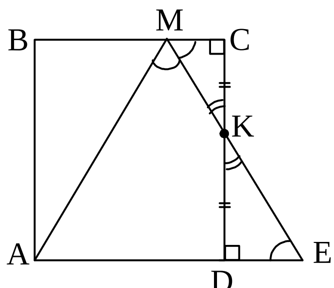
b) jā, skat, piem., vienādojumu $x^2 - 0{,}3x - 0{,}54 = 0$, kam ir saknes $x_1 = -0{,}6$ un $x_2 = 0{,}9$.

8.2. Ja uzvarētājs ieguvis n punktus, tad kopējais iegūto punktu daudzums nav lielāks par $n + (n - \frac{1}{2}) + (n-1) + (n - 1\frac{1}{2}) + (n-2) + (n - 2\frac{1}{2}) + (n-3) + (n - 3\frac{1}{2}) = 8n - 14$. Pavisam izspēlēja 28 spēles, tāpēc $28 \le 8n - 14$ un $8n \ge 42$, no kurienes $n \ge 5\frac{1}{4}$; tātad $n \ge 5\frac{1}{2}$. Piemēru, kur $n = 5\frac{1}{2}$, skat. 9. zīm.

	A	B	C	D	E	F	G	H	Σ
A		½	½	½	1	1	1	1	5 ½
B	½		½	½	½	1	1	1	5
C	½	½		½	½	½	1	1	4 ½
D	½	½	½		½	½	½	1	4
E	0	½	½	½		½	½	½	3
F	0	0	½	½	½		½	½	2 ½
G	0	0	0	½	½	½		½	2
H	0	0	0	0	½	½	½		1 ½

9. zīm.

8.3.



10. zīm.

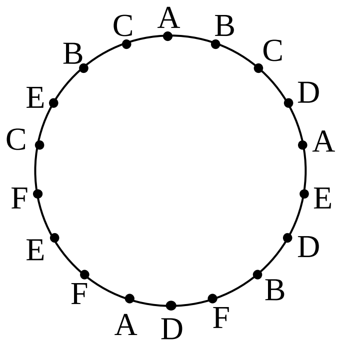
Pagarinām MK līdz krustpunktam E ar AD. Tad ∠DEK=∠CMK, tāpēc ΔMCK=ΔEDK (lml), tad MK=KE. Tāpēc AK ir vienādsānu trijstūra MAE mediāna pret pamatu, tāpēc arī bisektrise.

8.4. Ja trīs viesu vecumi ir x, y, z, iegūstam sakarības $x \cdot y \cdot z = 2450$ un $x + y + z = 2v$, kur v – kolēģa vecums. Kolēģis savu vecumu, protams, zina. Ja viņš nevarēja noteikt x; y; z, tad tikai tāpēc, ka abu vienādojumu sistēmai attiecībā uz x; y; z, eksistē vairāk nekā viens atrisinājums. Sadalot 2450 triju naturālu skaitļu reizinājumā, redzam: tikai sadalījumiem (50; 7; 7) un (49; 10; 5) reizinātāju summas ir vienādas. Kolēģim tātad bija 32 gadi. Pieņemsim, ka Cipariņam bija t gadu. Ja t>50, kolēģis nevarētu atrast viesu vecumus arī pēc Cipariņa otrās piezīmes. Situācija t<50 nav iespējama. Tāpēc $t = 50$.

8.5. a) no 6 burtiem var izveidot 15 dažādu burtu pārus, tāpēc diviem punktiem jābūt blakus vismaz 15 vietās. Tāpēc arī punktu ir vismaz 15.

b) katram burtam jābūt blakus ar 5 citiem. Tāpēc katram burtam jābūt vismaz 3 eksemplāros; tāpēc vajag vismaz $6 \cdot 3 = 18$ punktus.

c) skat, piem., 11. zīm.



11. zīm.

9.1. Nē. Visu minēto funkciju vērtības pie $x = 1$ sakrīt, bet dotie 3 grafiki neiet caur vienu punktu (visi 6 iespējamie krustpunkti zīmējumā redzami, tātad citu nav).

9.2. Ceļot dotās nevienādības kvadrātā, iegūstam

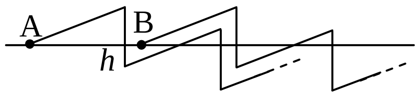
$a^2 \geq b^2 + 2bc + c^2$

$b^2 \geq a^2 + 2ac + c^2$

$c^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

Saskaitot, pārnesot visus locekļus uz labo pusi un savelkot līdzīgos locekļus, iegūstam $(a+b+c)^2 \leq 0 \Rightarrow a+b+c=0$.

9.3. Jā, var. Skat, piem., 12. zīm., kur h var tikt padarīts patvaļīgi mazs.



12. zīm.

9.4. Ja p ir pirmskaitlis, tad skaitlim p^{n-1} ir tieši n dalītāji 1; p; p^2; …; p^{n-1}. Pieņemsim, ka p – pirmskaitlis, n – naturāls skaitlis. Apskatīsim $A = p^{p^n - 1}$. Tam ir p^n dalītāju. Lai pierādītu, ka A ir apaļīgs, pietiek pierādīt, ka $p^n - 1 \geq n$ jeb $p^n \geq n+1$. To iegūst, sareizinot n acīmredzamas nevienādības $p \geq 2$, $p \geq \frac{3}{2}$, $p \geq \frac{4}{3}$, …, $p \geq \frac{n+1}{n}$.

9.5.

B	C
A	D

13. zīm.

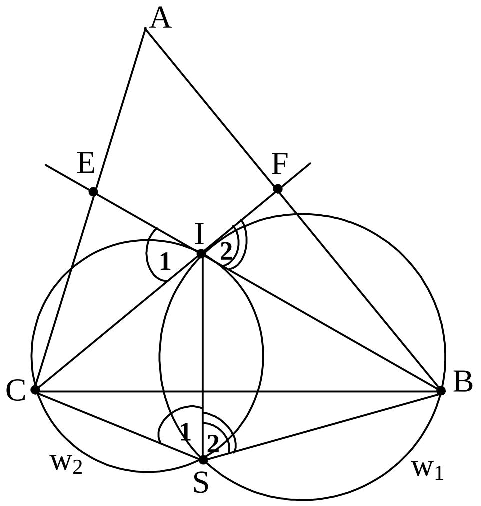
Mainot krāsas stūrīšos ABC, ADC, BAD, rezultātā krāsa mainījusies tikai rūtiņā A. Tātad varam mainīt krāsu vienā (patvaļīgā) rūtiņā. Tātad no jebkura krāsojuma varam iegūt jebkuru.

10.1. Nē, nevar. Tā kā parabolām zari vērsti uz augšu, tad būtu $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Tā kā katra parabola krusto abscisu asi divos punktos, tad visu trinomu diskriminanti būtu pozitīvi, t. i.,

$b^2 > ac$, $c^2 > ab$, $a^2 > cb$. Sareizinot šīs nevienādības, mēs iegūtu $a^2b^2c^2 > a^2b^2c^2$ – pretruna.

10.2. Apzīmējam $p = 2k+1$, $q = 2n+1$, k, n – naturāli skaitļi. Tad $p+q = 2(k+n+1)$. Varam pieņemt, ka $k < n$; tad $2k+1 < k+n+1 < 2n+1$. Tā kā $2k+1$ un $2n+1$ ir divi **viens otram sekojoši** pirmskaitļi, tad $k+n+1$ nav pirmskaitlis. Tāpēc $k+n+1$ sadalās vismaz divos reizinātājos.

10.3. Apzīmējam $\angle ABC = 2\beta$ un $\angle ACB = 2\gamma$; tad $\angle A = 180° - (2\beta + 2\gamma)$ un $\angle CIB = 180° - (\gamma + \beta)$. No ievilkto leņķu un hordas – pieskares leņķu īpašībām seko 14. zīmējumā parādītās leņķu vienādības, tāpēc $\angle CSB = \angle 1 + \angle 2 = 360° - 2\angle CIB = 2(\beta + \gamma)$. Tāpēc $\angle A + \angle CSB = 180°$, no kā seko vajadzīgais.



14. zīm.

10.4. Viegli pierādīt nevienādību $x + y \geq \dfrac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ pozitīviem x un y.

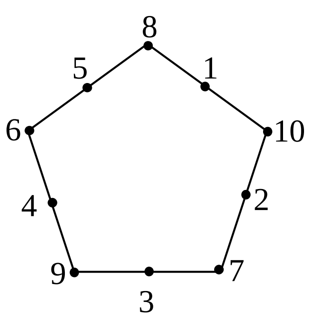
No tās seko

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{c+a}{c+d} \geq 4 \cdot \frac{a+c}{a+b+c+d} \text{ un}$$

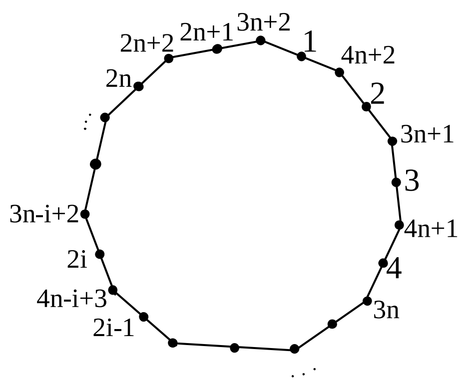
$$\frac{b+d}{b+c} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4 \cdot \frac{b+d}{a+b+c+d}.$$

Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam vajadzīgo.

10.5. a) skat. 15. zīm.



15. zīm.



16. zīm.

b) pulksteņa rādītāja kustības virzienā sanumurējam malu viduspunktus pēc kārtas ar 1; 2; 3; ...; 2n+1. Tad, sākot ar virsotni starp 1 un 2, sanumurējam virsotnes, ik pa vienai izlaižot, ar skaitļiem 4n+2; 4n+1; ...; 2n+2 arī pulksteņa rādītāja kustības virzienā (skat. 16. zīm.)

11.1. Ievērosim, ka katram n>0 pastāv vienādība

$$\frac{n}{n^4+n^2+1}=\frac{n}{n^4+2n^2+1-n^2}=\frac{n}{\left(n^2+1\right)^2-n^2}=\frac{n}{\left(n^2-n+1\right)\left(n^2+n+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right]$$

Saskaitot šīs vienādības pie n=1; 2; 3; ...; 2009, iegūstam, ka novērtējamās summas vērtība ir $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2-1+1}-\frac{1}{2010^2-2010+1}\right]<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1^2-1+1}=\frac{1}{2}$, k.b.j.

11.2. Atbilde: pēc 2n-1 dienām.

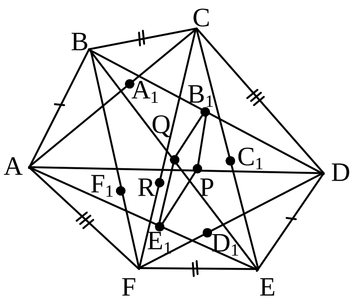
Risinājums. Ja dienu skaits nepārsniedz 2n-2, tad vai nu kāds spēlētājs nav ne reizi uzvarējis (un tad viņa punktu summa ir negatīva), vai arī ir vismaz divi spēlētāji, kas katrs uzvarējis tikai vienreiz; tad tas noticis dažādās dienās, un viņu punktu summas nevar būt vienādas. Tāpēc ar 2n-2 vai mazāk dienām nepietiek.

Viegli pārbaudīt: ja viens spēlētājs uzvar 1. un (2n-2)-ā dienā;
viens spēlētājs uzvar 2. un (2n-3)-ā dienā;
.
.
.
viens spēlētājs uzvar n-ā un (n-1)-ā dienā;
viens spēlētājs uzvar (2n-1)-ā dienā,

uzdevuma prasības ir izpildītas.

11.3. Viegli redzēt, ka a un b ir pāra skaitļi, tātad S dalās ar 4. Tā kā $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, tad $a^3-b^3\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$. Tāpēc $a^3\equiv b^3(\mathrm{mod}\,5)$; tāpēc $a\equiv b(\mathrm{mod}\,5)$. Tāpēc $3a^2\equiv a^2+ab+b^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$. Tāpēc $a\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$. Tāpēc S dalās ar 25. Tā kā $LKD(4,25)=1$, tad S dalās ar 100 un S priekšpēdējais cipars ir 0.

11.4. No trijstūru viduslīniju īpašībām viegli seko vispārzināms fakts: izliektā četrstūrī XYZT, kam nav paralēlu malu, nogriežņu XZ, YZ, YT un XT viduspunkti ir paralelograma virsotnes. Turklāt, ja XY=ZT, tad šis paralelograms ir rombs.



17. zīm.

Apzīmēsim ar P, Q, R diagonāļu AD, BE, CF viduspunktus. Tad PB_1QE_1 ir rombs. Tāpēc B_1E_1 iet caur PQ viduspunktu un $B_1E_1\perp PQ$. Līdzīgi iegūstam ,ka A_1D_1 iet caur PR viduspunktu un $A_1D_1\perp PR$, kā arī C_1F_1 iet caur QR viduspunktu un $C_1F_1\perp QR$. Tāpēc taisnes A_1D_1, B_1E_1 un C_1F_1 krustojas ΔPQR apvilktās riņķa līnijas centrā.

11.5. Skaidrs**,** ka $4x-3\geq 0$, $4y-3\geq 0$, $4z-3\geq 0$. Sareizinot visas nevienādības, iegūstam

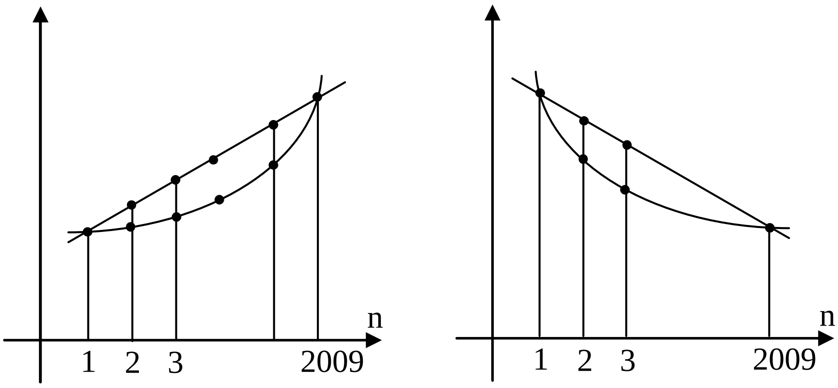
$x^4y^4z^4\leq(4x-3)(4y-3)(4z-3)$ (1)

Katram a ir spēkā $a^4+3=(a^4+1)+2\geq 2a^2+2\geq 4a$, tāpēc $a^4\geq 4a-3$ un vienādība pastāv *ttt* $a=1$.

Tāpēc $x^4y^4z^4\geq(4x-3)(4y-3)(4z-3)$ (2)

No (1) un (2) seko $x^4y^4z^4=(4x-3)(4y-3)(4z-3)\quad\Rightarrow\quad x=y=z=1$.

12.1. Attēlosim abas progresijas kā naturāla argumenta funkcijas. Aritmētiskās progresijas locekļi izvietojas uz taisnes, bet ģeometriskās progresijas locekļi – uz eksponentfunkcijas grafika. No eksponentfunkcijas grafika īpašībām zinām, ka ir spēkā viena no 18. zīm. parādītajām situācijām:



18. zīm.

Redzam, ka abos gadījumos a.p. locekļu summa ir lielāka.

12.2. Ievērosim, ka

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz =$

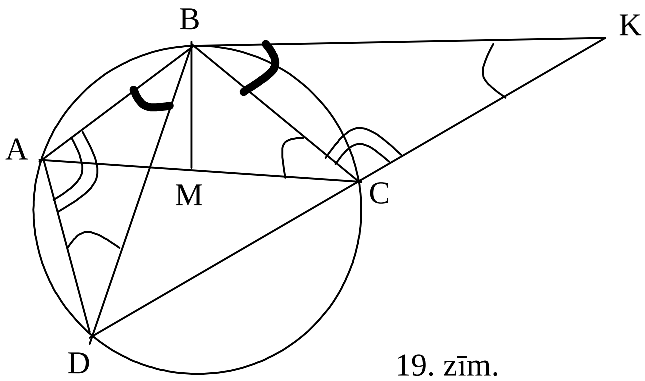
$= \frac{1}{2}[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2]+3(xy+xz+yz) \geq 3(xy+xz+yz) > 3(x+y+z).$ No $(x+y+z)^2 > 3(x+y+z)$ seko $x+y+z>3$, k. b. j.

12.3. a) ievērojam, ka **katram** naturālam n $R = n^4+6n^3+11n^2+6n = (n^2+3n+1)^2-1$. Nav divu naturālu skaitļu kvadrātu, kas atšķirtos viens no otra par 1.

b) apskatām $R = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Skaitļiem $n+1$ un $n+2$, kā arī $n+1$ un n, nav kopīgu dalītāju, izņemot 1. Skaitļiem $n+1$ un $n+3$ kopīgs dalītājs var būt tikai 1 vai 2 (jo $(n+3)-(n+1)=2$); tā kā n – pāra skaitlis, tad tas nav 2.

Tātad $n+1$ nav kopīgu dalītāju ar $n(n+2)(n+3)$ un, ja R ir kubs, tad kubs ir gan atsevišķi $n+1$, gan $n(n+2)(n+3)$. Bet viegli pārbaudīt, ka $(n+1)^3 < n(n+2)(n+3) < (n+2)^3$, un skaitlis, kas atrodas starp divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu kubiem, nav naturāla skaitļa kubs.

12.4.



19. zīm.

Izvēlamies K uz stara DC tā, ka $\angle BKC = \angle BDA$. Tā kā $\angle BCK = 180° - \angle BCD = \angle BAD$, tad $\Delta BCK \sim \Delta BAD$. Tāpēc $\frac{BC}{CK} = \frac{BA}{AD}$. No dotā $\frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD}$, tāpēc $\frac{BC}{CK} = \frac{BC}{CD}$ un $CD = CK$. No leņķu vienādībām viegli seko, ka $\Delta ABC \sim \Delta DBK$. Šajā līdzībā malas AC viduspunkts M atbilst malas DK viduspunktam C. Tāpēc $\angle ABM = \angle DBC$, k.b.j.

12.5. Pieņemsim no pretējā, ka n ir **lielākais** konfekšu skaits sākuma pozīcijā, pie kura otrajam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija. (Tādi n vispār eksistē, piem., $n=2$.) Pieņemsim, ka uz galda atrodas n^2+n+1 konfekte. Pierādīsim, ka otrais spēlētājs var uzvarēt. Tā būs pretruna ar pieņēmumu, un uzdevums būs atrisināts.

Pirmais spēlētājs ar savu pirmo gājienu nevar apēst vairāk par n^2 konfektēm, jo $(n+1)^2 > n^2+n+1$. Tāpēc pēc šī gājiena uz galda paliek $\geq n+1$ konfekte. Saskaņā ar pieņēmumu šajā situācijā uzvar tas, kas sāk, t.i., otrais spēlētājs. Vajadzīgā pretruna iegūta.