5.1. **a) 21111**. Šim skaitlim ir gan mazākais iespējamais pirmais cipars, gan mazākie iespējamie pārējie cipari.

b) Lielākais ciparu skaits tiks sasniegts, ja cipari, sākot no otrā, būs vieninieki. Tāpēc meklējamais skaitlis ir **911111111111** (11 vieninieki).

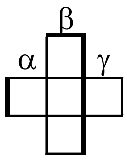
5.2. Augšējā rindiņā summa ir 30, aizpildītajā diagonālē tā ir 39. Tātad apskatāmās summas ir no 30 līdz 39. Vēl jāieraksta skaitļi 1; 2; 8; 15; 16. Skaidrs, ka t un y var būt tikai 15 vai 16; tad z=8. Tad nevar būt y=15. Tāpēc y=16, t=15 un tabulu var aizpildīt arī tālāk: u = 1, x = 2.

4	5	7	14
6	13	3	t
11	12	9	u
10	x	y	z

5.3. **a)** nē. Kvadrātā ir 24 kaimiņu pāri, bet taisnstūrī tikai 22,

b) nē. Taisnstūrī un kvadrātā katrā ir 14 rūtiņas ar ≥ 3 kaimiņiem. Tāpēc no stūra rūtiņām taisnstūrī jāpārceļas uz stūra rūtiņām kvadrātā, bet tas izšķir divus pārus.

5.4. Nē, neeksistē. Pieņemsim pretējo un apskatīsim "krustu", kura centrālā rūtiņa atrodas visaugstāk (vai vienu no tādiem, ja tādu ir vairāki). Tad rūtiņas α un γ (tādas eksistē, jo sagriežamā figūra ir taisnstūris) var aizpildīt tikai kvadrāti. Bet tad eksistē arī rūtiņa β, un to nevar aizpildīt kvadrāts; tātad to aizpilda krusts, kas atrodas augstāk par apskatāmo– pretruna.

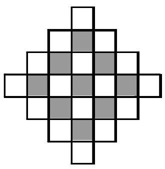


5.5. **a)** jā, piemēram: 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5.

b) jā, piemēram: 7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 11, 5, 12, 6, 13.

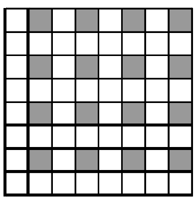
6.1. Ja vienas grāmatas cena ir x santīmi, tad $2400 \leq 19x \leq 2499$ un $2200 \leq 18x \leq 2299$. Tāpēc $x > 126$ un $x < 128$ (tiešām, $126 \cdot 19 = 2394$ un $128 \cdot 18 = 2304$). Tāpēc grāmata maksā Ls 1,27.

6.2. Tā kā katrs taisnstūris satur vismaz 1 melnu rūtiņu, tad to nav vairāk par 9 (skat. zīm.). Izgriezt 9 taisnstūrus var ļoti daudzos veidos.



6.3. Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda. Tad no katra skaitļu pāra (1; 12), (2; 11), (3; 10), (4; 9), (5; 8), (6; 7) augstākais viens var būt sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Tāpēc sērkociņu nav vairāk par $7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$ – pretruna.

6.4. Pirmais spēlētājs var uzvarēt, ar katru savu gājienu iebīdot figūriņu iesvītrotā rūtiņā (sk. zīm.). Tad otrais ir spiests to iebīdīt baltā rūtiņā, un pirmais var atkal to iebīdīt iesvītrotā, u.t.t. Tātad otrais spēlētājs **vienmēr** iebīda figūriņu baltā rūtiņā, tāpēc viņš nevar uzvarēt. Tā kā kāds noteikti uzvar, tad tas ir pirmais.



6.5. Viegli izsekot, ka pieļauto gājienu rezultātā uz tāfeles esošo pāra skaitļu daudzums nevar samazināties. Tāpēc prasītais nav sasniedzams.

7.1. Pieņemsim, ka x > y un z < t. Tad max(x, y) = x un max(z, t) = t.
Tad max(x, y) + max(z, t) = x + t. Ja x + t = x + z, tad z = t – pretruna.
Ja x + t = y + t, tad x = y – pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja x < y un z > t. Tāpēc vai nu x > y un z > t, vai arī x < y un z < t.

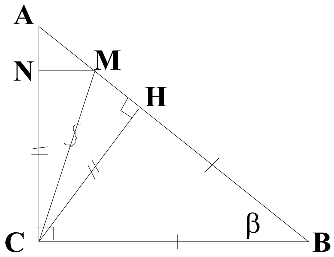
7.2. Apzīmējam ∠ABC = β. No vienādsānu trijstūra CBM seko

$$\angle MCB = \frac{1}{2}(180^o - \beta) = 90^o - \frac{\beta}{2}.$$

No taisnleņķa trijstūra CHB seko $\angle HCB = 90^o - \beta$, tāpēc

$$\angle MCH = (90^o - \frac{\beta}{2}) - (90^o - \beta) = \frac{\beta}{2}.$$

Tā kā $\angle ACH = 90^o - (90^o - \beta) = \beta$, tad $\angle ACM = \beta - \frac{\beta}{2} = \beta$. Tāpēc ΔNCM = ΔHCM (mlm), un $\angle MNC = \angle MHC = 90^o$, k.b.j.



7.3. Uzrakstām daļas kā $\frac{5}{(n+2)+5}$, $\frac{6}{(n+2)+6}$, ..., $\frac{36}{(n+2)+36}$. Daļas visas būs nesaīsināmas tad un tikai tad, ja n + 2 nevarēs saīsināt ne ar vienu no skaitļiem 5; 6; ...; 36. Acīmredzot mazākais tāds n+2 ir 37, tāpēc n = 35.

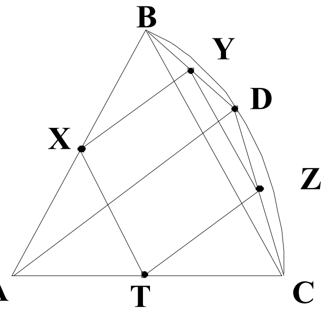
7.4. Trijstūrī DAE augstums sakrīt ar mediānu, tāpēc tas ir vienādsānu un AD = AE. Līdzīgi BE = BF, CF = CG, DG = DA, EA = EB, FB = FC. No šīm vienādībām seko, ka arī GC = GD. Tātad ΔCGD ir vienādsānu; tāpēc tā mediāna pret pamatu ir arī augstums, k.b.j.

7.5. Attēlosim diplomātus ar 7 punktiem. Izvēlēsimies vienu punktu. Starp atlikušajiem 6 punktiem var novilkt $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ nogriežņus (no katra no 6 punktiem iziet 5 nogriežņu gali, un katram nogrieznim ir 2 gali). Tātad katrs no 7 punktiem ietilpst kā virsotne 15 trijstūros. Tāpēc trijstūru ar virsotnēm šajos 7 punktos ir $\frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 15 = 35$ (katrs trijstūris summā $\underbrace{15 + 15 + ... + 15}_{7 \text{ saskaitamie}}$ ieskaitīts 3 reizes). Nokrāsosim nogriežņus atbilstoši valodām, kādas sarunā lieto attiecīgie diplomāti, krāsās a, v, f. Padomāsim, cik ir trijstūru, kuru malas nokrāsotas tikai divās vai vienā krāsā. Acīmredzot, jebkuram punktam A ir trīs šādi trijstūri ar virsotni A, kam vienā krāsā nokrāsotas no A izejošās malas. Tātad šādu trijstūru nav vairāk par 3 · 7 = 21 (atceramies, ka trijstūri, kam visas malas nokrāsotas vienādi – ja tādi ir – šādi tiek uzskaitīti 3 reizes katrs).Tā kā 35 > 21, tad ir vismaz 14 trijstūri, kam visas malas nokrāsotas dažādi. Katra šāda trijstūra virsotnes dod mums vajadzīgo diplomātu trijnieku.

8.1. No Vjeta teorēmas $b = x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = q^2$,

bet $a = -(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 2q - p^2$.

8.2. No dotā seko, ka ABC ir regulārs un AB = BC = AC = AD. No šejienes un trijstūru viduslīniju īpašībām seko XY = YZ = ZT = TX. Tāpēc XYZT – rombs; tāpēc XZ ⊥ YT.



8.3. Acīmredzot $X = \overline{AB} = 100A + B$, Y = 100B + A. Tāpēc X – Y = 99(A - B), un 99(A - B) dalās ar 91. Skaitļu 99 un 91 LKD ir 1, tāpēc A – B dalās ar 91. Bet $|A - B| \le 89$. Tāpēc $|A - B| = 0$ un A = B, k.b.j.

8.4. Ievērosim, ka katras daļas perimetrs centimetros vienāds ar divkāršotu tās laukumu kvadrātcentimetros. Tāpēc visu daļu perimetru summa ir 20 000cm jeb 200m. Šī summa sastāv no kvadrāta perimetra 4m un divkāršota visu novilkto līniju kopējā garuma 2L. Tāpēc $2L = 200m - 4m = 196m$ un L = 98m.

8.5. Apzīmēsim skaitli, kas ir pirmais neizsvītrotais pēc n svītrošanas sērijām, ar x_n (n = 0; 1; 2; ...). Viegli pārbaudīt, ka $x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$; $x_4 = 8$.

Pretēji domai par Fibonači skaitļiem pierādīsim, ka

$$(*) \quad x_{n+1} = \begin{cases} \frac{3}{2} x_n \text{ , ja } x_n \text{ – pāra skaitlis,} \\ \frac{3}{2} x_n \text{ , ja } x_n \text{ – nepāra skaitlis.} \end{cases}$$

Tiešām, pieņemsim, ka $x_n = 2m$, m∈N. Apskatām skaitli 3m. Ir m skaitļi, kas mazāki par 3m un dod atlikumu 1, dalot ar 3. Tāpēc pēc pirmās svītrošanu sērijas 3m atradīsies 2m–jā vietā; tātad vēl pēc n sērijām tas būs pirmajā vietā. Tagad pieņemam, ka $x_n = 2m + 1,\ m = 0; 1; \ldots$. Apskatām skaitli $\frac{3}{2}(2m+1) + \frac{1}{2} = 3m + 2$. Pēc pirmās svītrošanu sērijas, kurā izsvītros m + 1 par to mazākus skaitļus, šis skaitlis atradīsies 2m + 1 –ā vietā; tātad vēl pēc n sērijām tas būs pirmajā vietā. Sakarība (*) pierādīta.

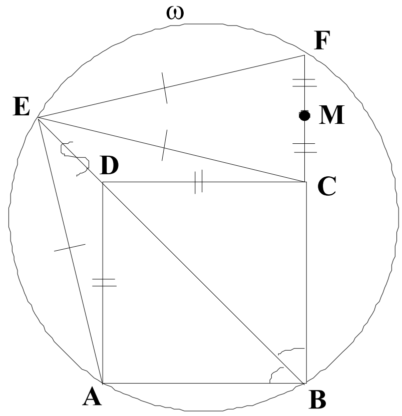
Tagad pakāpeniski iegūstam x_i vērtības 1; 2; 3; 5; 8; 12; 18; 27; 41; 62; 93; 140; 210; 315; 473; 710; 1065; 1598. Nākošais loceklis jau būtu lielāks par 2004, tāpēc uzdevuma atbilde ir 1598.

9.1. Pretējā gadījumā **katram** x pastāv nevienādības $x^2 + p_1x + q_1 > 0$ un $x^2 + p_2x + q_2 > 0$, bet tad arī katram x $2x^2 + (p_1 + p_2)x + (q_1 + q_2) > 0$ – pretruna.

9.2. Pieņemsim pretējo. Viens no skaitļiem a un b ir pāra, otrs – nepāra; pieņemsim, ka a – pāra, b –nepāra.

Ja punktā 0 dzīvo votivapa, punktā $1 \cdot a$ dzīvo šillišalla, punktā $2 \cdot a$ – votivapa, punktā $3 \cdot a$ - šillišalla, ..., **punktā b · a – šillišalla.** No otras puses, punktā $1 \cdot b$ dzīvo šillišalla, punktā $2 \cdot b$ - votivapa, ..., **punktā a · b - votivapa.** Iegūta pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja punktā 0 dzīvo šillišalla.

9.3. No teorēmas par vienādiem ievilktiem leņķiem un tiem atbilstošām hordām, seko EA=EF. No ΔEDA = ΔEDC (mlm) seko EA = EC. Tāpēc EF = EC un ΔCEF ir vienādsānu; tāpēc mediāna EM tajā ir arī augstums.



9.4. Apzīmēsim rūķīti, kurš atnāca pēdējais, ar A, un rūķīti, kurš aizgāja pirmais, ar B. Ar K_A apzīmēsim kompāniju, kas sastāv no paša A un viņa satiktajiem rūķīšiem; līdzīgi ieviešam K_B. Gan K_A, gan K_B katrā ir vismaz n + 1 rūķītis. Tā kā $(n + 1) + (n + 1) > 2n +1$, tad eksistē tāds rūķītis, kas pieder gan K_A, gan K_B; apzīmēsim to ar R. Ja kāds rūķītis X aizietu agrāk, nekā atnāca R, tad arī B būtu aizgājis agrāk, nekā atnāca R; bet tad B nebūtu saticis R – pretruna. Ja kāds rūķītis Y atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, tad arī A atnāktu vēlāk, nekā aizgāja R, un A nebūtu saticis R – pretruna.

No minētā seko, ka R satika visus rūķīšus.

9.5. a) jā; skat. zīm. α

1	-1	0	-1	**-1**
1	-1	1	1	**2**
0	-1	-1	-1	**-3**
1	1	1	1	**4**
3	**-2**	**1**	**0**	

zīm. α

r_1	1	-1	1		
r_2	1	-1	1		
r_3	1	-1	1		
r_4	1	-1	1		
r_5	1	-1	0		
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5

zīm. β

b) nē. Desmit summām iespējamas vērtības $0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 5$ (kopā 11). Ja rindiņu summas ir $r_1, ..., r_5$ un kolonu summas ir $k_1, ..., k_5$, tad $(r_1 + ... + r_5) + (k_1 + ... + k_5)$ ir pāra skaitlis. Tāpēc starp $r_1, ..., r_5, k_1, ..., k_5$ ir pāra skaits nepāra skaitļu. Tāpēc visas nepāra summas $\mp 1, \mp 3, \mp 5$ ir sastopamas. Varam pieņemt, ka $k_1 = 5$. Tad nevar būt $r_i = -5$; tāpēc varam uzskatīt, ka $k_2 = -5$ (ievērojam, ka kolonas savā starpā un rindas savā starpā var patvaļīgi mainīt). No summām „4" un „-4" vismaz vienai ir jābūt; varam pieņemt, ka ir summa 4 (zīmes visiem skaitļiem tabulā var mainīt uz pretējām). Varam pieņemt, ka $k_3 = 4$ un vienīgā nulle ir rindā r_5 (zīm. β). Nevar būt $r_i = -3$; tāpēc kādā kolonā summa ir „-3", un uzskatīsim, ka $k_4 = -3$. Tātad 4. kolonā ir vismaz trīs „-1".

I Tie visi sastopami pirmajās 4 rindās; tad varam uzskatīt, ka tie ir pirmajās 3 rindās (zīm.γ). Tad pirmajās 3 rindās summām jābūt -1; 0; 1. Tāpēc 5. kolonā pirmajās 3 rindās ir skaitļi -1; 0; 1, un $k_5 \neq 3$. Arī $r_5 \neq 3$. Vērtība 3 var būt tikai r_4, tāpēc 4. rindā abi pēdējie skaitļi ir 1. Tā kā $k_4 = -3$, tad 4. kolonas un 5. rindas krustpunktā ir „-1". Lai kā izvēlētos skaitli x, iegūst pretrunu (tieša pārbaude).

1	-1	1	-1	
1	-1	1	-1	
1	-1	1	-1	
1	-1	1		
1	-1	0		

zīm. γ

1	-1	1	-1	x
1	-1	1	-1	y
1	-1	1	0	z
1	-1	1	0	t
1	-1	0	-1	

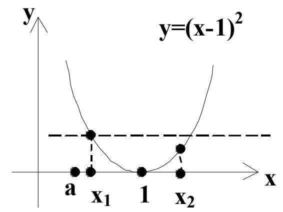
zīm. δ

II Ceturtajā kolonā pirmajās 4 rindās ir tikai divi „-1". Varam uzskatīt, ka situāciju attēlo zīm. δ. Nevienā rindā summa nevar būt 3, tāpēc $k_5 = 3$. Tas iespējams vai nu kā $1+1+1+0+0$, vai kā $1+1+1+1+(-1)$. Jābūt $x \neq y$ un $z \neq t$. Pārbaudot visas iespējas, katrā no tām iegūst pretrunu.

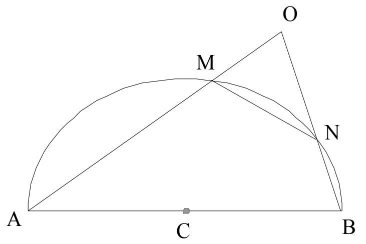
10.1. Atbilde: a = 1.

1) ja x > y >1, tad x – 1 > y – 1 >0, tāpēc $(x - 1)^2 > (y - 1)^2$, no kā seko $x^2 - 2x > y^2 - 2y$.

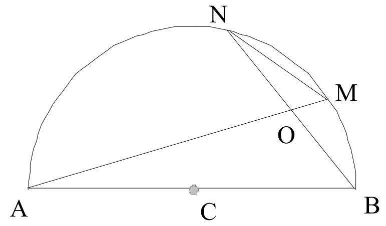
2) ja 0 < a < 1, tad eksistē tādi x_1 un x_2, ka $0 < a < x_1 < 1 < x_2$ un $(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$, skat. zīm.



10.2. Apzīmēsim hordas MN garumu ar a, bet tās savilktā loka leņķisko lielumu ar ω. Iespējami divi gadījumi:



$\angle MON = \frac{1}{2}(180^o - \omega) = 90^o - \frac{\omega}{2}$



$\angle MON = \frac{1}{2}(180^o + \omega) = 90^o + \frac{\omega}{2}$

Atliek ievērot, ka $\sin(90^o - \frac{\omega}{2}) = \sin(90^o + \frac{\omega}{2})$, un izmantot sinusu teorēmu $MN = 2R \cdot \sin \angle MON$.

10.3. a) katram naturālam n $(n + 5)^2 < n^2 + 11n + 30 < (n + 6)^2$; tātad $n^2 + 11n + 30$ atrodas starp blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem un nav kvadrāts,

b) apzīmējam n + 5 = x; pētāmais skaitlis ir $\sqrt{x^2 + x}$. Viegli pārbaudīt, ka naturāliem x pastāv nevienādības $x + 0{,}4 < \sqrt{x^2 + x} < x + 0{,}5$. Tāpēc meklējamais cipars ir 4.

10.4. Pieņemsim, ka ir x amatieri un x + 9 profesionāļi, un amatieri n reizes uzvarējuši profesionāļus. Tad amatieriem kopā ir $\frac{x(x-1)}{2} + n$ uzvaras, profesionāļiem kopā ir $\frac{(x+9)(x+8)}{2} + x(x+9) - n$ uzvaras, un iegūstam vienādojumu $9\left(\frac{x(x-1)}{2} + n\right) = \frac{(x+9)(x+8)}{2} + x(x+9) - n$, kas pārveidojas par $3x^2 - 22x + 10n - 36 = 0$.
Tā atrisinājums ir naturāls skaitlis, tāpēc diskriminantam 121 – 3(10n - 36) jābūt nenegatīvam; no šejienes seko n ≤ 7. Pārbaude parāda, ka atrisinājums ir naturāls skaitlis pie n = 2 un pie n = 6. Pie n = 2 iznāk x = 8; tad labākajam amatierim nav vairāk par 9 uzvarām. Pie n = 6 iznāk x = 6. Tad labākajam amatierim nav vairāk par 5 + 6 = 11 uzvarām. Tāds skaits ir sasniedzams, ja viens amatieris uzvar visus citus amatierus un ir vienīgais no amatieriem, kas uzvar profesionāļus (citu spēļu rezultātam nav nozīmes).

10.5. Nē, nevar. No šiem 16 skaitļiem 8 jābūt pāra un 8 – nepāra. Tāpēc starp tiem cipariem jābūt gan pāra, gan nepāra ciparam. Apskatām 2 pāra un 1 nepāra ciparu; apzīmējam tos ar p_1, p_2 un n. Iegūstamie nepāra skaitļi ir p_1p_1n, p_1p_2n, p_1nn, p_2p_1n, p_2p_2n, p_2nn, np_1n, np_2n, nnn. Apskatām pirmo 2 ciparu veidotos skaitļus; ja divu šādu skaitļu starpība dalās ar 8, tad atbilstošo trīsciparu skaitļu starpība dalās ar 16, un tā ir pretruna. Apskatāmie divciparu skaitļi ir p_1p_1, p_1p_2, p_1n, p_2p_1, p_2p_2, p_2n, np_1, np_2, nn; tikai trīs no tiem ir nepāra. Tāpēc, izvēloties 8 skaitļus, nevarēs iegūt 8 dažādus atlikumus šiem divciparu skaitļiem, dalot tos ar 8, un divi no tiem dos vienādus atlikumus; tad to starpība dalīsies ar 8.

11.1. Nē, neeksistē. Ja $2004^n - 1 \,\vdots\, 1500^n - 1$, tad arī

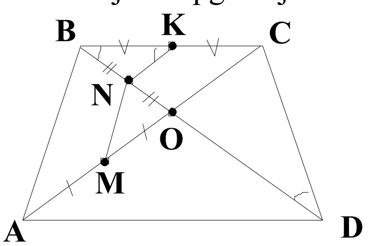
$$\left(2004^n - 1\right) - \left(1500^n - 1\right) = 2004^n - 1500^n = 2^n\left(1002^n - 750^n\right) \vdots\, 1500^n - 1.$$

Tā kā $\text{LKD}\left(2^n, 1500^n - 1\right) = 1$, tad $1002^n - 750^n \,\vdots\, 1500^n - 1$.

Bet tas nav iespējams, jo $0 < 1002^n - 750^n < 1500^n - 1$.

11.2. Atbilde: $4^4 = 256$. Viegli redzēt, ka rūtiņas uz vienas diagonāles var nokrāsot patvaļīgi un ka šis krāsojums viennozīmīgi nosaka citu rūtiņu krāsojumu.

11.3. Atzīmējam arī BO viduspunktu (skat. zīm.). No viduslīniju īpašībām seko, ka MNKC – vienādsānu trapece, tāpēc punkti **M, N, K, C atrodas uz vienas riņķa līnijas**. Tā kā ΔBOC – vienādsānu, tad arī ΔBNK – vienādsānu. Tāpēc (atceramies, ka arī ΔBCD - vienādsānu) $\angle ODC + \angle NKC = \angle OBC + \angle NKC = \angle BKN + \angle NKC = 180^o$, tātad **N, K, C, D atrodas uz vienas riņķa līnijas**. No abiem pasvītrotajiem apgalvojumiem seko vajadzīgais.



11.4. Logaritmējot iegūstam ekvivalentu nevienādību $a\lg a + b\lg b \geq b\lg a + a\lg b$

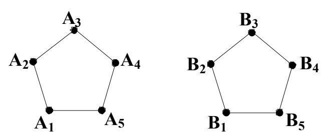
$$(a-b)(\lg a - \lg b) \geq 0$$

Vajadzīgais seko no tā, ka y = lgx – augoša funkcija pie x >0.

11.5. Atbilde: n = 6.

Apskatām deputātu A, visus viņa draugus un visus šo draugu draugus. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem citu deputātu nav. Tāpēc $1 + n + n(n-1) \geq 25$, no kurienes $n \geq 5$. Parādīsim, ka n = 5 nav iespējams. Augstāk minētajā uzskaitījumā "A, A draugi un A draugu draugi" **tieši viens deputāts** būtu uzskaitīts divas reizes. Skaidrs, ka tas var būt tikai "A drauga draugs", kurš kā tāds uzskaitīts divas reizes. Tāpēc A pieder **tieši vienam** ciklam ar garumu 4. Tas attiecas uz patvaļīgu A. Bet 25 deputāti nevar sadalīties ciklos ar garumu 4.

Parādīsim, ka n = 6 ir iespējams. apskatām 5 ciklus, katrā pa 5 virsotnēm. Apzīmējam patvaļīgus 2 ciklus ar



un „nodefinējam" starp tiem draudzības A_1B_1, A_2B_3, A_3B_5, A_4B_2, A_5B_4 (t.i., ja A_i un A_j savā starpā draudzējas, tad viņu draugi ciklā B savā starpā nedraudzējas un otrādi).

Viegli pārbaudīt, ka uzdevuma nosacījumi ir izpildīti.

12.1. Viegli pārbaudīt, ka apskatāmā izteiksme vienāda ar

$$\left(x^{n+1} + x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1\right).$$

12.2. Apzīmējam ABCD centru un malas garumu attiecīgi ar X un x, $A_1B_1C_1D_1$ centru un malas garumu attiecīgi ar Y un y, bet $\overrightarrow{XY} = \vec{\omega}$. Tad

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \left(\overrightarrow{AX} + \vec{\omega} + \overrightarrow{YA_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CX} + \vec{\omega} + \overrightarrow{YC_1}\right)^2 =$$

$$= AX^2 + YA_1^2 + CX^2 + YC_1^2 + 2\omega^2 + 2\vec{\omega}\left(\underbrace{\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{CX}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{YA_1} + \overrightarrow{YC_1}}_{\vec{0}}\right) + 2\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{YA_1} + 2\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{YC_1} =$$

$$= x^2 + y^2 + 2\omega^2 + 2\left(\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{YA_1} + \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{YC_1}\right).$$

Līdzīgi izsakot $BB_1^2 + DD_1^2$, iegūstam, ka jāpierāda vienādība

$$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{YA_1}+\overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{YC_1}=\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{YB_1}+\overrightarrow{DX}\cdot\overrightarrow{YD_1}.$$

Šīs vienādības pareizība seko no tā, ka $\left|\overrightarrow{AX}\right|=\left|\overrightarrow{CX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{DX}\right|$, $\left|\overrightarrow{YA_1}\right|=\left|\overrightarrow{YC_1}\right|=\left|\overrightarrow{YB_1}\right|=\left|\overrightarrow{YD_1}\right|$ un $\angle\left(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{YA_1}\right)=\angle\left(\overrightarrow{CX},\overrightarrow{YC_1}\right)=\angle\left(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{YB_1}\right)=\angle\left(\overrightarrow{DX},\overrightarrow{YD_1}\right)$.

12.3. Skaidrs, ka der visas konstantās funkcijas. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav. Pieņemsim pretējo; tad eksistē tādi x un y, ka f(x) < f(y). Izvēlēsimies tādus x un y, ka **pozitīvā starpība** d = f(y) – f(x) ir minimālā starp visām šādām starpībām. Tad

$$f(x)=\frac{xf(x)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(x)}{x+y}<\frac{xf(y)+yf(y)}{x+y}=f(y).$$

Esam ieguvuši, ka $f(x)<f(x^2+y^2)<f(y)$ - pretruna ar x un y izvēli.

12.4. **a)** ievērosim, ka katrs pirmskaitlis, ar kuru dalās (n - 1)!, nepārsniedz n – 1. Tāpēc, ja (n–1)! dalās ar n resp. ar n +2, tad n resp. n + 2 nav pirmskaitlis.

b) pieņemsim, ka (n - 1)! nedalās ne ar n, ne ar n +2. Tas ir spēkā pie n = 3 un n = 5, un abos gadījumos gan n, gan n + 2 ir pirmskaitlis. Aplūkosim gadījumu n ≥ 7 un pieņemsim, ka n – salikts skaitlis, n = a · b, 1 < a ≤ n – 1 un 1 < b ≤ n –1. Tad gan a, gan b sastopami reizinājumā 1 · 2 · 3 · ... · (n - 1). Pie a ≠ b no tā seko, ka (n - 1)! dalās ar n – pretruna. Pie a=b iegūstam $n = a^2$; tā kā a ≥ 3, tad n >2a un 2a ≤ n – 1. Tāpēc reizinājumā 1 · 2 · 3 · ... · (n – 1) sastopami gan a, gan 2a; tātad (n - 1)! dalās ar a^2 jeb ar n – pretruna.
Esam pierādījuši, ka n – pirmskaitlis.

Pieņemsim, ka n + 2 – salikts skaitlis, n + 2 = a · b, 1 < a ≤ n + 1 un 1 < b ≤ n + 1. Tā kā n ir nepāra un n ≥ 7, tad $3\le a,b\le\frac{n+2}{3}$, no kurienes seko 2a ≤ n – 1 un 2b ≤ n – 1.

Tālāk pretrunu iegūst tāpat kā pierādot, ka n ir pirmskaitlis.

Esam pierādījuši, ka n + 2 – pirmskaitlis.

12.5. Sekojošā tabula parāda, ka var būt n = 7:

1. tiesn.	n	n	n	n	n	n	n
2. tiesn.	n	d	d	d	d	n	n
⋮	n	d	d	n	n	d	d
	n	n	n	d	d	d	d
	d	n	d	n	d	n	d
	d	n	d	d	n	d	n
	d	d	n	n	d	d	n
8. tiesn.	d	d	n	d	n	n	d

Parādīsim, ka nevar būt n = 8. Pieņemsim pretējo.
Ievērosim: mainot kolonā d par n un n par d, uzdevuma nosacījumi saglabājas. Tāpēc varam uzskatīt, ka 1. tiesnesis nevienu kandidātu nav atzinis par derīgu (1. rinda sastāv no n). Pieņemsim, ka i-jā rindā ir x_i vērtējumi „n”. Skaidrs, ka $x_1 + x_2 + ... + x_8 = 32$, tāpēc $x_2+x_3+...+x_8=24$. i-jā rindā esošu „n” pāru ir $C_{x_i}^2=\frac{1}{2}x_i(x_i-1)$. Tāpēc 2., 3., 4., ..., 8. rindā pavisam ir $\frac{1}{2}\left(x_2^2+x_3^2+...+x_8^2\right)-\frac{1}{2}\left(x_2+...+x_8\right)$ šādu pāru; pirmajā rindā šādu pāru ir $C_8^2=28$. Tāpēc šo pāru pavisam ir $\frac{1}{2}\left(x_2^2+x_3^2+...+x_8^2\right)-12+18$. No otras puses, tādu pāru pavisam ir $C_8^2\cdot 2=56$ (uz katrām divām kolonām divi pāri). Iegūstam

$$(*)\quad\begin{cases}x_2^2+x_3^2+...+x_8^2=80\\ x_2+x_3+...+x_8=24\end{cases}$$

. Bet tā ir pretruna ar nevienādību starp vidējo kvadrātisko un vidējo aritmētisko, saskaņā ar kuru jābūt $\frac{x_2^2+..x_8^2}{7}\ge\left(\frac{x_2+...+x_8}{7}\right)^2$: pēc $(*)$ tā neiznāk.