Papildkonstrukcijas

Ilmārs Štolcers, Kims Georgs Pavlovs

1 Ievads

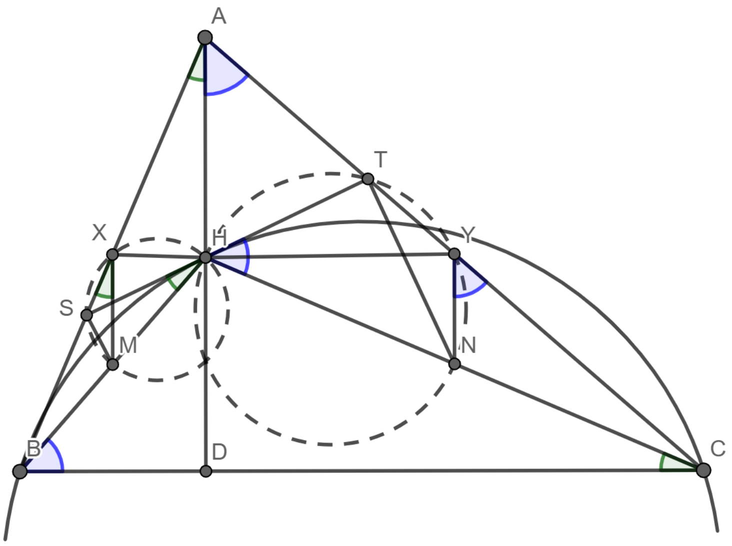
Iepriekšējos 2 ģeometrijas materiālos redzējām daudzus svarīgus veidus un metodes, kā ģeometrijas uzdevumos var iegūt un pierādīt īpašības, kuras palīdz no dotā iegūt prasīto. Tomēr dažos grūtākos piemēros jau bija pamanāms, ka ne vienmēr ar doto informāciju ir iespējams uzskatāmā veidā iegūt progresu uzdevuma risinājumā. Šajos brīžos zīmējumā tika ieviestas **papildkonstrukcijas** – uzdevumā nepieminēti punkti un taisnes. Šo konstrukciju ieviešana palīdzēja uzdevumos iegūt informāciju, kura pirms tam tajā pavisam nebija ieraugāma, piemēram, iegūstot ievilktus četrstūrus, nogriežņu vienādības utml.

Katrā zīmējumā ir iespējams novilkt bezgalīgi daudz papildkonstrukciju, un lielākā daļa no tām nepalīdzēs nonākt pie risinājuma. Tādēļ grūtos uzdevumos ir svarīga spēja pamanīt, kādi papildu elementi spētu būt noderīgi zīmējumā. Šī spēja prasa daudz radošuma un pieredzes uzdevumos, lai to varētu uzticami izmantot, tādēļ šajā materiālā aplūkosim vairākas tehnikas, kas var palīdzēt turpmāk veiksmīgi papildināt zīmējumus un atvieglot risinājumu gaitu.

2 Viduspunktu atlikšana

Reizēm uzdevumos ir vērts atlikt malu viduspunktus, ja ir dotas mediānas vai viduspunkti. Tādā gadījumā var izmantot dažādas paralelitātes īpašības, vienādus nogriežņus utml.

1.piemērs Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kurā novilkts augstums AD (punkts D atrodas uz malas BC). Ar H apzīmēts ABC augstumu krustpunkts, pie tam zināms, ka $AH = HD$. Ar ℓ apzīmēsim taisni, kura iet caur punktu H un pieskaras trijstūra BHC apvilktajai riņķa līnijai. Punkti S un T ir taisnes ℓ krustpunkti attiecīgi ar malām AB un AC. Nogriežņu BH un CH viduspunktus apzīmēsim attiecīgi ar punktiem M un N. Pierādīt, ka taisnes SM un TN ir paralēlas.

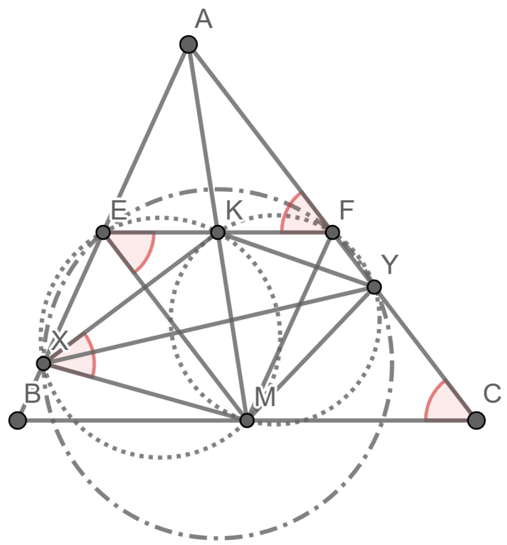


Atrisinājums. Ar X un Y apzīmēsim attiecīgi nogriežņu AB un AC viduspunktus. Ievērosim, ka XM ir viduslīnija trijstūrī ABH, tāpēc $XM \parallel AD$, savukārt XH ir viduslīnija trijstūrī ABD, tāpēc $XH \parallel BC$. Tā kā $AD \perp BC$, tad $XM \perp BC$, bet $XH \parallel BC$, tāpēc $XH \perp XM$ jeb $\angle MXH = 90°$.

Ievērosim, ka $\angle SHB = \angle HCB$ kā pieskares leņķis. Atzīmēsim, ka $\angle HCB = \angle BAH = 90° - \angle ABC$, jo punkts H ir trijstūra ABC augstumu krustpunkts. Piedevām $XM \parallel AD$, tāpēc $\angle BAH = \angle BXM$. Secinām, $\angle BXM = \angle SHB$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $XSMH$ var apvilkt riņķa līniju. Tādā gadījumā $\angle MXH = \angle MSH = 90°$.

Analoģiski varam pierādīt, ka $\angle NTH = 90°$. Tas nozīmē, ka $SM \parallel TN$, kas arī bija jāpierāda.

2.piemērs Punkts K ir mediānas AM viduspunkts trijstūrī ABC. Punkti X, Y atrodas attiecīgi uz nogriežņiem AB, AC ar īpašību, ka $\angle KXM = \angle ACB$, $AX > BX$ un $\angle KYM = \angle ABC$, $AY > CY$. Pierādīt, ka punkti B, C, X, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Ar E un F apzīmēsim attiecīgi malu AB un AC viduspunktus. Pirmkārt ievērosim, ka EF ir viduslīnija trijstūrī ABC, tāpēc $EF \parallel BC$. Tā kā K ir AM viduspunkts, tad EK ir viduslīnija trijstūrī $BAM \implies EK \parallel BM$. No tā varam secināt, ka $EK \parallel BC \parallel EF$, tātad punkti E, K, F atrodas uz vienas taisnes.

Ievērosim, ka $\angle AFE = \angle ACB$, jo $EF \parallel BC$. Papildus tam varam ievērot, ka $EM \parallel AC$, jo EM ir viduslīnija $\triangle ABC$, tātad $\angle MEF = \angle AFE$ kā šķērsleņķi. Dots, ka $\angle MXK = \angle ACB$, tātad

$$\angle MXK = \angle ACB = \angle AFE = \angle MEK,$$

kas nozīmē, ka četrstūrim $MXEK$ var apvilkt riņķa līniju. Analoģiskā veidā varam pierādīt, ka arī četrstūrim $KFYM$ var apvilkt riņķa līniju.

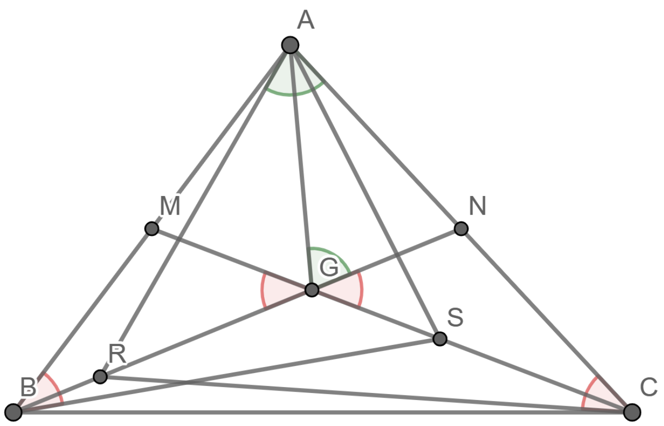
Tad no punkta pakāpes pret riņķa līniju $\odot(XEKM)$ secinām $AE \cdot AX = AK \cdot AM$. No punkta pakāpes pret $\odot(KFYM)$ iegūstam $AK \cdot AM = AF \cdot AY$. Tas nozīmē, ka $AE \cdot AX = AK \cdot AM = AF \cdot AY$, tātad ap četrstūri $XEFY$ var apvilkt riņķa līniju.

Riņķa līnijā $\odot(XEFY)$ ievērosim, ka $\angle YXE = \angle AFE$. Tā kā iepriekš ieguvām, ka $\angle AFE = \angle ACB$, varam secināt, ka $\angle YXE = \angle YCB$, kas pierāda, ka ap četrstūri $BXYC$ var apvilkt riņķa līniju.

3.piemērs Dots trijstūris ABC, kura mediānu krustpunkts ir G. Punkti R un S ir izvēlēti uz attiecīgi stariem GB un GC ar īpašību, ka

$$\angle ABS = \angle ACR = 180^\circ - \angle BGC.$$

Pierādīt, ka $\angle RAS + \angle BAC = \angle BGC$.



Atrisinājums. Ar M un N apzīmēsim attiecīgi nogriežņu AB un AC viduspunktus. Ievērosim, ka $\angle ACR = 180^\circ - \angle RGC$, kas nozīmē, ka, AC ir riņķa līnijas $\odot(RGC)$ pieskare punktā C (to viegli redzēt, ja pagarina taisni AC un atliek blakusleņķi $\angle ACR$). Tādā gadījumā no punkta pakāpes $NC^2 = NG \cdot NR$. Bet $NC = NA$, tādēļ $NA^2 = NC^2 = NG \cdot NR$, kas no apgrieztās pieskares īpašības nozīmē, ka NA ir pieskare punktā A trijstūra AGR apvilktajai riņķa līnijai. Tādā gadījumā no pieskares īpašības $\angle RAN = 180^\circ - \angle AGR = \angle NGA$ kā blakusleņķis.

Analoģiski varam veikt secinājumus ar leņķi $\angle SBA$ un galā iegūt, ka $\angle MAS = \angle AGM$. Ievērosim, ka $\angle BGC = \angle NGM = \angle NGA + \angle AGM$. Taču no iepriekš iegūtā

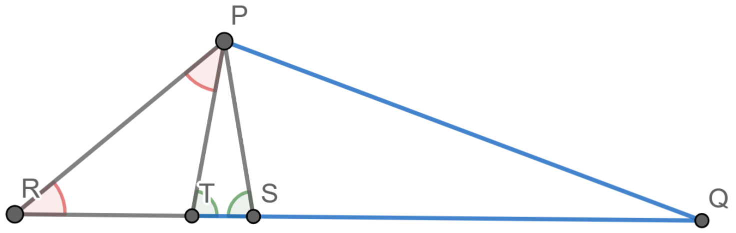
$$\angle NGA + \angle AGM = \angle RAC + \angle BAS = \angle RAS + \angle SAC + \angle BAR + \angle RAS = \angle BAC + \angle RAS,$$

kas pierāda prasīto.

3 Vienādu nogriežņu atlikšana

Uzdevumos, kuros ir dota sakarība starp nogriežņiem, kur viens nogrieznis ir divu citu summa (piemēram, $BC = AB + CD$), populāra ideja ir sadalīt šo nogriezni divās daļās, kas ir vienādas ar minētajiem diviem citiem nogriežņiem ($BX = AB$ un $CX = CD$).

4.piemērs Dots trijstūris PQR, kurā $\angle PQR = 20°$ un $\angle PRQ = 40°$. No virsotnes P vilktā bisektrise krusto malu QR punktā S, nogriežņa PS garums ir 2. Par cik mala QR ir garāka nekā PQ?



Atrisinājums. Atliksim uz malas RQ punktu T, ka $QP = QT$. Tādā gadījumā prasītā atbilde ir $QR - PQ = QR - QT = RT$. Mums nepieciešams noteikt nogriežņa RT garumu.

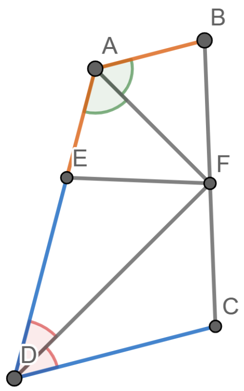
Ievērosim, ka vienādsānu trijstūrī PQT izpildās

$$\angle QTP = \angle TPQ = \frac{1}{2}(180° - \angle PQT) = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°.$$

Varam arī noteikt leņķa $\angle PST$ lielumu. Tā kā PS ir bisektrise, tad $\angle RPS = \frac{1}{2}(180° - \angle PQR - \angle PRQ) = \frac{1}{2}(180° - 20° - 40°) = 60°$. Tad trijstūrī RPS izpildās $\angle PSR = 180° - \angle RPS - \angle PRQ = 180° - 60° - 40° = 80°$. Tātad $\angle PST = 80° = \angle STP$, kas nozīmē, ka $PT = PS = 2$.

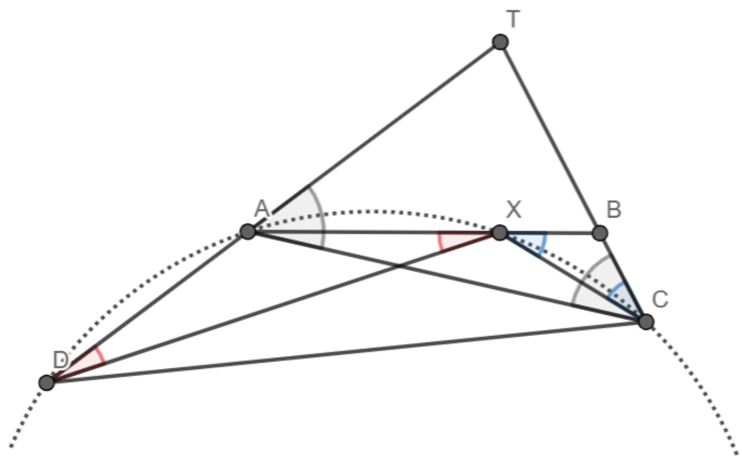
Ievērosim, ka $\angle RPQ = 2\angle RPS = 120°$. Tādā gadījumā $\angle RPT = \angle RPQ - \angle TPQ = 120° - 80° = 40°$. Bet ir dots, ka $\angle PRQ = 40°$, tātad $\angle TRP = \angle RPT$. No tā secinām, ka $RT = PT = PS = 2$, kas ir prasītā atbilde.

5.piemērs Četrstūra $ABCD$ malām izpildās $AD = AB+CD$. Leņķu DAB un CDA bisektrišu krustpunkts F atrodas uz malas BC. Pierādīt, ka F ir BC viduspunkts.



Atrisinājums. Atliksim uz nogriežņa AD punktu E, kuram izpildās $AE = AB$. Tādā gadījumā no nosacījuma $AD = AB + CD$ varam secināt, ka $DE = DC$. Tā kā AF un DF ir bisektrises, tad $\angle EAF = \angle FAB$ un $\angle CDF = \angle FDE$. Varam ievērot, ka $\triangle FAB = \triangle FAE$ pēc pazīmes *mlm*, jo FA ir kopīga mala šiem trijstūriem, $EA = AB$ un $\angle EAF = \angle FAB$. Analoģiski $\triangle CDF = \triangle EDF$ pēc pazīmes *mlm*, jo DF ir kopīga mala, $DE = DC$ un $\angle CDF = \angle FDE$. No abām šīm trijstūru vienādībām redzams, ka $BF = EF = CF$, kas nozīmē, ka F ir BC viduspunkts.

6.piemērs Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kurā izpildās $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ un $AB = BC + AD$. Pierādīt, ka $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka taisnes AD un BC krustojas punktā T. Ievērosim, ka $\angle BCA = 180° - \angle CAD = \angle TAC$. Tas nozīmē, ka $\triangle TAC$ ir vienādsānu, līdz ar to $\angle ATC = 180° - 2\angle TAC$.

Atliksim uz nogriežņa AB tādu punktu X, ka $AD = AX$, tad tā kā $AB = BC + AD$, tad izriet, ka $BX = BC$. Apzīmēsim $\angle ADX = \angle AXD = \alpha$ un $\angle BXC = \angle BCX = \beta$. Aplūkosim $\triangle DAX$ un $\triangle BXC$ ārējo leņķus $\angle TAB$ un $\angle TBA$. Ievērosim, ka $\angle TAB = \angle ADX + \angle AXD = 2\alpha$ un $\angle TBA = \angle BXC + \angle BCX = 2\beta$. Secinām, ka:

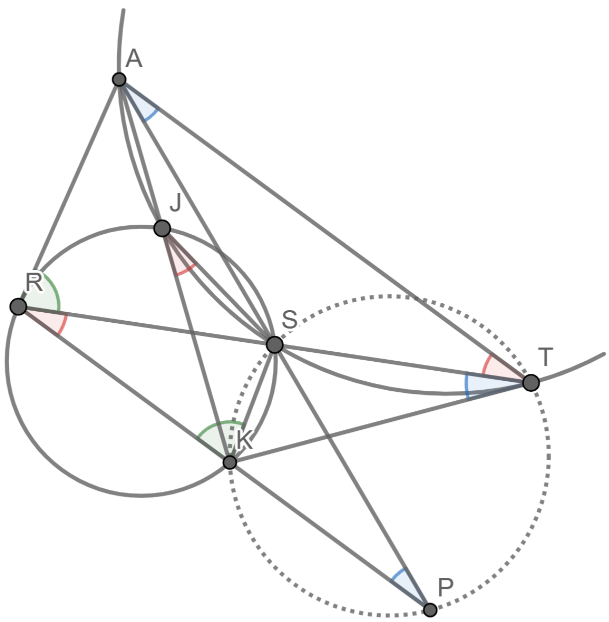
$$180° - 2\angle TAC = \angle ATC = 180° - \angle TAB - \angle ABT = 180° - 2\alpha - 2\beta \implies \angle TAC = \alpha + \beta$$

No šejienes izriet, ka $\angle CAD = 180° - \angle TAC = 180° - \alpha - \beta = 180° - \angle AXD - \angle BXC = \angle DXC$. Tas nozīmē, ka ap četrstūri $DAXC$ var apvilkt riņķa līniju. Ievērosim, ka $\angle ACD = \angle AXD = \angle ADX$ un $\angle BAC = \angle XDC$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. Līdz ar to $\angle BAC + \angle ACD = \angle XDC + \angle ADX = \angle CDA$, kas arī bija jāpierāda.

4 Paralelograma triks

Ja uzdevumā ir atrodamas paralēlas taisnes (un, iespējams, kāds viduspunkts), tad var būt noderīgi uz paralēlajām taisnēm atlikt paralelogramu – tiem izpildās ļoti daudz gan leņķu, gan nogriežņu īpašību.

7.piemērs Uz riņķa līnijas Ω izvēlēti punkti R un S tā, ka RS nav diametrs. Taisne ℓ pieskaras Ω punktā R. Punkts T atlikts tā, ka S ir nogriežņa RT viduspunkts. Punkts J ir izvēlēts uz mazākā loka RS riņķa līnijā Ω, pie tam trijstūra JST apvilktā riņķa līnija Γ krusto ℓ divos dažādos punktos. Ar A apzīmējam to Γ un ℓ krustpunktu, kas atrodas tuvāk R. Taisne AJ vēlreiz krusto Ω punktā K. Pierādīt, ka taisne KT pieskaras Γ.



Atrisinājums. Tā kā četrstūris $AJST$ ir ievilkts, izpildās $\angle ATS = \angle KJS$. Tā kā arī $RJSK$ ir ievilkts, izpildās $\angle KJS = \angle KRS$. Varam secināt, ka $\angle ATS = \angle KRS$, tātad $RK \parallel AT$ no šķērsleņķiem. Atliksim uz taisnes RK punktu P, lai $ATPR$ būtu paralelograms. Tādā gadījumā punkti A, S, P atrodas uz vienas taisnes (paralelograma diagonāles), jo S ir RT viduspunkts un paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm.

Ievērosim, ka $\angle SKR = \angle SRA$, jo AR ir pieskare Ω. Tā kā $\angle KRS = \angle ATR$, tad $\triangle ART \sim \triangle SKR$ pēc pazīmes *ll*. No šī trijstūru pāra uzrakstīsim malu attiecības

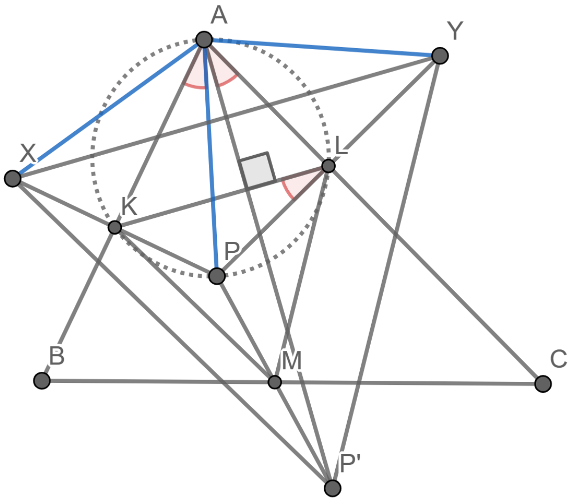
$$\frac{RK}{RS} = \frac{RT}{AT} \implies RK \cdot AT = RS \cdot RT.$$

Taču tā kā $AT = RP$, tad $RK \cdot RP = RS \cdot RT$. No punkta pakāpes tas nozīmē, ka četrstūris $STPK$ ir ievilkts. Tajā izpildās $\angle STK = \angle SPK$, bet no paralelograma $ATPR$ zināms, ka $\angle SAT = \angle SPK$. Tātad $\angle STK = \angle SAT$, kas no apgrieztās pieskares īpašības nozīmē, ka KT pieskaras Γ punktā T.

5 Simetriski attēlojumi

Vispārinājums iepriekš aplūkotajai idejai par paralelogramu ir punktu simetrisko attēlojumu (pār taisni vai citu punktu) ieviešana. Tie bieži palīdz, ja uzdevumos ir atrodami viduspunkti vai kādi dīvaini leņķu nosacījumi, kaut arī potenciālo pielietojumu klāsts ir neierobežots. Šī ideja kopumā ir ļoti populāra ģeometrijas uzdevumos.

8.piemērs Trijstūra ABC iekšienē atzīmēts punkts P. Punkti K un L ir pamati no P vilktajiem perpendikuliem pret attiecīgi AB un AC. Punkts M atrodas uz taisnes BC, ka $KM = LM$. Punkts P' ir punkta P simetriskais attēlojums pāri M. Pierādīt, ka $\angle BAP = \angle P'AC$.

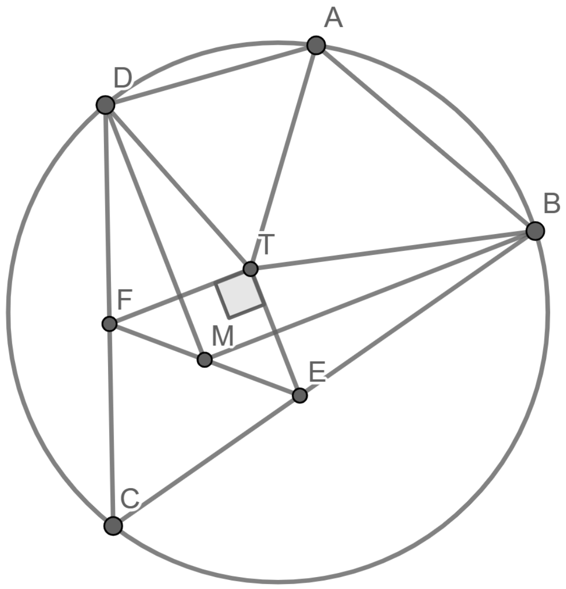


Atrisinājums. Attēlojam P simetriski pāri taisnēm AB un AC un apzīmējam attiecīgos punktus ar X un Y. No simetrisku attēlojumu definīcijas tad punkti P, K, X un P, L, Y atrodas uz vienas taisnes. Ievērosim, ka KM ir viduslīnija $\triangle XPP'$, tātad $P'X = 2KM$, kā arī LM ir viduslīnija $\triangle YPP'$, tātad $P'Y = 2LM$. Ņemot vērā, ka $KM = LM$, iegūstam, ka $P'X = P'Y$.

No simetrisko attēlojumu definīcijas zināms, ka AB ir nogriežņa PX vidusperpendikuls, tāpēc $XA = PA$. Analoģiski AC ir PY vidusperpendikuls un $YA = PA$. Tātad $XA = YA$. Tā kā $P'X = P'Y$, varam secināt, ka $P'A$ ir nogriežņa XY vidusperpendikuls, tātad $P'A \perp XY$. Ievērosim, ka KL ir viduslīnija $\triangle XPY$, tātad $KL \parallel XY \implies P'A \perp KL$.

Tā kā $PK \perp AB$ un $PL \perp AC$, tad $\angle PKA = \angle ALP = 90°$, kas nozīmē, ka četrstūris $ALPK$ ir ievilkts. Tad $\angle KAP = \angle KLP$. Ievērosim, ka $\angle KLP = 90° - \angle ALK = \angle P'AL$, jo $P'A \perp KL$. No iegūtā secinām, ka $\angle BAP = \angle KLP = \angle P'AC$, kas arī bija jāpierāda.

9.piemērs Dots riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kuram $AB < BC$ un $AD < DC$. Punkti E un F izvēlēti attiecīgi uz malām BC un CD tā, ka $AB = BE$ un $AD = DF$. Punkts M ir nogriežņa EF viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle BMD = 90°$.



Atrisinājums. Ar T apzīmēsim punkta E simetrisko attēlojumu pār taisni BM. Ievērosim, ka tad $BT = BE = BA$ un $MT = ME = MF$, tātad B ir $\triangle ATE$ apvilktās riņķa līnijas centrs un M ir apvilktās riņķa līnijas centrs $\triangle ETF$. Tā kā M atrodas uz malas EF, trijstūris ETF ir taisnleņķa un $\angle ETF = 90°$.

Tā kā B ir $\triangle ATE$ apvilktās riņķa līnijas centrs, izsakām

$$\angle ATE = 180° - \frac{1}{2}\angle ABE = 180° - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Tā kā $\angle ETF = 90°$, varam izteikt leņķi $\angle ATF$ kā

$$\angle ATF = 360° - \angle ATE - \angle ETF = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC.$$

No ievilktā četrstūra $ABCD$ zinām, ka

$$\angle ABC + \angle CDA = 180° \implies \frac{1}{2}\angle ABC = 90° - \frac{1}{2}\angle CDA.$$

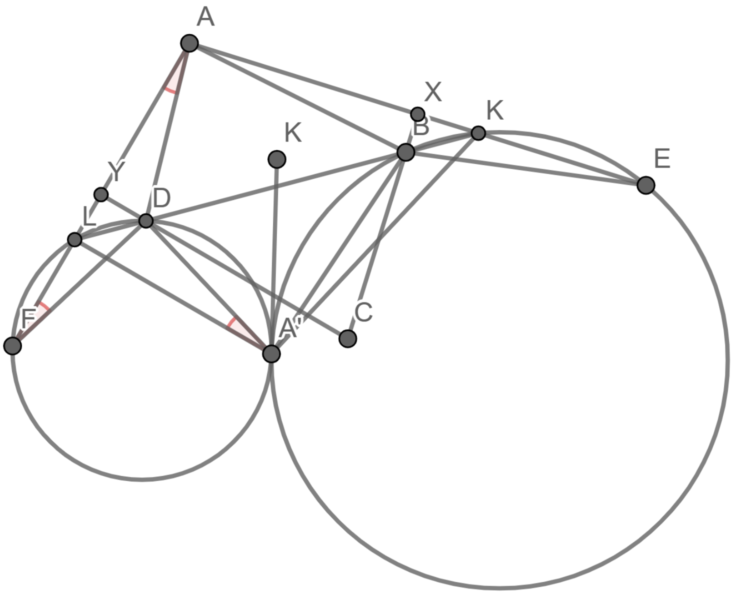
Tātad

$$\angle ATF = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle CDA.$$

Novelkot riņķa līniju ar centru punktā D un rādiusu $DA = DF$, jebkuram punktam X, kas atrodas uz mazā loka AF, izpildīsies $\angle AXF = 180° - \frac{1}{2}\angle FDA$. Tā kā $\angle ATF = 180° - \frac{1}{2}\angle CDA$, secinām, ka T atrodas uz minētā loka un D ir trijstūra ATF apvilktās riņķa līnijas centrs. Tad $DT = DF$, kas kopā ar $MT = MF$ nozīmē, ka MD ir nogriežņa TF vidusperpendikuls jeb $MD \perp TF$. No iepriekšējā arī zinām, ka $BM \perp TE$.

Aplūkojam četrstūri, ko veido taisnes BM, MD, ET, TF. No iepriekš pierādītā zināms, ka trīs no tā leņķiem ir $90°$, tātad arī ceturtais leņķis ir $90°$, kas nozīmē, ka $\angle BMD = 90°$, kas arī bija jāpierāda.

10.piemērs Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kuram $\angle ABC > 90°$, $CDA > 90°$ un $\angle DAB = \angle BCD$. Ar E un F apzīmējam punkta A simetriskos attēlojumus attiecīgi pāri taisnēm BC un CD. Pieņemsim, ka nogriežņi AE un AF krustojas ar taisni BD attiecīgi punktos K un L. Pierādīt, ka trijstūru BEK un DFL apvilktās riņķa līnijas pieskaras.



Atrisinājums. Atliksim punkta A simetrisko attēlojumu pāri taisnei BD un apzīmēsim to ar A'.

Vispirms pierādīsim, ka A' atrodas uz $\odot(BKE)$ un $\odot(DFL)$. Tā kā BD ir AA' vidusperpendikuls, no simetrijas secinām, ka $\angle DA'L = \angle LAD$. Dots arī, ka punkti A un F ir simetriski pret taisni CD, tādēļ no simetrijas $\angle LAD = \angle DFL$. Tātad $\angle DA'L = \angle DFL$, kas nozīmē, ka A' atrodas uz vienas riņķa līnijas ar punktiem D, F, L. Analoģiski var iegūt, ka A' pieder riņķa līnijai $\odot(BKE)$.

Pagarināsim CB līdz krustpunktam ar AE, ko apzīmēsim ar X, un CD līdz krustpunktam ar AF, ko apzīmēsim ar Y. No simetrijas (vidusperpendikuli) tad $\angle CYA = \angle AXC = 90°$, tādēļ četrstūrim $YAXC$ var apvilkt riņķa līniju. Tālāk izsakām leņķus, izmantojot trijstūru ārējos leņķus un ievilktu četrstūru īpašības

$$\begin{gathered}\angle ALD + \angle AKB = (\angle ADB - \angle LAD) + (\angle ABD - \angle BAK) = \\ = (\angle ADB + \angle ABD) - \angle LAD - \angle BAK = 180° - \angle DAB - \angle LAD - \angle BAK = \\ = 180° - \angle LAK = 180° - \angle YAX = \angle YCX = \angle DCB = \angle BAD.\end{gathered}$$

No simetrijas zināms, ka $\angle BA'D = \angle BAD$, tādēļ varam secināt, ka $\angle BA'D = \angle ALD + \angle AKB$. Papildus no simetrijas arī iegūstam, ka $\angle A'LD = \angle ALD$ un $\angle A'KB = \angle AKB$. Tad varam izteikt

$$\angle BA'D = \angle A'LD + \angle A'KB.$$

Pieņemsim, ka $\odot(FLDA')$ novilkta pieskare KA' punktā A'. Tad $\angle KA'D = \angle A'LD$ no hordas-pieskares leņķa. Izsakot

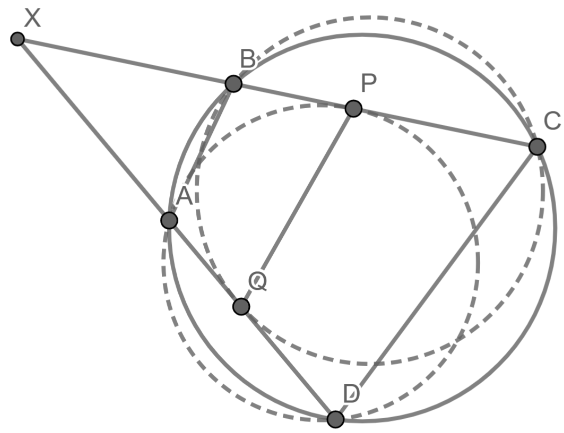
$$\angle BA'K = \angle BA'D - \angle KA'D = \angle BA'D - \angle A'LD = \angle A'KB,$$

no pieskares pazīmes redzams, ka KA' ir arī pieskare $\odot(A'BKE)$. Tā kā šīm riņķa līnijām ir kopīga pieskare KA' punktā A', varam secināt, ka šīs riņķa līnijas pieskaras, kas arī bija jāpierāda.

6 Taišņu pagarināšana, lai izmantotu punkta pakāpi

Uzdevumos, kur ir dotas vairākas riņķa līnijas, reizēm ir vērts pagarināt dažas no taisnēm līdz to krustpunktiem. Ja šīs taisnes ir radikālās asis kādām riņķa līnijām, tad bieži vien var iegūt papildu informāciju no punkta pakāpes - piemēram, iegūt jaunus ievilktus četrstūrus zīmējumā.

11.piemērs Uz ievilkta četrstūra $ABCD$ malām BC un AD ir izvēlēti attiecīgi punkti P un Q ar īpašību, ka $\odot(APD)$ pieskaras taisnei BC un $\odot(BQC)$ pieskaras taisnei AD. Pierādīt, ka taisne PQ veido vienādus leņķus ar taisnēm AD un BC.

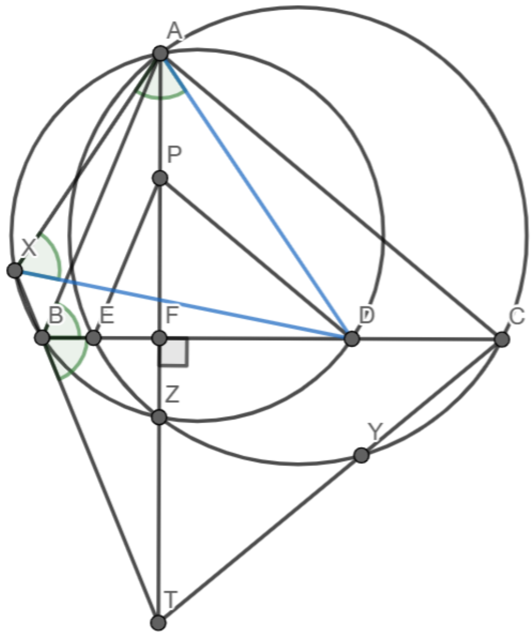


Atrisinājums. Ar punktu X apzīmēsim taišņu BC un AD krustpunktu. No punkta pakāpes pret riņķa līniju $\odot(APD)$ ievērosim, ka $XP^2 = XA \cdot XD$. Savukārt no punkta pakāpes pret riņķa līniju $\odot(BQC)$ ievērosim, ka $XQ^2 = XB \cdot XC$. Toties riņķa līnijā $\odot(ABCD)$ redzams, ka $XA \cdot XD = XB \cdot XC$. Tātad

$$XP^2 = XA \cdot XD = XB \cdot XC = XQ^2 \implies XP = XQ,$$

kas nozīmē, ka $\angle PQX = \angle XPQ$. Tā kā šie ir leņķi, ko veido taisne PQ ar AD un BC, tad esam ieguvuši prasīto.

12.piemērs Dažādmalu šaurleņķu trijstūrī ABC punkts F ir augstuma pamats no virsotnes A. Punkts P ir patvaļīgs punkts uz nogriežņa AF, pie tam $P \neq A$ un $P \neq F$. Caur punktu P vilktas paralēlas taisnes malām AC, AB, kas attiecīgi krusto malu BC punktos D un E. Punkti $X \neq A$ un $Y \neq A$ izvēlēti attiecīgi uz trijstūru ABD un ACE apvilktajām riņķa līnijām tā, ka $DA = DX$ un $EA = EY$. Pierādīt, ka punkti B, C, X, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. No Talesa teorēmas redzam, ka:

$$\frac{FE}{FB} = \frac{FP}{FA} = \frac{FD}{FC} \implies FE \cdot FC = FB \cdot FD.$$

Tas nozīmē, ka punktam F ir vienāda pakāpe pret trijstūru ACE un ABD apvilktajām riņķa līnijām. Ja ar Z apzīmējam šo divu riņķa līniju krustpunktu, kas ir atšķirīgs no punkta A, tad esam ieguvuši, ka punkts $F \in AZ$.

Pieņemsim, ka taisne BX krusto taisni AF punktā T_1. Tad izmantojot $DA = DX$, varam iegūt, ka:

$$\angle DAX = \angle DBT_1 = \angle AXD = \angle ABD.$$

Tā kā $AF \perp BC$, tad secinām, ka $AF = FT_1$.

Pieņemsim, ka taisne CY krusto taisni AF punktā T_2, tad analoģiski varam iegūt, ka $AF = FT_2$. Tā kā taisnes BX un CY ir simetriskas attiecīgi AB un AC pret taisni BC, tas nozīmē, ka to krustpunkti ar AF atrodas vienā pusē taisnei BC. Tātad punkti T_1 un T_2 sakrīt, līdz ar to esam pierādījuši, ka taisnes BX, AF, CY krustojas vienā punktā, ko apzīmēsim ar T.

Tagad no punkta pakāpes varam iegūt, ka:

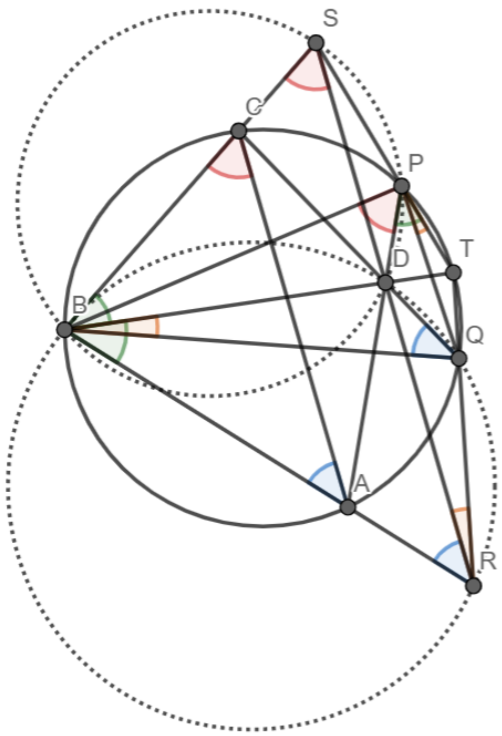
$$TB \cdot TX = TA \cdot TZ = TC \cdot TY.$$

Secinām, ka $TB \cdot TX = TC \cdot TY$, tātad punkti B, C, X, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.

7 Taišņu pagarināšana, lai izteiktu leņķus

Bieži vien ir vērts uzdevumos pagarināt taisnes līdz to krustpunktiem ar riņķa līnijām, lai iegūtu papildu leņķu vienādības. Protams, nav vērts pagarināt visas iespējamās taisnes, jo tad zīmējums kļūs nepārskatāms – vispirms nepieciešams analizēt, pie kurām taisnēm nepieciešams iegūt informāciju par leņķiem.

13.piemērs Dots izliekts četrstūris $ABCD$ ar īpašību, ka punkts D atrodas $\odot(ABC)$ iekšpusē un atrodas uz $\angle ABC$ bisektrises. Taisnes AD un CD krusto $\odot(ABC)$ attiecīgi punktos P un Q. Savukārt taisne, kas vilkta caur punktu D paralēli taisnei AC, krusto taisnes AB un BC attiecīgi punktos R un S. Pierādīt, ka punkti P, Q, R, S atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Atrisinājums. Atrisinājums sastāvēs no vairākiem soļiem.

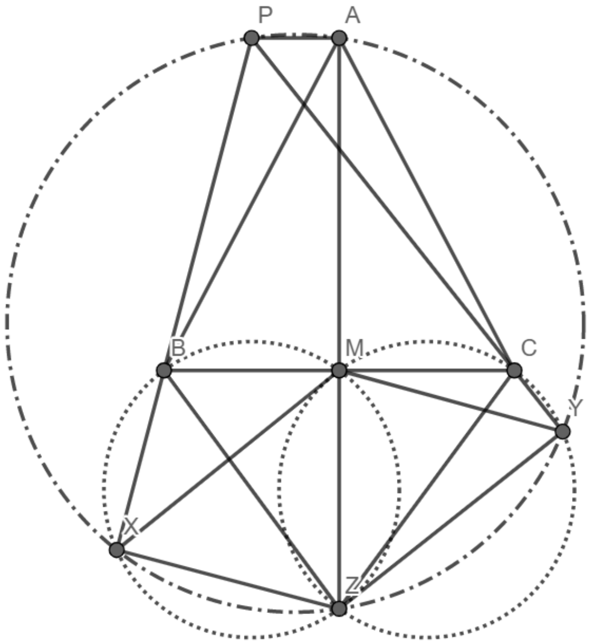
1.solis: Ap četrstūriem $DBRQ$ un $DBSP$ var apvilkt riņķa līnijas.
Pierādījums: Ievērosim, ka $\angle BAC = \angle BRD$ un $\angle BCA = \angle BSD$, jo $AC \parallel RS$. No otras puses, mēs zinām, ka $\angle BAC = \angle BQC = \angle BQD$ un $\angle BCA = \angle BPA = \angle BPD$ kā leņķi, kas balstās uz viena loka. Līdz ar to $\angle BRD = \angle BQD$ un $\angle BSD = \angle BPD$, kas nozīmē, ka ap četrstūriem $BRQD$ un $BQPS$ var apvilkt riņķa līnijas, jo vienādie leņķi balstās uz vienu nogriezni, kas arī bija jāpierāda.

Pieņemsim, ka BD krusto $\odot(ABC)$ punktā T.

2.solis: Punkti R, Q, T un S, P, T ir kolineāri (atrodas uz vienas taisnes).
Pierādījums: Pieņemsim, ka $\angle ABD = \angle DBC = \alpha$ (BD ir leņķa $\angle ABC$ bisektrise). Tā kā ap četrstūri $BRQD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle RQD = 180° - \angle ABD = 180° - \alpha$. No otras puses, mēs zinām, ka $\angle DBC = \angle TBC = \angle CQT = \angle DQT = \alpha$ kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. Līdz ar to $\angle RQT = \angle RQD + \angle DQT = 180° - \alpha + \alpha = 180°$. Tas nozīmē, ka punkti R, Q, T atrodas uz vienas taisnes. Analoģiski pierāda, ka punkti S, P, T atrodas uz vienas taisnes.

Atliek ievērot, ka tā kā ap četrstūri $BRQD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle DBQ = \angle DRQ = \angle SRQ$. No otras puses, mēs zinām, ka $\angle DBQ = \angle QPT$, jo tie balstās uz vienu loku. Secinām, ka $\angle SRQ = \angle QPT$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $PQRS$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

14.piemērs Dots vienādsānu trijstūris $\triangle ABC$, kuram izpildās, ka $AB = AC$. Punkts M ir nogriežņa BC viduspunkts, savukārt punkts P ir tāds, ka $PB < PC$ un $PA \parallel BC$. Punkti X un Y ir izvēlēti uz nogriežņu PB un PC pagarinājumiem tā, ka $\angle PXM = \angle PYM$. Pierādīt, ka ap četrstūri $APXY$ var apvilkt riņķa līniju.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka $\odot(BMX)$ krusto taisni AM punktā Z.

1.solis: Ap četrstūri $MCYZ$ var apvilkt riņķa līniju.
Pierādījums: Ievērosim, ka tā kā ap četrstūri $MBXZ$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle BXM = \angle BZM$. No otras puses, punkts Z atrodas uz nogriežņa BC vidusperpendikula, jo taisne AM ir šī nogriežņa vidusperpendikuls. Līdz ar to $\angle BZM = \angle CZM$. Izmantojot uzdevumā doto leņķu nosacījumu, varam secināt, ka $\angle CYM = \angle BXM = \angle BZM = \angle CZM$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $MCYZ$ var apvilkt riņķa līniju.

2.solis: Punkti A, P, X, Z, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.
Pierādījums: Ievērosim, ka tā kā ap četrstūriem $MBXZ$ un $MCYZ$ var apvilkt riņķa līnijas un $AM \perp BC$, tad $\angle BXZ = \angle CYZ = 90°$. Tas nozīmē, ka ap četrstūri $ZYPX$ var apvilkt riņķa līniju. No otras puses, $\angle APY = \angle PCB$, jo $PA \parallel BC$, kā arī $\angle PCB = \angle YZM = \angle YZA$, jo ap četrstūri $MCYZ$ var apvilkt riņķa līniju. Līdz ar to $\angle YZA = \angle APC$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $APZY$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā ap četrstūriem $YPXZ$ un $APZY$ var apvilkt riņķa līnijas, tad punkti A, P, X, Z, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.

No iepriekšējiem soļiem izriet prasītais.