5.1. Kreisajā summa ir 30, aizpildītajā diagonālē tā ir 39. Tātad apskatāmās summas ir no 30 līdz 39. Vēl jāieraksta skaitļi 1; 2; 8; 15; 16. Skaidrs, ka t un y var būt tikai 15 vai 16; tad z=8. Tad nevar būt y=15. Tāpēc y=16, t=15 un tabulu var aizpildīt arī tālāk: u = 1, x = 2.

14	t	u	z
7	3	9	y
5	13	12	x
4	6	11	10

5.2. Ar pirmo svēršanu salīdzinām A, B pret C, D. Ja svari **nav** līdzsvarā, tad pašreiz uz tiem ir atšķirīgā monēta. Ar otro svēršanu salīdzinām A, B pret E, F (E, F ir "īstās"). Ja ir līdzsvars, tad atšķirīgās monētas attiecības ar īstajām noskaidro no 1.svēršanas rezultātiem (atšķirīgā ir viena no C, D). Ja nav līdzsvars, tad atšķirīgā ir viena no A, B; gan 1., gan 2.svēršana rāda, vai tā ir smagāka vai vieglāka par īsto.

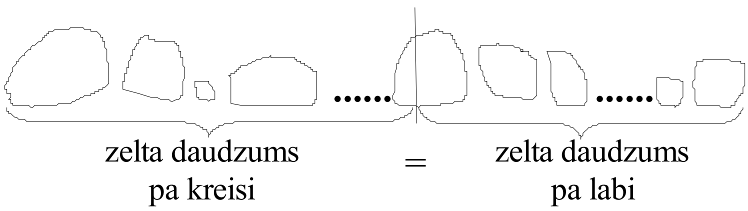
Ja pirmajā svēršanā ir līdzsvars, tad otrajā svēršanā salīdzinām A, B, C (tās visas ir "īstās") ar E, F, G. Ja atkal ir līdzsvars, tad atšķirīgās monētas nav. Ja nav līdzsvara, tad vajadzīgo uzzinām no otrās svēršanas (atšķirīgā monēta ir E, F vai G).

5.3. **a)** nē, nav iespējams. Ja tāda tabula pastāvētu, tad kopējais zvaigznīšu skaits tajā, skaitot pa kolonnām, būtu pāra skaitlis, bet, skaitot, pa rindiņām – nepāra skaitlis.

b) jā, ir iespējams. Skat. zīm.

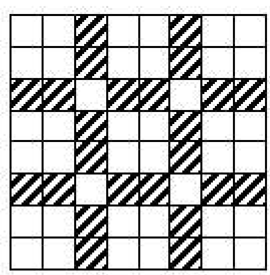
*	*	*	
*	*	*	
			*
			*

5.4. Vienu sākotnējo gabalu sadala divos vienādos; tās būs kaudzes A un B. Pārējos gabalus noliek rindā un rindu sadala divās daļās tā, lai šajās daļās būtu vienādi zelta daudzumi. Tās ir kaudzes C un D.



Ja, veidojot kaudzes C un D, nācās sadalīt vienu gabalu divos, visi uzdevuma nosacījumi izpildīti. Ja nē (dalījuma līnija iet **starp** zelta gabaliem), sadalām divos gabalos jebkuru vienu gabalu, atstājot iegūtās daļas tai pašā kaudzē.

5.5.Nē, ne noteikti. Skat. Zīm.



6.1. Abi skaitļi ir vienādi ar $2004 \cdot 2005 \cdot 10001 \cdot 100010001$.

6.2. Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda. Tad no katra skaitļu pāra (1; 14), (2; 13), (3; 12), (4; 11), (5; 10), (6; 9), (7; 8) augstākais viens var būt sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Tāpēc sērkociņu nav vairāk par 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 77 – pretruna.

6.3. Sveram A+B. Ja A+B=20 vai A+B=22, A un B masas jau zināmas. Tālāk ar 2 svēršanām atrodam atsevišķi C un D.

Ja A+B=21, sveram A+C. Gadījumus A+C=20 un A+C=22 analizē kā iepriekš.

Ja A+C=21, tad no A+B=A+C seko **B=C**. Trešajā reizē sveram B+C+D. Ievērosim, ka B+C - pāra skaitlis (20 vai 22). Iegūstam tabulu:

B+C+D	B+C	D	B	C	A
30	20	10	10	10	11
31	20	11	10	10	11
32	22	10	11	11	10
33	22	11	11	11	10

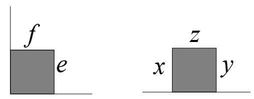
6.4. To monētu kopējam svaram gramos, kuras katra sver 5 g, jādalās ar 6. Tāpēc to skaitam jādalās ar 6, un tās var apvienot kaudzītēs pa 6, kas katra sver 30 g. Līdzīgi iegūstam, ka 6 g smagās monētas var apvienot kaudzītēs pa 5, kas katra sver 30 g. Kaudzīšu pavisam ir 600 g : 30 g =20. Apvienojot tās 10 pāros, iegūstam 10 kaudzes, kas katra sver 60 g.

6.5. Atbilde: 14.

a) Piemēru ar 14 „vienības stienīšiem” skat. zīmējumā.

b) Apskatīsim melnās rūtiņas, kas atrodas pie kvadrāta malām, ja kvadrāts izkrāsots šaha galdiņa kārtībā. Tādu rūtiņu ir 14, un nekādām divām no tām nav kopīgas malas. Ja pierādīsim, ka katru malējo rūtiņu norobežo vismaz viens vienības nogrieznis, tad būs pierādīts, ka vienības nogriežņu jābūt vismaz 14.

Šķirojam divus gadījumus:

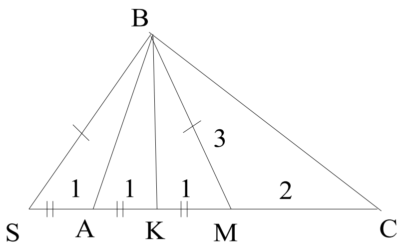


b1) **b2)**

b1) Skaidrs, ka melnai stūra rūtiņai stienīši, kas veido tās malas *e* un *f*, abi vienlaicīgi nevar būt garāki par 1.

b2) Ja malas *x* un *y* veido stienīši, kas garāki par 1, tad malu *z* noteikti veido vienības stienītis.

7.1. Atliekam uz taisnes AC nogriezni AS=1; tad MS=3=MB. Tā kā ∠AMB=180°-120°= 60°, tad ΔSMB ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad vienādmalu. Tāpēc BS=BM. Tā kā SA=1=MK un ∠BSA=∠BMK, tad ΔBSA=ΔBMK, no kā seko vajadzīgais.



7.2. Uzrakstām daļas kā $\frac{5}{(n+2)+5}, \frac{6}{(n+2)+6}, \ldots, \frac{36}{(n+2)+36}$. Daļas visas būs nesaīsināmas tad un tikai tad, ja n + 2 nevarēs saīsināt ne ar vienu no skaitļiem 5; 6; ...; 36. Acīmredzot mazākais tāds n+2 ir 37, tāpēc n = 35.

7.3. Piecām pankūkām ir 10 apcepamas virsmas, tātad jāpatērē 10·6=60 „virsmminūtes”. Tā kā augstākais četras „virsmminūtes” var tikt izmantotas vienlaicīgi, tad vajag vismaz 60:4=15 minūtes. Ar 15 minūtēm uzdevumu var veikt, kā redzams tabulā (rūtiņās ierakstīti pankūku kārtas numuri):

Minūte / Vieta uz pannas	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
B	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
C	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4
D	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Piezīme: veidojot šādu tabulu, jāseko, lai katrā kolonnā visi skaitļi būtu dažādi, jo vieu pankūku nevar reizē apcept no abām pusēm.

7.4. **Atbilde:** ar 6 nullēm.

Piemērs 407=250+125+32 parāda, ka 6 nulles var būt. Tiešām , $250\cdot125\cdot32=2\cdot5^3\cdot5^3\cdot2^5=1\,000\,000$.

Parādīsim, ka vairāk par 6 nullēm nevar būt. Visi saskaitāmie ir mazāki par $5^4=625$; tātad augstākā piecinieka pakāpe, ar kādu tie var dalīties, ir 5^3. Turklāt vismaz viens saskaitāmais ar 5 nedalās, jo visu saskaitāmo summa nedalās ar 5. Tāpēc visi 3 saskaitāmie kopā satur ne vairāk kā 3+3=**6** pirmreizinātājus 5. Tāpēc arī vairāk par 6 nullēm nevar būt.

7.5. Pieņemsim pretējo tam, kas jāpierāda.

$$\underset{0}{|}(A_1\ B_1\ A_2\ B_2\ A_3\ B_3\ A_4\ B_4\ A_5\ B_5)\underset{1}{|}$$

Tātad katram skaitlim, izņemot A_1 un B_5, eksistē tāds kaimiņš, kurš ir mazāks par šo skaitli. Atradīsim pa **vienam** tādam kaimiņam skaitļiem A_2, A_3, A_4, A_5. Atrastie kaimiņi visi ir dažādi (citādi šis kaimiņš, kas atrasts divreiz, būtu mazāks par abiem A_i, kuriem viņš atrasts, bet mēs pieņēmām, ka šāda skaitļa nav).

Tāpēc $A_2+A_3+A_4+A_5>K_1+K_2+K_3+K_4$, kur K_1, K_2, K_3, K_4 ir **četri** no skaitļiem B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Ja B_i ir tas no skaitļiem B_1, ..., B_5, kas nav neviens no izvēlētajiem kaimiņiem, tad $A_1+1>B_i$, jo gan A_1, gan B_i atrodas intervālā (0; 1). Saskaitot abas „ierāmētās" nevienādības, iegūstam $(A_1+...+A_5)+1>(B_1+...+B_5)$, no kurienes seko $(B_1+...+B_5)-(A_1+...+A_5)<1$ – pretruna ar doto.

8.1. No Vjeta teorēmas $b=x_1^2\cdot x_2^2=(x_1x_2)^2=q^2$,

bet $a=-(x_1^2+x_2^2)=2x_1x_2-(x_1+x_2)^2=2q-p^2$.

8.2. Pieņemsim, ka d - lielākais no šiem skaitļiem. Apzīmēsim ar x un y tos Fibonači skaitļus, kuru summa ir d: $x+y=d$. Skaidrs, ka $a+b\le x+y$, jo Fibonači skaitļu virkne ir augoša. Tātad $a+b\le d$ un $a+b<c+d$, jo $c>0$.

8.3. Ievērojam, ka 1+2+...+9=45. Skaidrs, ka neviens skaitlis pats par sevi nav pārējo summa, jo pat lielākais no tiem – skaitlis 9 – mazāks par pārējo 8 summu. Pieņemsim, ka ir divi skaitļi x un y, kuru reizinājums vienāds ar pārējo summu. Tad $x+y+xy=45$, no kurienes iegūstam $(1+x)(1+y)=46=2\cdot23$. Tā kā $1+x>1$ un $1+y>1$, tad vai nu $1+x=23$, vai $1+y=23$, bet tas nevar būt. Ja triju skaitļu x, y, z reizinājums vienāds ar pārējo summu ($x<y<z$), tad $x+y+z+xyz=45$. Ir vairākas iespējas:

1) $x=1$; tad $y+z+yz=44$, $(1+y)(1+z)=45$, no kurienes $1+y=5$, $1+z=9$, $y=4$, $y=8$ (citos variantos y vai z iznāk pārāk lieli).

2) $x=2$; tad iegūstam $y+z+2yz=43$, no kurienes $(2y+1)(2z+1)=87=3\cdot29$ (atrisinājuma nav).

3) $x\ge3$; tad $xyz\ge3\cdot4\cdot5=6045$ – tā nevar būt.

Līdzīgi no $x+y+z+t+xyzt=45$, $x<y<z<t$, iegūstam variantus

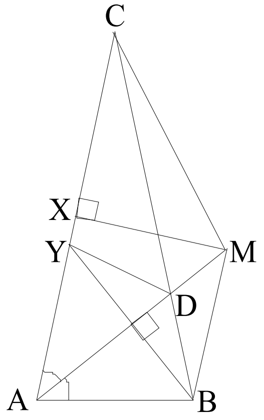
1) $x=1$; $y=2$, no kurienes $2zt+z+t=42$, $(2z+1)(2t+1)=85=5\cdot17$ un $z=2$ – pretruna.

2) ja $x\ne1$ vai $y\ne2$, tad $xyzt\ge1\cdot3\cdot4\cdot5=60>45$ – pretruna.

Piecu skaitļu reizinājums nav mazāks par $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ – pretruna.

Tātad vienīgā atbilde ir {1; 4; 8} un {2; 3; 5; 6; 7; 9}.

8.4. Skaidrs, ka $\angle CAB=\angle CBA=80°$ un $\angle CAM=\angle BAM=40°$. Tā kā AM=CM (M uz AC vidusperpendikula), tad ΔAMC – vienādsānu. Tāpēc $\angle ACM=\angle CAM=40°$; no šejienes $\boldsymbol{\angle MCB=40°-20°=20°}$.



Novelkam BY⊥AD. Tā kā ΔYAB bisektrise ir arī augstums, tad ΔYAB – vienādsānu, AY=AB. Tāpēc ΔAYD=ΔABD (*mlm*). Tā kā ∠ADB=180°-40°-80°=60°, tad arī ∠YDA=60° un ∠YDC=180°-60°–60°=60°; arī ∠MDC=60°, jo ∠MDC=∠ADB.

Tātad ΔMDC=ΔYDC (*lml*), tāpēc YD=MD. Tā kā YD=BD, tad MD=BD, t.i., ΔMDB – vienādsānu. Tā kā ∠MDB=180°-60°=120°, tad $\angle \mathbf{MBC} = \frac{1}{2}(\mathbf{180° - 120°}) = \mathbf{30°}$.

8.5. Atbilde: 16.

Ja kvadrātu sadala 16 kvadrātos ar izmēriem 2×2 rūtiņas katru un katru daļu nokrāso savā krāsā, uzdevuma nosacījumi izpildās. Pieņemsim, ka *n*>16. tad eksistē krāsa, kurā nokrāsotas ne vairāk par 3 rūtiņām (citādi rūtiņu kopējais skaits pārsniegtu 64). Ņemam vienu no tām A. Tās divi kaimiņi B un C, kas nokrāsoti tādā pašā krāsā kā A, var būt nokrāsoti tikai divos principiāli atšķirīgos veidos:

B	A	C

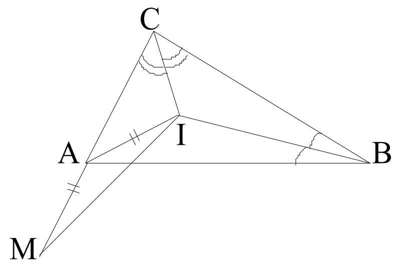
C	
A	B

.

Abos gadījumos rūtiņām B un C uzdevuma nosacījumi neizpildās – pretruna.

9.1. Tā kā 225=9·25, skaitlim jābeidzas vismaz ar divām nullēm, bet pārējo ciparu summai jādalās ar 9. Lieku nuļļu ieviešana pagarinās skaitli, tātad palielinās to. Tāpēc pārējie cipari ir 1; 2; 2; 2; 2 tieši šādā secībā (lai skaitlis iznāktu iespējami mazs), un meklējamais skaitlis ir 1222200.

9.2. Atliksim uz CA pagarinājuma AM=AI (skat. zīm.).



Tad CM=CA+AM=CA+AI=CB, tātad ΔMCB - vienādsānu. Tā kā $\angle CAI=\frac{1}{2}\angle A$, tad no ΔMAI ārējā leņķa īpašības $\angle AMI=\frac{1}{2}\angle CAI=\frac{1}{4}\angle A$. Tā kā I atrodas uz vienādsānu trijstūra MCB bisektrises, tad ΔMCI=ΔBCI (mlm); tāpēc $\frac{1}{2}\angle B=\angle IBC=\angle IMC=\angle IMA=\frac{1}{4}\angle A$ un ∠A=2∠B, k.b.j.

9.3. Apzīmēsim rūķīti, kurš atnāca pēdējais, ar A, un rūķīti, kurš aizgāja pirmais, ar B. Ar K_A apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no paša A un viņa satiktajiem rūķīšiem; līdzīgi ieviešam K_B. Gan K_A, gan K_B katrā ir vismaz n + 1 rūķītis. Tā kā (n + 1) + (n + 1) > 2n +1, tad eksistē tāds rūķītis, kas pieder gan K_A, gan K_B; apzīmēsim to ar R. Ja kāds rūķītis X aizietu agrāk, nekā atnāca R, tad arī B būtu aizgājis agrāk, nekā atnāca R; bet tad B nebūtu saticis R – pretruna. Ja kāds rūķītis Y atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, tad arī A atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, un A nebūtu saticis R – pretruna.

No minētā seko, ka R satika visus rūķīšus.

9.4. Saskaitot dotās nevienādības, iegūstam

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)+(xy+xz+yz)\le 6 \qquad \mathbf{(1)}$$

No nevienādības

$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\ge 0$, atverot iekavas, seko

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+xz+yz \qquad \textbf{(2)}$$

No (1) un (2) acīmredzami seko

$$xy+xz+yz \le 3 \qquad \textbf{(3)}$$

Saskaitot (1) un (3), iegūstam

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \le 9$$

$$(x+y+z)^2 \le 9$$

$$-3 \le x+y+z \le 3$$

Vērtības (-3) un (3) tiek sasniegtas pie, piemēram, $x=y=z=-1$ resp. $x=y=z=1$, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad **min=-3** un **max=3**.

9.5. Apzīmēsim meklējamo skaitu ar x_n (skaidrs, $x_1=1$). Ar y_n apzīmēsim minimālo gājienu skaitu līdzīgā uzdevumā, kura vienīgā atšķirība – uz C diskiem **nav jābūt** tādā pašā secībā kā sākotnēji uz A (tātad **lielākajam** diskam tomēr ir jābūt apakšā). Skaidrs, ka $y_1=1$.

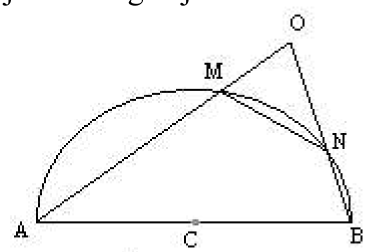
Lai atrisinātu izmainīto uzdevumu, **vajag** pārcelt n-1 diskus uz B, tad apakšējo disku uz C, tad n-1 gājienos atlikušos diskus uz C. Tas prasa $y_{n-1}+1+(n-1)$ gājienus. Tātad $y_n=y_{n-1}+n$. Tāpēc $y_n=1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

„Īstajā" uzdevumā **vajag** vispirms pārcelt n-1 diskus uz B, tad apakšējo disku uz C un tad *n-1 atlikušos diskus uz C*, atcerieties, ka uz C vajag sākotnējo secību. Ar kursīvu izceltās daļas operācijas izpildot apgrieztā secībā, iegūstam izmainītā uzdevuma risinājumu n-1 diskiem. Tāpēc $x_n=y_{n-1}+1+y_{n-1}=2y_{n-1}+1=2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+1=n^2-n+1$.

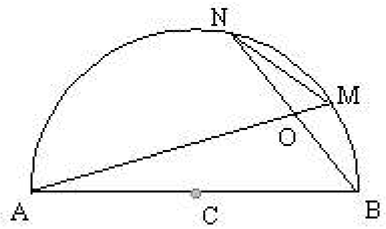
10.1. a) nē; piemēram, x=1 un y=0,00001.

b) jā, jo $\left(x+\frac{9}{x}\right)-\left(y+\frac{9}{y}\right)=(x-y)\left(1-\frac{9}{xy}\right)>0$.

10.2. Apzīmēsim hordas MN garumu ar a, bet tās savilktā loka leņķisko lielumu ar ω. Iespējami divi gadījumi:



$\angle MON=\frac{1}{2}(180°-\omega)=90°-\frac{\omega}{2}$



$\angle MON=\frac{1}{2}(180°+\omega)=90°+\frac{\omega}{2}$

Atliek ievērot, ka $\sin(90^o-\frac{\omega}{2})=\sin(90^o+\frac{\omega}{2})$, un izmantot sinusu teorēmu $MN=2R\cdot\sin\angle MON$.

10.3. Pie n=1 skaitlis 2^n-1=1 nav pirmskaitlis.

Pie n=2 abi skaitļi 2^n-1=3 un 2^n+1=5 ir pirmskaitļi.

Ja $n\ge 3$, apskatām 3 viensotram sekojošus naturālus skaitļus 2^n-1; 2^n; 2^n+1. Tie visi **lielāki par 3**, un viens no tiem dalās ar 3. Tā kā 2^n nedalās ar 3, tad vai nu 2^n-1, vai 2^n+1 dalās ar 3; šis skaitlis nav pirmskaitlis.

10.4. a) Pie n=15 tas nav iespējams. Jābūt $|f(1)-1|+|f(2)-2|+...+|f(15)-15|=0+1+...+14$, jo vienīgās iespējamās moduļu vērtības ir 0; 1; ...; 14, tāpēc tām visām jāparādās. Ievērosim, ka atbrīvojoties no moduļu zīmēm, katrs skaitlis 1; 2; 3; ...; 15 kreisajā pusē parādās vai nu ar reizinātāju 2, var ar reizinātāju (-2), vai ar reizinātāju 0, tātad kreisajā pusē ir pāra skaitlis. Bet 0+1+...+14=105, kas ir nepāra skaitlis – pretruna.

b) Pie n=16 piemēru skat. tabulā:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
***f*(*n*)**	16	15	14	13	11	10	9	1	8	7	6	12	5	4	3	2
|*n*-*f*(*n*)|	15	13	11	9	6	4	2	7	1	3	5	0	8	10	12	14

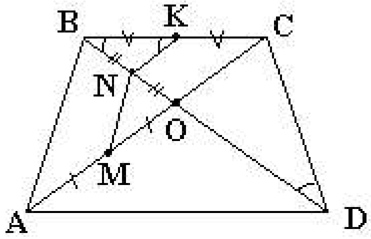
10.5. Pieņemsim, ka pirmajās k-1 kolonnās ir visas krāsas, bet k-jā kolonnā – nē (k=1; 2; ...; 9; skaidrs, ka nevar būt k=10). Parādīsim, kā „izlabot” k-to kolonnu, „nesabojājot” pirmās k-1 kolonnas.

Pieņemsim, ka k-tajā kolonnā krāsa x sastopama vismaz divas reizes, bet krāsa y tur nav sastopama. Katru no kolonnām attēlosim ar punktu. Katram i=1; 2; ...; 10 novilksim bultiņu no tās kolonnas, kurā skaitlis i ir krāsā x, uz to kolonnu, kurā skaitlis i ir krāsā y. Katrā no pirmajām k-1 kolonnām viena bultiņa ieiet un viena bultiņa iziet. Savukārt k-jā kolonnā neieiet neviena bultiņa, bet no tās iziet vismaz 2 bultiņas.

Ja mēs sāksim iet pa bultiņām no k-tās kolonnas, mēs varam sasniegt kolonnu ar numuru **>*k***. Pretējā gadījumā mēs nonākam pirmo k-1 kolonnu grupā, no kuras ārā iziet vairs nevaram, un tas nozīmē, ka pirmo k-1 kolonnu grupai ir vairāk ieejošo bultiņu nekā izejošo (pa vienai agrāk pieminētajai un vēl tā bultiņa, pa kuru mēs nonākam šajā grupā no kolonnas k) – pretruna. Tātad eksistē bultiņu virkne, kas sākas ar k-to kolonnu un beidas ar kolonnu „>k”. Izdarot maiņas, kas atbilst šīm bultiņām (maiņas sākam no kolonnas ar numuru >k), mēs „izlabojam” kolonnu ar numuru k attiecībā uz krāsu y. Izlabojot to, ja vajadzīgs, attiecībā uz citām krāsām, panākam, ka arī k-tā kolonna ir laba.

11.1. Nē, neeksistē. skaidrs, ka tas nevar būt konstants polinoms. Apzīmējam P(x) $=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, $a_0\neq 0$, $n\geq 1$. Tad $\left|P(x)\right| = \left|a_0x^n\right|\cdot\left|1+\frac{a_1}{a_0x}+\frac{a_2}{a_0x^2}+...+\frac{a_n}{a_0x^n}\right|$. Ja x ņems pēc moduļa ļoti lielu, otrā „iekava” nav mazāka par $\frac{1}{2}$ (jo visi locekļi, kas satur x, kļūst pēc moduļa ļoti mazi). Tātad |P(x)| neierobežoti aug. Bet |sin x+2005| ir ierobežota funkcija.

11.2. Atzīmējam arī BO viduspunktu (skat. zīm.). No viduslīniju īpašībām seko, ka MNKC – vienādsānu trapece, tāpēc punkti **M, N, K, C atrodas uz vienas riņķa līnijas**. Tā kā ΔBOC – vienādsānu, tad arī ΔBNK – vienādsānu. Tāpēc (atceramies, ka arī ΔBCD - vienādsānu) $\angle ODC+\angle NKC=\angle OBC+\angle NKC=\angle BKN+\angle NKC=180^o$, tātad **N, K, C, D atrodas uz vienas riņķa līnijas**. No abiem pasvītrotajiem apgalvojumiem seko vajadzīgais.



11.3. Vismaz vienam turnīra dalībniekam noslēgumā būs vismaz $(n+2)\cdot 2^{n-2}$-1 uzvara un tātad ne vairāk kā $(n+2)\cdot 2^{n-2}$-2 zaudējumi (pretējā gadījumā katram dalībniekam uzvaru būtu mazāk nekā zaudējumu, bet tā nevar būt). Atrodam šādu A_1 un apskatām tos $\leq(n+2)\cdot 2^{n-2}$-2 spēlētājus, kam viņš ir zaudējis. Šo spēlētāju "iekšējā turnīrā" var atrast spēlētāju, kam nav vairāk par $(n+2)\cdot 2^{n-3}$-2 zaudējumiem, utt. Līdzīgi turpinot, pēc n-1 gājieniem būs atrasti spēlētāji A_1, A_2, ...A_{n-1} ar īpašību:

A_{n-1} cietusi $\leq n$ zaudējumus pēdējā apskatītajā "apakšturnīrā", un katra komanda, izņemot A_1, A_2, ..., A_{n-1} un tās $\leq n$ komandas, kam A_{n-1} zaudējusi pēdējā "apakšturnīrā", zaudējusi vismaz pret vienu no A_1, A_2, ..., A_{n-1}. Šķirojam divas iespējas:

a) Eksistē tāda komanda, kam zaudējušas visas minētās $\le n$ "apakšturnīra" komandas, kurām zaudējusi A_{n-1}. Pievienojot to grupai A_1, A_2, ..., A_{n-1}, iegūstam vajadzīgo.

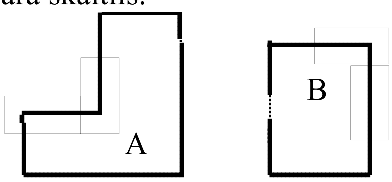
b) Tādas komandas nav. Tādā gadījumā pašas šīs $\le n$ komandas veido vajadzīgo grupu (papildinot to līdz skaitam n ar patvaļīgām komandām).

11.4. Apzīmējam $b=a+n$, $c=a+m$, $d=a+p$, kur $0<n\le m<p$. No $a(a+p)=(a+n)(a+m)$ seko $p = m+n+\frac{m\cdot n}{a}$. Tā kā p – naturāls skaitlis, tad $a\le m\cdot n$ un $p\ge m+n+1$, pie tam vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a=m\cdot n$. No $\sqrt{a+p} \le \sqrt{a}+1$ seko $p \le 2\sqrt{a}+1$, tātad $m+n+1 \le p \le 2\sqrt{a}+1 \le 2\sqrt{mn}+1$, no kurienes $m+n+1 \le 2\sqrt{mn}+1$, $m-2\sqrt{mn}+n \le 0$ un $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2 \le 0$, no kurienes $m=n$. Acīmredzami jāpastāv vienādībai $p=m+n+1$, jo citādi būs $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2 < 0$, kā nevar būt. Atceroties iepriekš iegūto, no šejienes seko, ka $a=m\cdot n=m^2$, k.b.j.

11.5. Apskatām domino kauliņu, kas pārklāj R. Uzzīmējam uz tā bultiņu no R centra uz otras pārklātās (baltās) rūtiņas centru. Šī bultiņa norāda uz citu melnu rūtiņu, kas arī atrodas 1., 3., ..., 2005. rindiņā. Sākot ar šo melno rūtiņu, izdarām to pašu, utt. Iegūstam maršrutu pa rūtiņām. Ja tas nonāk sākotnēji nepārklātā rūtiņā, viss ir kārtībā. Pretējā gadījumā veidojas cikls. Pierādīsim, ka cikla nevar būt, un uzdevums būs atrisināts. Skaidrs, ka, ja veidojas cikls, tad sākotnēji nepārklātā rūtiņa nav tā iekšienē, tāpēc iekšienei jābūt pārklātai ar domino. Tāpēc mums pietiek pierādīt, ka apskatāmā veida ciklos noteikti iekšpusē atrodas nepāra skaits rūtiņu, jo tas dos pretrunu.

Apzīmējam rūtiņas malas garumu ar 1. Apskatām lauzto līniju L, kas savieno ciklā iesaistīto domino centrus. Tā kā katra šīs līnijas posma garums ir pāra skaitlis, tās iekļautais laukums dalās ar 4. Šai laukumā ietilpst domino kauliņu laukumu daļa un iekšējais laukums. No katra domino kauliņa ir iekļauts laukums 1 plus $\frac{1}{4}$ pie katra A tipa stūra vai mīnus $\frac{1}{4}$ pie katra B tipa stūra. Tā kā B tipa stūru ir par 4 vairāk nekā A tipa stūru, tad šīs korekcija „samazina" laukumu par 1.

Atliek pamatot, ka domino skaits ciklā ir pāra skaitlis. Tā kā līnija L ir slēgta, tad, apstaigājot to, pa labi virzāmies tikpat lielu attālumu, cik pa kreisi. Tā kā katra L posma garums ir pāra skaitlis, tad horizontālo posmu kopgarums dalās ar 4. tas pats attiecas uz vertikālajiem posmiem. Tāpēc L kopgarums dalās ar 4. Katra domino iekšienē L garums ir tieši 2, tātad domino skaits ir pāra skaitlis.



Tātad L ietver pāra laukumu; no tā viena daļa – nepāra laukums – ir domino sastāvdaļas. Tātad cikla iekšpusē ir nepāra laukums, t.i., nepāra skaits rūtiņu, k.b.j.

12.1. Varam apzīmēt $n=3^k\cdot a$, kur a nedalās ar 3. Tad $n^2=3^{2k}\cdot a^2$. Dalītāji, par kuriem runā uzdevumā, ir precīzi skaitļa a^2 dalītāji (citi skaitļa n^2 dalītāji dalās ar 3).

Tā kā a^2 ir nepāra skaits dalītāju (visi dalītāji, izņemot a, apvienojas pa pāriem tā, ka vienā pārī ieejošo dalītāju reizinājums ir a^2), tad uzdevumā prasītais skaitlis neeksistē.

12.2. Novilksim taisni, kas nav paralēla nevienas parabolas asij. Katra parabola vai nu krusto šo taisni divos punktos, vai pieskaras tai, vai arī pilnībā atrodas vienā pusē no tās. tātad katras parabolas „iekšpusē" atrodas tikai viens šīs taisnes nogrieznis vai ari neviens tās punkts. Tāpēc visas parabolas „nepārklāj" pat šo vienu taisni.

12.3. Apzīmējam ABCD centru un malas garumu attiecīgi ar X un x, $A_1B_1C_1D_1$ centru un malas garumu attiecīgi ar Y un y, bet $\overrightarrow{XY}=\vec{\omega}$. Tad

$$AA_1^2+CC_1^2=\left(\overrightarrow{AX}+\vec{\omega}+\overrightarrow{YA_1}\right)^2+\left(\overrightarrow{CX}+\vec{\omega}+\overrightarrow{YC_1}\right)^2=$$

$$=AX^2+YA_1^2+CX^2+YC_1^2+2\omega^2+2\vec{\omega}\left(\underbrace{\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{CX}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{YA_1}+\overrightarrow{YC_1}}_{\vec{0}}\right)+2\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{YA_1}+2\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{YC_1}=$$

$$=x^2+y^2+2\omega^2+2\left(\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{YA_1}+\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{YC_1}\right).$$

Līdzīgi izsakot $BB_1^2+DD_1^2$, iegūstam, ka jāpierāda vienādība

$$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{YA_1}+\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{YC_1}=\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{YB_1}+\overrightarrow{DX}\cdot\overrightarrow{YD_1}.$$

Šīs vienādības pareizība seko no tā, ka $\left|\overrightarrow{AX}\right|=\left|\overrightarrow{CX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{DX}\right|$, $\left|\overrightarrow{YA_1}\right|=\left|\overrightarrow{YC_1}\right|=\left|\overrightarrow{YB_1}\right|=\left|\overrightarrow{YD_1}\right|$ un $\angle\left(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{YA_1}\right)=\angle\left(\overrightarrow{CX},\overrightarrow{YC_1}\right)=\angle\left(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{YB_1}\right)=\angle\left(\overrightarrow{DX},\overrightarrow{YD_1}\right)$.

12.4. Pie n=2 nevienādība ir $\dfrac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}{4}\ge\left(\dfrac{x_1x_2+x_2x_1}{2}\right)^2$, kas reducējas par $(x_1-x_2)^2\ge0$ un ir identiski patiesa.

Pie $n\ge4$ nevienādība ir aplama, ja $x_1=x_2=0$ un $x_3=x_4=...=x_n=1$.

Apskatām n=3. Apzīmējam $S_1=x_1+x_2+x_3$, $S_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$, $S_3=x_1x_2x_3$. Ievēroja, ka nevienādības pareizība vai nepareizība nemainās, ja visus x_i dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli. Izdarām to tā, lai būtu S_2=1. (To nevar izdarīt, ja vismaz divi no x_i ir 0, bet tad nevienādība ir pareiza.) Tad mūsu nevienādība kļūst par

$$\frac{1}{8}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2^2+x_3^2\right)\left(x_3^2+x_1^2\right)\ge\frac{1}{27}$$

Ievērojam, ka $S_1^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2S_2$. Tā kā $x_1^2+x_2^2+x_3^2\ge S_2$ (tas seko no $\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3-x_1\right)^2\ge0$), tad $S_1^2\ge3$ un $S_1\ge\sqrt{3}$. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko iegūstam

$$\frac{1}{3}=\frac{S_2}{3}\ge\sqrt[3]{S_3^2}\text{, tāpēc } S_3\le\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{8}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2^2+x_3^2\right)\left(x_3^2+x_1^2\right)\ge\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{x_3+x_1}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{64}\left(S_1-x_3\right)^2\left(S_1-x_1\right)^2\left(S_1-x_2\right)^2=\frac{1}{64}\left[\left(S_1-x_1\right)\left(S_1-x_2\right)\left(S_1-x_3\right)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{64}\left[S_1^3-S_1^2(x_1+x_2+x_3)+S_1\cdot S_2-S_3\right]^2=\frac{1}{64}\left(S_1^3-S_1^3+S_1S_2-S_3\right)^2=$$

$$=\frac{1}{64}\left(S_1S_2-S_3\right)^2=\frac{1}{64}\left(S_1-S_3\right)^2\ge\frac{1}{64}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{27},\ \text{k.b.j.}$$

12.5. Apzīmēsim ar U to pozīciju kopu, kurās ir pāra daudzums stieņu un augstākais viens stienis ar pāra garumu. Apzīmēsim ar Z to pozīciju kopu, kurās ir nepāra daudzums stieņu un augstākais divi stieņi ar pāra garumu. Viegli pārbaudīt, ka

- no U pozīcijas **katrs** gājiens ved uz Z pozīciju,
- no Z pozīcijas **var pāriet** uz U pozīciju,
- gan sākuma pozīcija, gan uzvarošā beigu pozīcija ir U pozīcijas.

Tātad otrais spēlētājs var ar savu gājienu vienmēr iegūt U pozīciju. Tātad pirmais spēlētājs nevar uzvarēt. Tā kā neizšķirts (bezgalīga spēle) nav iespējams, tad otrais spēlētājs var garantēt sev uzvaru.