Punkta pakāpe

Ilmārs Štolcers, Kims Georgs Pavlovs

1 Ievads

Kā noskaidrojām iepriekšējā materiālā, risinot olimpiāžu ģeometrijas uzdevumus, ir vērts sākt ar doto leņķu izpēti zīmējumā, tas ir, atrast dotajiem leņķiem vienādus leņķus, izteikt leņķus ar citu leņķu summām utt. Dotajos piemēros redzējām, ka citreiz uzdevumus var atrisināt tikai ar leņķu izteikšanu, bet, saskaroties ar uzdevumiem no starptautiskām olimpiādēm, ir vērts zināt arī citas teorēmas un uzdevumu risināšanas metodes. Šajā materiālā mēs iepazīsimies ar punkta pakāpi un radikālajām asīm, kas spēlē ļoti būtisku lomu vieglajos (un bieži vien ne tikai) IMO un citu starptautisko olimpiāžu uzdevumos.

2 Ievilkta četrstūra un pieskares īpašība un pazīme

Šajā sadaļā mēs pierādīsim svarīgas īpašības un pazīmes, kas izpildās ievilktam četrstūrim un riņķa līnijai vilktai pieskarei. Visus šos rezultātus drīkst izmantot olimpiādēs (un attiecīgi arī mājasdarbā) bez pierādījuma.

Ievilkta četrstūra īpašība. Dots riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$. Pieņemsim, ka tā pretējās malas AB un CD krustojas punktā X, savukārt diagonāles AC un BD krustojas punktā Y. Tad izpildās šādas sakarības

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD \quad \text{un} \quad YA \cdot YC = YB \cdot YD.$$

Pierādījums. Ievērosim, ka tā kā ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle XBC = \angle ADC$. Tā kā trijstūriem XBC un XDA ir kopīgs leņķis $\angle AXD$, tad $\triangle XBC \sim \triangle XDA$ pēc pazīmes *leņķis - leņķis*. Tādā gadījumā

$$\frac{XB}{XC} = \frac{XD}{XA} \implies XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

kā līdzīgos trijstūros atbilstošie elementi. Tas pierāda pirmo sakarību.

Lai pierādītu otru sakarību ievērosim, ka $\angle ABD = \angle ACD$ kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Tā kā $\angle BYA = \angle CYD$ kā krustleņķi, tad $\triangle BYA \sim \triangle CYD$ pēc pazīmes *leņķis-leņķis*. Tādā gadījumā

$$\frac{BY}{YA} = \frac{CY}{YD} \implies YA \cdot YC = YB \cdot YD,$$

kas arī bija jāpierāda.

Ievilkta četrstūra pazīme. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kura pretējās malas AB un CD krustojas punktā X, savukārt diagonāles AC un BD krustojas punktā Y. Ja izpildās vismaz viena no sakarībām

$$XA \cdot XB = XC \cdot XC \quad \text{vai} \quad YA \cdot YC = YB \cdot YD,$$

tad ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.

Pierādījums. Pieņemsim, ka izpildās sakarība $XA \cdot XB = XC \cdot XD$. Tad varam šo sakarību pārrakstīt kā

$$\frac{XB}{XC} = \frac{XD}{XA}$$

Tā kā trijstūriem XBC un XDA ir kopīgs leņķis $\angle AXD$, tad $\triangle XBC \sim \triangle XDA$ pēc pazīmes *mala - leņķis - mala.* Tas nozīmē, ka $\angle XBC = \angle XDA$ kā līdzīgos trijstūros atbilstošie elementi. Līdz ar to ap četrstūrī $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.

Pieņemsim, ka izpildās sakarība $YA \cdot YC = YB \cdot YD$. Tad varam šo sakarību pārrakstīt kā

$$\frac{BY}{YA} = \frac{CY}{YD}$$

Tā kā $\angle BYA = \angle CYD$ kā krustleņķi, tad $\triangle BYA \sim \triangle CYD$ pēc pazīmes *leņķis-mala - leņķis.* Tas nozīmē, ka $\angle ABY = \angle YCD$, līdz ar to ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.

Piezīme. Abi iepriekšējie rezultāti strādā arī tad, ja tiek apskatīts pretējo malu BC un AD krustpunkts.

Pieskares īpašība. Dots trijstūris ABC, kura apvilktās riņķa līnijas pieskare punktā A krusto taisni BC punktā T. Tad izpildās sakarība $TA^2 = TB \cdot TC$.

Pierādījums. Tā kā TA ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare, tad $\angle TAB = \angle TCA$ kā pieskares leņķis. Tā kā trijstūriem TAB un TCA ir kopīgs leņķis ATC, tad $\triangle ATB \sim \triangle CTA$ pēc pazīmes *leņķis - leņķis.* Tādā gadījumā

$$\frac{AT}{TB} = \frac{CT}{TA} \implies TA^2 = TB \cdot TC$$

kā līdzīgos trijstūros atbilstošie elementi. Tas pierāda prasīto.

Pieskares pazīme. Dots trijstūris ABC. Caur punktu A vilkta taisne, kas krusto taisni BC punktā T. Ja izpildās sakarība $TA^2 = TB \cdot TC$, tad taisne TA ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare.

Pierādījums. Pārveidosim doto sakarību

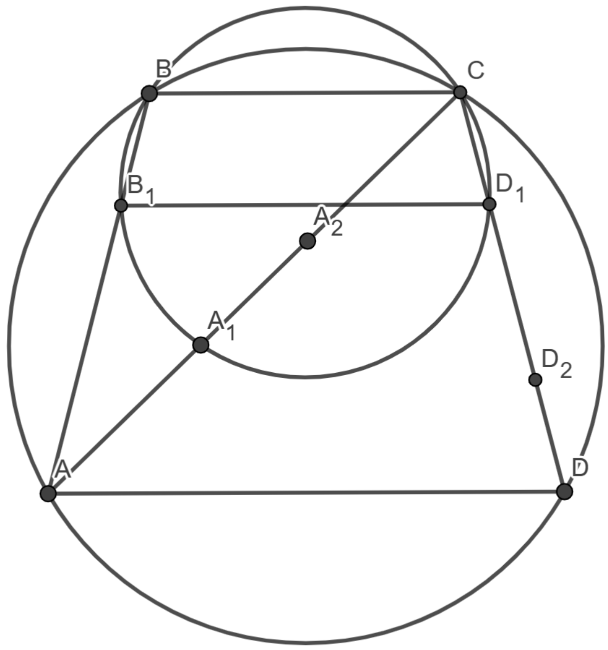
$$\frac{AT}{TB} = \frac{CT}{TA}$$

Tā kā trijstūriem TAB un TCA ir kopīgs leņķis ATC, tad $\triangle ATB \sim \triangle CTA$ pēc pazīmes *mala - leņķis-mala.* Tas nozīmē, ka $\angle TAB = \angle TCA$ kā līdzīgos trijstūros atbilstošie elementi. Pēc apgrieztās pieskares īpašības mēs secinām, ka TA ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare.

Piezīme. Izpildās arī analoģiska īpašība un pazīme, ja tiek apskatīta pieskare caur kādu citu trijstūra ABC virsotni.

2.1 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs. Dota riņķa līnijā ievilkta trapece $ABCD$, kuras pamati AD un BC. Patvaļīga riņķa līnija, kas iet caur punktiem B un C, krusto nogriežņus CA un CD attiecīgi punktos A_1 un D_1. Punkti A_2 un D_2 ir simetriski punkti attiecībā pret nogriežņu CA un CD viduspunktiem. Pierādīt, ka punkti A, D, A_2, D_2 atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Pierādījums. Pieņemsim, ka trijstūra BCD_1 apvilktā riņķa līnija krusto nogriezni AB punktā B_1. Ievērosim, ka $ABCD$ ir vienādsānu trapece, jo tā ir ievilkta riņķa līnijā. Ievērosim, ka tā kā ap četrstūri BB_1D_1C var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle BCD_1 = \angle AB_1D_1$. No otras puses, tā kā $ABCD$ ir vienādsānu trapece, tad $\angle ADD_1 = 180° - \angle BCD_1$. Tas nozīmē, ka $\angle AB_1D_1 + \angle ADD_1 = 180°$, līdz ar to ap četrstūri AB_1D_1D var apvilkt riņķa līniju.

No ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka

$$AB_1 \cdot AB = AA_1 \cdot AC$$

No simetrijas izriet, ka $AB = CD$, $AB_1 = DD_1$ un $BB_1 = CD_1$, līdz ar to

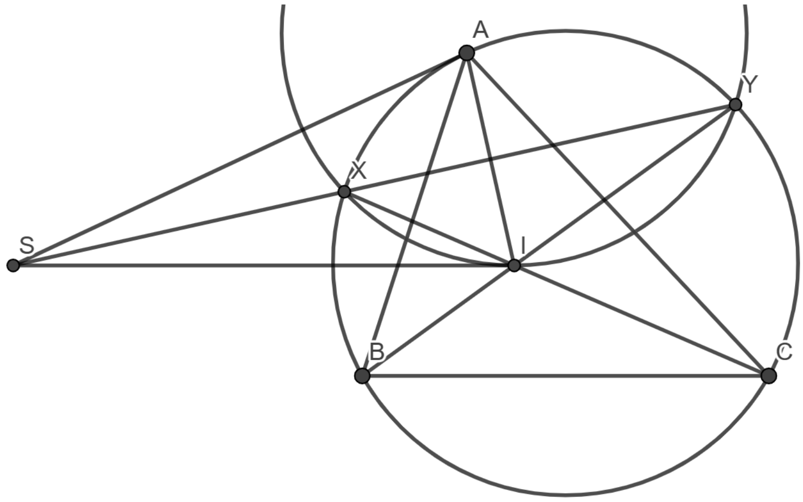
$$AA_1 \cdot AC = DD_1 \cdot DC$$

Atzīmēsim, ka $AA_1 = CA_2$ un $DD_1 = CD_2$, kas nozīmē, ka

$$\begin{aligned} AA_1 \cdot AC &= DD_1 \cdot DC \\ CA_2 \cdot CA &= CD_2 \cdot CD \end{aligned}$$

No ievilkta četrstūra pazīmes secinām, ka ap četrstūri AA_2D_2D var apvilkt riņķa līniju, kas pierāda prasīto.

2.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kura bisektrišu krustpunkts ir punkts I. Taisnes BI un CI krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktos X un Y. Pieskare trijstūra XIY apvilktajai riņķa līnijai punktā I krusto nogriezni XY punktā S. Pierādīt, ka SA ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare.



Pierādījums. No pieskares īpašības trijstūrim XIY izriet, ka $SI^2 = SX \cdot SY$. Ievērosim, ka no iepriekšējas nodarbības materiāla 2.2 sadaļas 4. piemēra izriet, ka $XY \perp AI$. Atzīmēsim, ka

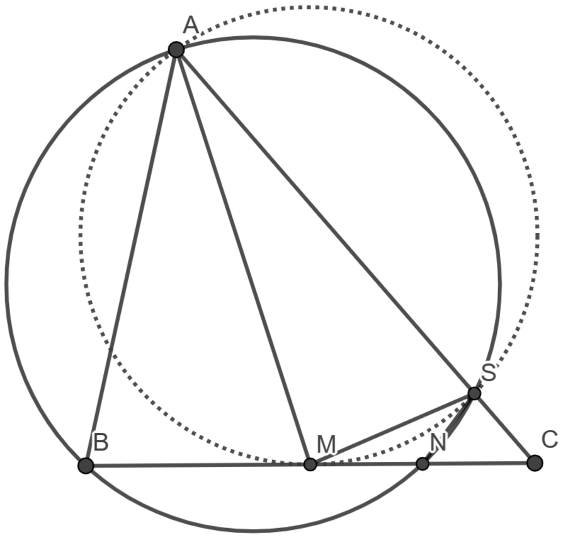
$$\angle YXC = \angle YBC = \angle ABY = \angle AXY,$$

kur mēs izmantojām to, ka BI ir leņķa ABC bisektrise, un leņķus, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Tas nozīmē, ka XY ir nogriežņa AI ir vidusperpendikuls, jo trijstūrī AXI taisne XY ir gan augstums, gan bisektrise. Līdz ar to $SA = SI$. Secinām, ka

$$SA^2 = SI^2 = SX \cdot SY$$

No pieskares pazīmes trijstūrim AXY secinām, ka SA ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare.

3.piemērs. Trijstūrī ABC punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu BC un CM viduspunkti. Trijstūra ABN apvilktā riņķa līnija krusto nogriezni AC punktā S. Pierādīt, ka $\angle BAM = \angle MSN$.



Pierādījums. Tā kā ap četrstūri $ABNS$ var apvilkt riņķa līniju, tad no ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka

$$CS \cdot CA = CB \cdot CN$$

Ievērosim, ka $CB = 2CM$ un $CN = \frac{1}{2}CM$, jo punkts M ir nogriežņa CB viduspunkts un punkts N ir nogriežņa CM viduspunkts. Līdz ar to

$$CS \cdot CA = CB \cdot CN = 2CM \cdot \frac{1}{2}CM = CM^2$$

No pieskares pazīmes izriet, ka CM ir trijstūra AMS apvilktās riņķa līnijas pieskare.

Tā kā CM ir trijstūra AMS pieskare, tad $\angle SMC = \angle MAC$. Aplūkosim trijstūrus MSC un AMC. No ārējā leņķa formulas izriet, ka

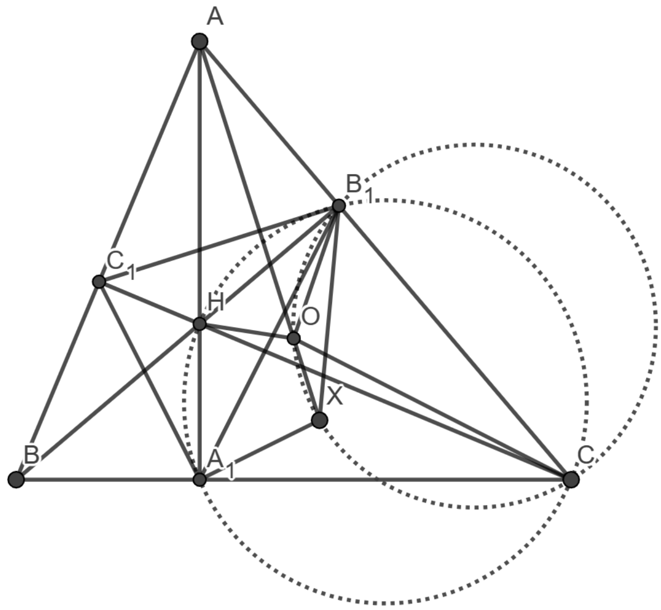
$$\angle MSA = \angle SMC + \angle C = \angle MAC + \angle C = \angle AMB$$

Apzīmēsim $\angle MSA = \angle AMB = \alpha$. Tā kā ap četrstūri $ABNS$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle ABM = \angle NSC = \alpha$. Līdz ar to

$$\angle MSN = 180° - \angle MSA - \angle NSC = 180° - \alpha - \beta = 180° - \angle ABM - \angle AMB = \angle BAM$$

Prasītais pierādīts.

4.piemērs. Šaurleņķu trijstūrī ABC ir novilkti augstumi AA_1, BB_1, CC_1, kuri krustojas punktā H. Punkts O ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centrs. Pierādīt, ka trijstūrim OHA_1 apvilktā riņķa līnija iet caur punktu, kas ir simetrisks punktam A attiecībā pret nogriezni B_1C_1.



Pierādījums. Ar X apzīmēsim punktam A simetrisko punktu attiecībā pret B_1C_1. Pierādīsim divus apgalvojumus.

1.apgalvojums. Punkti A, O, X atrodas uz vienas taisnes.

Pierādījums. Taisne AX ir perpendikulāra B_1C_1, jo punkts X ir simetrisks punktam A attiecībā pret taisni B_1C_1. Ievērosim, ka $\angle AOC = 2\angle ABC$ kā centra leņķis. Tas nozīmē, ka $\angle OAC = \angle OCA = 90° - \angle ABC$ kā leņķi pie pamata vienādsānu trijstūrī AOC, jo $OA = OC$ kā rādiusi. Atzīmēsim, ka $\angle BB_1C = \angle CC_1B = 90°$, līdz ar to ap četrstūri BB_1C_1C var apvilkt riņķa līniju. Tas nozīmē, ka $\angle ABC = \angle C_1B_1A$. Tā kā $\angle AOC = 90° - \angle ABC$ un $\angle C_1B_1A = \angle ABC$, tad $AO \perp B_1C_1$, kas nozīmē, ka punkti A, O, X atrodas uz vienas taisnes.

2.apgalvojums. Ap četrstūri B_1OXC var apvilkt riņķa līniju.

Pierādījums. No simetrijas izriet, ka $\angle OAB_1 = \angle OXB_1$, savukārt $\angle OAC = \angle OCB_1$ kā rādiusi. Tas nozīmē, ka $\angle OXB_1 = \angle OCB_1$, līdz ar to ap četrstūri B_1OXC var apvilkt riņķa līniju.

Tā kā ap četrstūri B_1OXC var apvilkt riņķa līniju, tad no ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka

$$AO \cdot AX = AB_1 \cdot AC$$

No otras puses, ievērosim, ka ap četrstūri HA_1CB_1 var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle HA_1C = \angle HB_1C = 90°$. No ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka

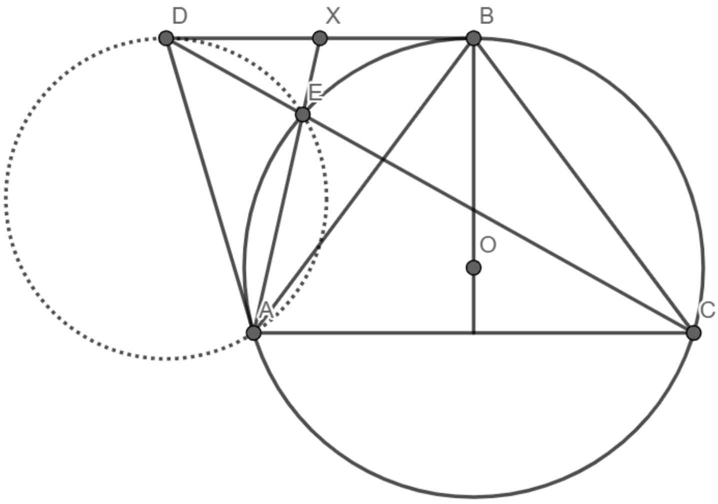
$$AH \cdot AA_1 = AB_1 \cdot AC$$

No iepriekšējām 2 sakarībām izriet, ka

$$AH \cdot AA_1 = AO \cdot AX$$

No ievilkta četrstūra pazīmes izriet, ka ap četrstūri HA_1OX var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

5.piemērs. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kurā $AB = BC$. Ar Γ apzīmēsim ABC apvilkto riņķa līniju. Pieņemsim, ka tās pieskares punktos A un B krustojas punktā D. Pieņemsim, ka DC krusto Γ punktā E. Pierādīt, ka AE, krustojot BD, dala to uz pusēm.



Atrisinājums. Ar punktu X apzīmēsim taišņu AE un BD krustpunktu.

Apgalvojums: DX ir trijstūra DEA apvilktās riņķa līnijas pieskare.
Pierādījums: Ar O apzīmēsim trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centru. Ievērosim, ka $BO \perp BD$ un $BO \perp AC$, jo trijstūris ABC ir vienādsānu. Tas nozīmē, ka $BD \parallel AC$. Līdz ar to:

$$\angle ACD = \angle CDB = \angle EDX$$

Tā kā AD ir trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas pieskare, tad $\angle DAE = \angle ACD$. Secinām, ka:

$$\angle DAE = \angle ACD = \angle CDB = \angle EDX$$

Esam ieguvuši, ka $\angle DAE = \angle EDX$, kas pierāda to, ka DX ir trijstūra ADE apvilktās riņķa līnijas pieskare.

Tagad no pieskares īpašības trijstūru ABC un AED apvilktām riņķa līnijām iegūstam, ka:

$$XB^2 = XE \cdot XA$$

$$XD^2 = XE \cdot XA$$

Secinām, ka $XD^2 = XE \cdot XA = XB^2$, kas nozīmē to, ka $XD = XB$, kas arī bija jāpierāda.

3 Punkta pakāpe

Vispirms definēsim, kas ir punkta pakāpe. Pieņemsim, ka ir dots patvaļīgs punkts P un riņķa līnija ω. Novilksim patvaļīgu taisni, kas satur punktu P un krusto riņķa līniju ω punktos X un Y.

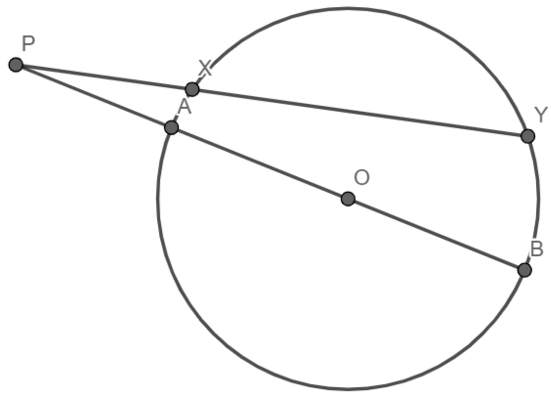
Definīcija. Par punkta P pakāpi attiecībā pret riņķa līniju ω sauc reizinājumu $PX \cdot PY$.

Piezīme. Punkti X un Y var sakrist – tādā gadījumā PX ir pieskare pret riņķa līniju ω un punkta pakāpe ir lielums PX^2.

Ērtībai punkta P pakāpi attiecībā pret riņķa līniju ω apzīmēsim ar $Pow_\omega(P)$. Tātad $Pow_\omega(P) = PX \cdot PY$.

Teorēma. Pieņemsim, ka riņķa līnijas ω centrs ir O un rādiusa garums r. Tad

$$Pow_\omega(P) = |OP^2 - r^2|.$$

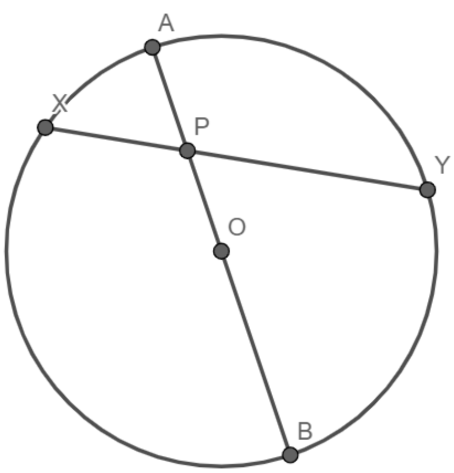


Pierādījums. Apskatīsim vispirms gadījumu, kad punkts P atrodas ārpus riņķa līnijas ω. Novilksim taisni, kas satur P un O, un tās krustpunktus ar ω apzīmēsim ar A un B. No ievilkta četrstūra īpašības (citur literatūrā sauc par sekanšu īpašību) iegūstam, ka:

$$PX \cdot PY = PA \cdot PB$$

Ievērosim, ka $PA = OP - r$ un $PB = OP + r$. Secinām, ka:

$$Pow_\omega(P) = PX \cdot PY = PA \cdot PB = (OP - r)(OP + r) = OP^2 - r^2.$$



Tagad apskatīsim gadījumu, kad punkts P atrodas riņķa līnijas ω iekšpusē. Novilksim taisni, kas satur P un O, un tās krustpunktus ar ω apzīmēsim ar A un B. No ievilkta četrstūra īpašības (citur literatūrā sauc par hordu īpašību) iegūstam, ka

$$PX \cdot PY = PA \cdot PB$$

Ievērosim, ka $PA = r - OP$ un $PB = r + OP$. Secinām, ka:

$$Pow_\omega(P) = PX \cdot PY = PA \cdot PB = (r - OP)(r + OP) = r^2 - OP^2$$

Atceroties iepriekšējā nodaļā iegūtos rezultātus, ir vērts atzīmēt, ka, ja punkts P atrodas ārpus riņķa līnijas ω, tad $Pow_\omega(P)$ ir vienāda ar pieskares garuma kvadrātu, kas ir vilkta no punkta P pret riņķa līniju ω.

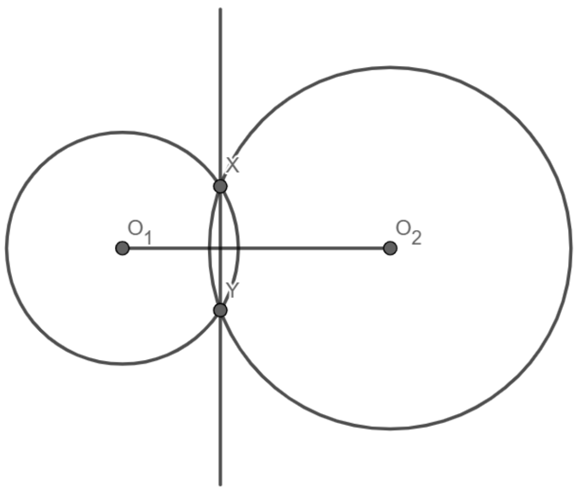
4 Radikālās asis

Vispirms definēsim, kas ir radikālā ass. Pieņemsim, ka ir dotas divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2.

Definīcija. Par riņķa līniju ω_1 un ω_2 radikālo asi sauc tādu punktu P kopu, kurai $Pow_{\omega_1}(P) = Pow_{\omega_2}(P)$

Pieņemsim, ka O_1, O_2 ir attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centri.

Teorēma. Riņķa līniju ω_1 un ω_2 radikālā ass ir taisne, kas ir perpendikulāra O_1O_2.



Pierādījums. Izmantosim Dekarta koordinātas. Apzīmēsim $O_1 = (a, 0)$ un $O_2 = (b, 0)$, kā arī izvēlēsimies punktu $P = (x, y)$ uz ω_1 un ω_2 radikālās ass. No Pitagora teorēmas $|PO_1|^2 = (x-a)^2 + y^2$ un $|PO_2|^2 = (x-b)^2 + y^2$. No punkta pakāpes definīcijas $Pow_{\omega_1}(P) = |PO_1^2 - r_1^2| = (x-a)^2 + y^2 - r_1^2$ un $Pow_{\omega_2}(P) = |PO_2^2 - r_2^2| = (x-b)^2 + y^2 - r_2^2$, kur r_1 un r_2 ir attiecīgi ω_1 un ω_2 rādiusi. Tā kā P atrodas uz radikālās ass, tad

$$Pow_{\omega_1}(P) = Pow_{\omega_2}(P) \implies (x-a)^2 + y^2 - r_1^2 = (x-b)^2 + y^2 - r_2^2 \implies x = \frac{a+b}{2} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(a-b)}$$

Tā kā visi skaitļi a, b, r_1, r_2 ir konstanti, tad varam secināt, ka visiem punktiem uz radikālās ass ir viena un tā pati x koordināta. Tātad šie punkti atrodas uz taisnes, kura ir perpendikulāra taisnei O_1O_2.

No teorēmas varam secināt šādas svarīgas lietas:

- Ja punkts P atrodas uz riņķa līniju ω_1 un ω_2 radikālās ass, tad pieskaru garumi, kas ir vilkti no punkta P pret šīm abām riņķa līnijām, ir vienāda garuma. Tas ir tāpēc, ka $Pow_{\omega_1}(P) = PA^2 = Pow_{\omega_2}(P) = PB^2$, kas nozīmē, ka $PA = PB$, kur PA un PB ir pieskares attiecīgi pret ω_1 un ω_2.

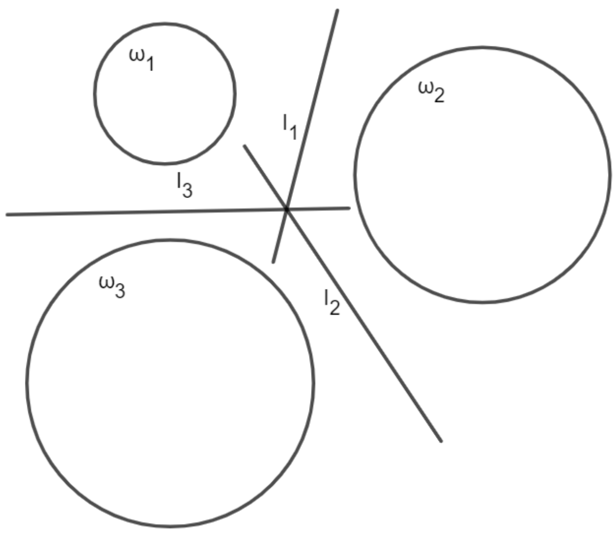
- Ja divas riņķa līnijas ω_1 ar centru punktā O_1 un rādiusu r_1 un riņķa līnija ω_2 ar centru punktā O_2 un rādiusu r_2 krustojas punktos A un B, tad taisne, kas vilkta caur punktiem A un B, ir radikālā ass. Tas ir tāpēc, ka

$$Pow_{\omega_1}(A) = |O_1A^2 - r_1^2| = 0 = |O_2A^2 - r_2^2| = Pow_{\omega_2}(A)$$

  Analoģiski varam iegūt, ka $Pow_{\omega_1}(B) = Pow_{\omega_2}(B)$. Secinām, ka punkti A un B atrodas uz radikālās ass, kas nozīmē, ka taisne AB ir radikālā ass.

- Ja divas riņķa līnijas pieskaras (iekšēji vai ārēji), tad šo riņķa līniju kopīgā pieskare, kas iet caur pieskaršanās punktu, ir to radikālā ass.

Teorēma. Pieņemsim, ka ir dotas trīs riņķa līnijas - ω_1, ω_2, ω_3. Ar l_1 apzīmēsim ω_1 un ω_2 radikālo asi, ar l_2 apzīmēsim ω_2 un ω_3 radikālo asi, ar l_3 apzīmēsim ω_1 un ω_3. Tad l_1, l_2, l_3 krustojas vienā punktā vai ir paralēlas cita ar citu.

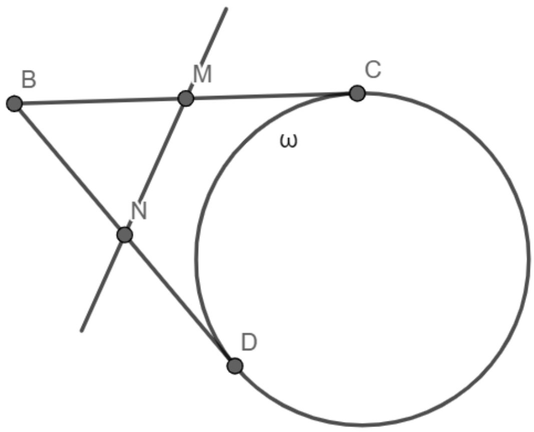


Pierādījums. Apzīmēsim l_1 un l_2 krustpunktu ar X. Tā kā X atrodas uz radikālās ass l_1, tad $Pow_{\omega_1}(X) = Pow_{\omega_2}(X)$. Analoģiski, X atrodas uz radikālās ass l_2, tāpēc $Pow_{\omega_2}(X) = Pow_{\omega_3}(X)$. Iegūstam, ka $Pow_{\omega_1}(X) = Pow_{\omega_3}(X)$, taču tad no radikālās ass definīcijas X atrodas arī uz l_3, kas pierāda, ka dotās trīs radikālās asis krustojas vienā punktā.

Gadījumā, ja l_1 un l_2 ir paralēlas, tad l_3 arī jābūt paralēlai pārējām divām radikālajām asīm. Pretējā gadījumā caur divu radikālo asu krustpunktu būtu jāiet trešajai, kas būtu pretruna paralelitātei.

Reizēm uzdevumos ir vērts pielietot īpašu triku - uztvert kādu punktu kā riņķa līniju ar bezgalīgi mazu rādiusu ($R \to 0$). Tas ļauj izmantot radikālo asu īpašības, jo riņķa līnijai ar rādiusu 0, tas ir - punktam, radikālo asu īpašības saglabājas.

(*)Lemma. Dota riņķa līnija ω. No punkta B pret ω novilktas pieskares BD, BC. Taisne, kas satur BC, BD viduspunktus, ir ω un B radikālā ass (B - riņķa līnija ar $R \to 0$).



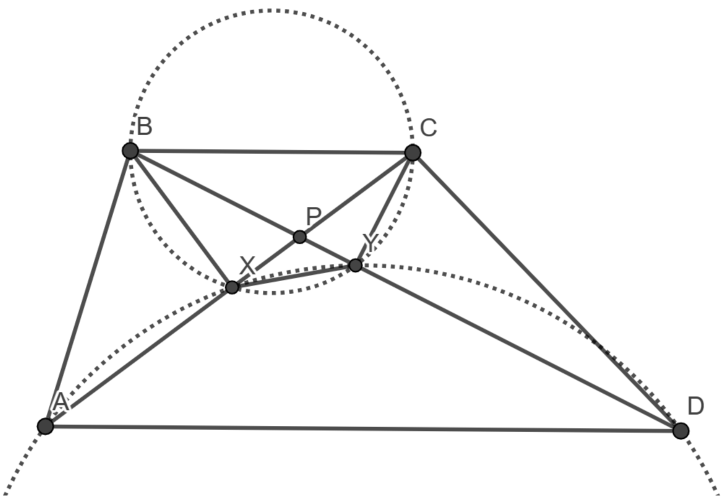
Pierādījums. Tā kā divu riņķa līniju kopīgo pieskaru viduspunktiem punkta pakāpe pret abām riņķa līnijām ir vienāda, caur tiem vilktā taisne ir radikālā ass. Vienai no riņķa līnijām bezgalīgi samazinot rādiusu ($R \to 0$), šī īpašība nemainās.

5 Uzdevumu risināšanas piemēri

Apskatīsim vairākus piemērus, kas palīdzēs izprast, cik noderīga var būt punkta pakāpe un radikālās asis uzdevumu risināšanā.

1.piemērs. Trapeces $ABCD$ ($AD \parallel BC$) diagonāles krustojas punktā P. Pierādīt, ka pieskares, kas vilktas no punkta P pret riņķa līnijām, kuru diametri ir attiecīgi AB un CD, ir vienāda garuma.

Ieskats uzdevumā. Uzdevumā prasītais ir ekvivalents tam, ka ir jāpierāda, ka punktam P ir vienāda pakāpe attiecībā pret riņķa līnijām ar diametru AB un CD. Lai ērtāk aprēķinātu punkta P pakāpi, ir vērsts ieviest punktus X un Y, kas ir attiecīgo riņķa līniju krustpunkti ar taisnēm PA un PD.



Pierādījums. Pieņemsim, ka riņķa līnija ar diametru AB krusto taisni PA punktā X, savukārt riņķa līnija ar diametru CD krusto taisni PD punktā Y. Ievērosim, ka $\angle BXP = \angle CYP = 90°$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $BXYC$ var apvilkt riņķa līniju.

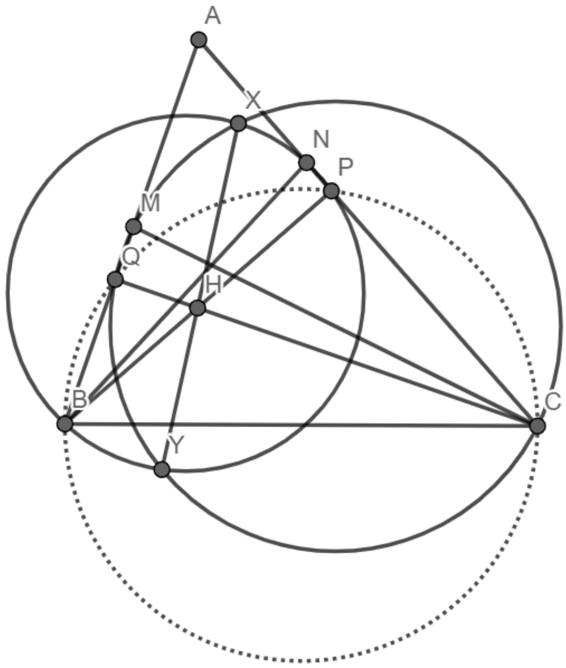
Tā kā ap četrstūri $BXYC$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle BCX = \angle BYX$ kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Tā kā $BC \parallel AD$, tad $\angle BCX = \angle XAD$. Secinām, ka $\angle XAD = \angle BYX$, līdz ar to ap četrstūri $AXYD$ var apvilkt riņķa līniju. No ievilkta četrstūra īpašības izriet, ka

$$PX \cdot PA = PY \cdot PD$$

Tas nozīmē, ka punkta P pakāpe attiecībā pret riņķa līniju ar diametru AB ir tādi pati kā punkta P pakāpe attiecībā pret riņķa līniju ar diametru CD. Tas nozīmē, ka punkts P atrodas uz šo divu riņķa līniju radikālās ass, līdz ar to pieskares, kas vilktas no punkta P pret abām riņķa līnijām, ir vienādas.

2.piemērs. Dots trijstūris ABC. Uz malām AB, AC ir atlikti patvaļīgi punkti M un N. Ar X un Y apzīmēsim riņķu līniju krustpunktus, kuru diametri CM un BN. Pierādīt, ka trijstūra augstumu krustpunkts H pieder taisnei XY.

Ieskats uzdevumā. Uzdevumā prasītais ir ekvivalents ar to, ka H pieder divu uzdevumā minēto riņķa līniju radikālai asij. Mums atliek pierādīt, ka punkta H pakāpe attiecībā pret abām dotajām riņķa līnijām ir vienāda.



Atrisinājums. Augstumu pamatus no punktiem B un C pret malām AC un AB apzīmēsim attiecīgi ar P un Q. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka P pieder riņķa līnijai ar diametru BN un ka Q pieder riņķa līnijai ar diametru ar CM. Ievērosim, ka:

$$\angle BQC = \angle BPC = 90^\circ$$

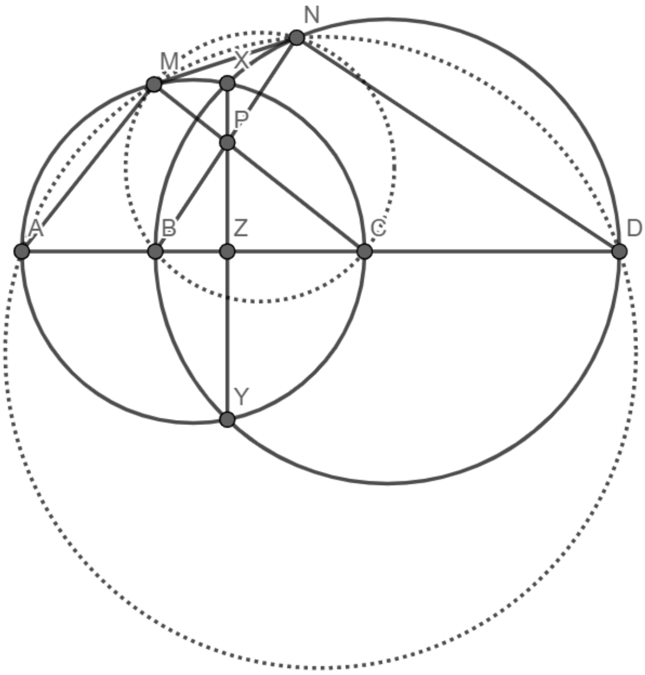
Secinām, ka ap četrstūri $BQPC$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā H ir trijstūra augstumu krustpunkts, tad $BP \cap CQ = H$. No hordu īpašībām iegūstam, ka:

$$HB \cdot HP = CH \cdot HQ$$

Tas nozīmē, ka punkta H pakāpe attiecībā pret riņķa līniju caur punktiem Q, C un riņķa līniju caur punktiem P, B ir vienāda. Secinām, ka H pieder riņķa līnijas ar diametru BN un riņķa līnijas ar diametru CM radikālajai asij, kas ir taisne XY, kas arī bija jāpierāda.

3.piemērs. Doti četri dažādi punkti A, B, C, D, kas tieši tādā secībā atrodas uz vienas taisnes. Riņķa līnijas ar diametriem AC un BD krustojas punktos X un Y. Taisne XY krusto BC punktā Z. Uz taisnes XY izvēlēts no Z atšķirīgs punkts P. Taisne CP krusto riņķa līniju ar diametru AC punktos C un M, bet taisne BP krusto riņķa līniju ar diametru BD punktos B un N. Pierādīt, ka taisnes AM, DN, XY krustojas vienā punktā.

Ieskats uzdevumā. Uzreiz redzams, ka XY ir radikālā ass. Ja AM un DN arī būtu radikālās asis, tad uzdevums būtu atrisināts no radikālo asu teorēmas. Zīmējumā diezgan viegli var ieraudzīt, ka pietiek pierādīt, ka ap četrstūri $AMND$ var apvilkt riņķa līniju.



Atrisinājums. Sākotnēji pierādīsim šādu apgalvojumu:

1.apgalvojums: $MNCB$ var apvilkt riņķa līniju.

Pierādījums: Tā kā P pieder doto riņķa līniju radikālajai asij XY,

$$MP \cdot PC = NP \cdot PB,$$

tāpēc $MNCB$ var apvilkt riņķa līniju.

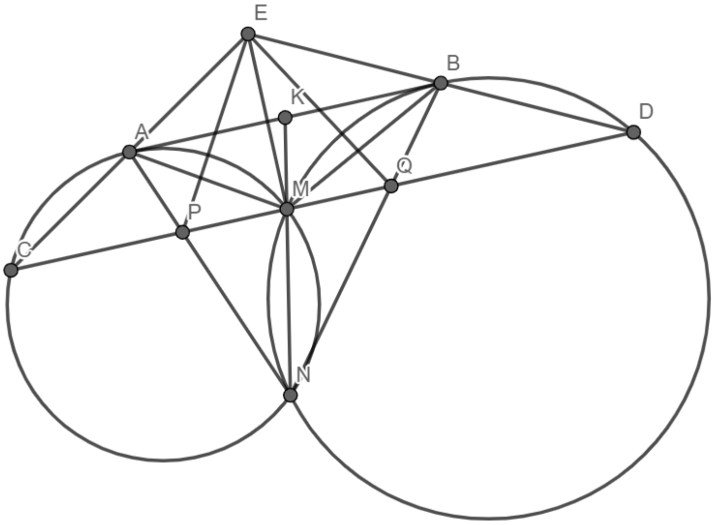
2.apgalvojums: $AMND$ var apvilkt riņķa līniju.

Pierādījums: No 1.apgalvojuma secinām $\angle MNB = \angle MCB = 90° - \angle MAC$. Tā kā $\angle MND = 90° + \angle MNB = 180° - \angle MAC$, iegūstam, ka $AMND$ var apvilkt riņķa līniju.

Aplūkojot $\odot(AMND)$, r.l ar diametru AC un r.l. ar diametru BD, taisnes AM, DN, XY ir radikālās asis, kas krustojas vienā punktā. Kā arī jāņem vērā, ka nosacījums $P \neq Z$ nodrošina šo taišņu krustošanos jeb AM nav paralēla ar ND.

4.piemērs. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas punktos M un N. Taisne AB pieskaras ω_1 un ω_2 attiecīgi punktos A un B tā, ka taisnei AB no punktiem M un N tuvākais ir M. Caur punktu M novilkta taisne $CD \parallel AB$, kur C atrodas uz ω_1 un D uz ω_2. Taisnes AC un BD krustojas punktā E; taisnes AN un CD krustojas P; taisnes BN un CD krustojas Q. Pierādīt, ka $EP = EQ$.

Ieskats uzdevumā. Viegli redzams, ka MN ir ω_1 un ω_2 radikālā ass, tādēļ tā krustos kopīgo pieskari AB viduspunktā. Tā kā $PQ \parallel AB$, M ir PQ viduspunkts. Lai pierādītu prasīto, pietiktu $\triangle PEQ$ parādīt, ka $EM \perp PQ$ jeb $EM \perp AB$. To varētu iegūt no trijstūriem $\triangle AMB$ un $\triangle AEB$.



Atrisinājums. Apzīmējam MN un AB krustpunktu ar K.

Tā kā MN ir ω_1 un ω_2 radikālā ass, tā krusto kopīgo pieskari AB viduspunktā K. No $PQ \parallel AB$ secinām, ka $\triangle PQN \sim \triangle ABN$, tādēļ M ir PQ viduspunkts kā attiecīgais elements līdzīgos trijstūros $\implies PM = QM$.

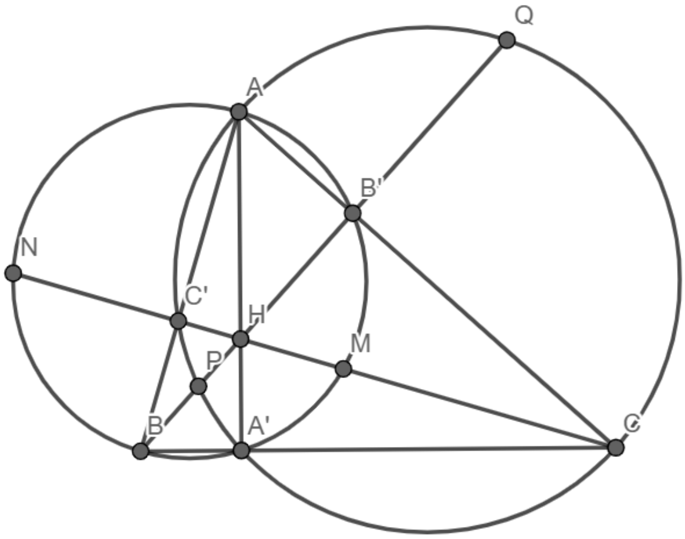
Apgalvojums: $\triangle AMB = \triangle AEB$.

Pierādījums: No $AB \parallel CD$ un AB - pieskare iegūstam $\angle BAE = \angle MCA = \angle MAB$ un $\angle ABE = \angle MDB = \angle MBA$. Tā kā AB - kopīga mala, secinām, ka $\triangle AMB = \triangle AEB$.

Tas nozīmē, ka $AMBE$ ir romboīds un $ME \perp AB \implies ME \perp PQ$. Aplūkojot $\triangle EPQ$, mediāna ME ir arī augstums, tādēļ $EP = EQ$.

5.piemērs. Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Riņķa līnija ar diametru AB krusto augstumu CC' un tā pagarinājumu punktos M un N, bet riņķa līnija ar diametru AC krusto augstumu BB' un tā pagarinājumu punktos P un Q. Pierādīt, ka punkti M, N, P, Q atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Ieskats uzdevumā. No uzdevumā dotā ir grūti spriest par leņķiem, kas rosina domāt par nogriežņu garumu izmantošanu. Varam ievērot, ja ap četrstūri $MNPQ$ varētu apvilkt riņķa līniju, tad izpildītos punkta pakāpes vienādība $HP \cdot HQ = HM \cdot HN$, kur H ir $\triangle ABC$ augstumu krustpunkts. Šīs izteiksmes arī izrādās ir punkta H pakāpe pret dotajām riņķa līnijām, tādēļ būtu jāpierāda, ka H pieder to radikālajai asij. Vai riņķa līniju otrs krustpunkts ir kāds īpašs punkts trijstūrī ABC?



Atrisinājums. No A novelkam augstumu ar pamatu A', ar H apzīmējam $\triangle ABC$ ortocentru.

Apgalvojums: AA' ir ap četrstūriem $AMBN$ un $APCQ$ apvilkto riņķa līniju radikālā ass.

Pierādījums: Ievērojam, ka $\angle AA'C = 90°$. Ņemot vērā, ka AC ir ap četrstūri $APCQ$ apvilktās riņķa līnijas diametrs, secinām, ka A' pieder ap četrstūri $APCQ$ apvilktai riņķa līnijai. Analogi iegūstam, ka A' pieder ap četrstūri $AMBN$ apvilktai riņķa līnijai, kas nozīmē, ka AA' ir šo divu riņķa līnijas radikālā ass.

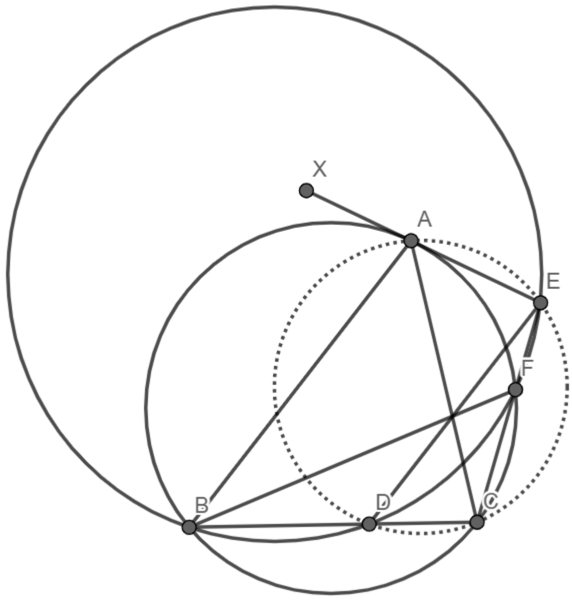
Tā kā H atrodas uz AA', no punkta pakāpes

$$HP \cdot HQ = HM \cdot HN,$$

tādēļ $MNCP$ var apvilkt riņķa līniju.

6.piemērs. Dots trijstūris ABC. Ar Γ apzīmēsim šī trijstūra apvilkto riņķa līniju. Uz malas BC ir izvēlēts patvaļīgs punkts D. Ar l apzīmēsim taisni, kas satur punktu D un ir paralēla ar AB. Pieskare riņķa līnijai Γ punktā A krusto l punktā E. Savukārt CE krusto Γ punktā F. Zināms, ka ap četrstūri $BDFE$ var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka taisnes AC, BF, DE krustojas vienā punktā.

Ieskats uzdevumā. Ievērosim, ka efektīvs veids, kā pierādīt, ka 3 taisnes krustojas vienā punktā, ir izmantot radikālo asu teorēmu. Viegli redzēt, ka mums ir pietiekami pierādīt, ka ap četrstūri $ADCE$ var apvilkt riņķa līniju.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīgs punkts uz A pieskares ar īpašību, ka A atrodas starp punktiem X un E.

Apgalvojums: Ap četrstūri $ADCE$ var apvilkt riņķa līniju.

Pierādījums: Ievērosim, ka:

$$\angle AED = \angle XAB = \angle ACB = \angle ACD,$$

kur tika izmantots, ka $AB \parallel ED$, un pieskares–hordas leņķis.

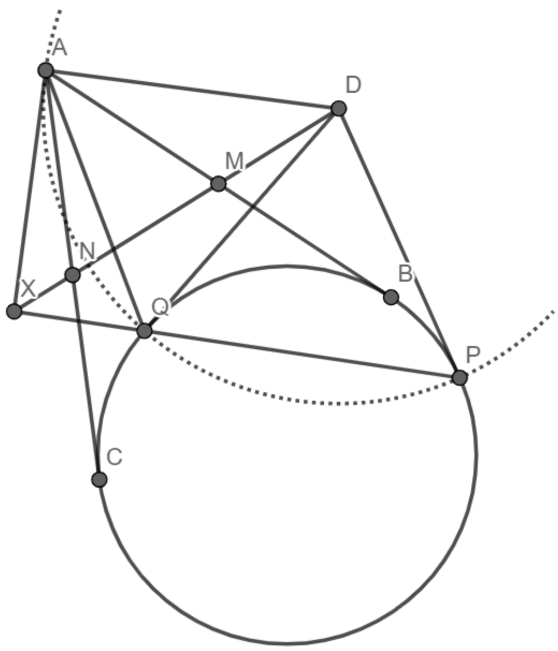
Pielietojot radikālo asu teorēmu ap četrstūriem $BDFE$, $ADCE$, $ABCF$ apvilktajām riņķa līnijām, mēs iegūstam, ka taisnes DE, CA, BF krustojas vienā punktā, kas arī bija jāpierāda.

7.piemērs. Dota riņķa līnija ω, kuras ārpusē izvēlēts punkts A. No A pret ω novilktas pieskares AB, AC. Nogriežņu AB, AC viduspunkti ir attiecīgi M, N. Uz taisnes MN izvēlēts patvaļīgs punkts D, no kura pret ω novilktas pieskares DP, DQ. PQ un MN krustpunkts ir X. Pierādīt, ka $\angle DAX = 90°$.

Ieskats uzdevumā. Ievērojam, ka uzdevumā ir no ω ārēja punkta vilktas pieskares, kā arī ir iesaistīti to viduspunkti. Tas rosina domāt, ka ir vērts izmantot jau iepriekš aplūkoto lemmu par punktu kā riņķa līniju. To izmantojot, varam iegūt, ka

$$DP = DQ = DA.$$

Tā kā X pieder radikālajai asij MN, ir vērts ieviest vēl vienu riņķa līniju ω_1 ar rādiusu DA, kas gan ļauj izmantot punkta pakāpi, gan arī parāda skaidru risinājuma virzienu - atliek pierādīt, ka XA ir ω_1 pieskare.



Atrisinājums. Uztversim punktu A kā riņķa līniju ar bezgalīgi mazu rādiusu. No punkta pakāpes $BM^2 = MA^2$ un $CN^2 = NA^2$ secinām, ka MN ir ω un $\odot(A)$ radikālā ass. Tādēļ:

$$DA^2 = DP^2 = DQ^2 \implies DA = DP = DQ.$$

Novelkam riņķa līniju ω_1 ar centru D un rādiusu DA. Acīmredzami ω_1 pieder arī P un Q. Tā kā $X \in MN$, kas ir radikālā ass,

$$Pow_\omega(X) = XP \cdot XQ = XA^2 = Pow_{\odot A}(X)$$

Aplūkojot šo sakarību attiecībā pret ω_1, no pieskares-sekantes īpašības secinām, ka XA ir ω_1 pieskare. Tā kā pieskare ir perpendikulāra rādiusam, $\angle DAX = 90°$, kas bija jāpierāda.

8.piemērs. Dots trijstūris $\triangle ABC$. Tajā ievilktā riņķa līnija ω ar centru I pieskaras malām AB, BC, CA attiecīgi punktos C_0, A_0, B_0. Taisnes BI un A_0C_0 krustojas punktā K.

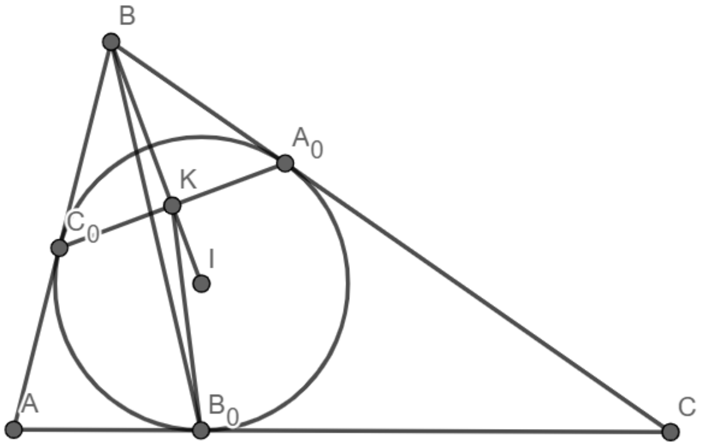
a) Pierādīt, ka $\triangle BKB_0$ apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz taisnes AC.

b) Caur punktu B_0 novelkam nogrieznim BB_0 perpendikulāru taisni, kura krusto taisni A_0C_0 punktā B_1. Pierādīt, ka nogriežņa BB_1 viduspunkts atrodas uz taisnes AC.

Ieskats uzdevumā. Sākotnēji aplūkojot uzdevumā doto konfigurāciju, nav skaidrs, kā iesaistīt prasīto apvilktās riņķa līnijas centru un taisni AC. Tomēr ievērojam, ka trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas malu vidusperpendikulu krustpunktā. Ja mēs parādītu, ka BK, KB_0, BB_0 vidusperpendikuli un taisne AC krustojas vienā punktā, tad a) prasītais būtu pierādīts.

Viens no veidiem, kā pierādīt taišņu krustošanos vienā punktā, ir izmantot radikālo asu teorēmu. Diemžēl uzdevumā ir dota tikai 1 riņķa līnija, tādēļ nāksies ieviest vēl papildus divas. Ievērojam, ka AC ir ω pieskare - lai tā būtu ω un vēl kādas riņķa līnijas radikālā ass, ω un jaunajai r.l. jāpieskaras punktā B_0. Varam pamanīt, ka uzdevuma kontekstā visizdevīgāk kā jauno riņķa līniju ir izmantot pašu punktu B_0.

Ievērojot faktu, ka BB_0 vidusperpendikuls ir arī $\odot(B)$ un $\odot(B_0)$ radikālā ass, kā arī izmantojot teorijas daļā minēto lemmu punktam B un ω, a) daļa būtu gandrīz pierādīta. Vai A_0C_0B viduslīnija ir BK vidusperpendikuls?



Atrisinājums. a) Uztversim punktus B, B_0 kā riņķa līnijas ar bezgalīgi mazu rādiusu. Tad ω un $\odot(B_0)$ radikālā ass ir AC, $\odot(B)$ un $\odot(B_0)$ radikālā ass ir BB_0 vidusperpendikuls. Ievērojam, ka $\odot(B)$ un ω radikālā ass ir taisne t caur A_0B un C_0B viduspunktiem, kas ir vienādsānu trijstūra $\triangle A_0BC_0$ ($A_0B = C_0B$ kā pieskares ievilktajai riņķa līnijai) viduslīnija. Pēc radikālo asu teorēmas trīs radikālās asis krustojas vienā punktā, kas nozīmē, ka t un BB_0 vidusperpendikuls krustojas uz taisnes AC.

Tā kā BK ir $\angle A_0BC_0$ bisektrise, BK ir arī augstums, tādēļ $BK \perp A_0C_0 \implies t \perp BK$. Tā kā t ir viduslīnija, tā dala BK uz pusēm, kas nozīmē, ka t ir BK vidusperpendikuls.

Apvienojot iepriekš iegūtos faktus, secinām, ka BK un BB_0 vidusperpendikuli krustojas uz AC, kas nozīmē, ka $\triangle BKB_0$ apvilktās r.l. centrs atrodas uz AC.

b) Ievērojam, ka $\angle BKB_1 = \angle BB_0B_1 = 90°$, kas nozīmē, ka $B_1 \in \odot(BKB_0)$ un BB_1 ir diametrs. a) daļā pierādījām, ka $\triangle BKB_0$ apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz AC. Tā kā taisnleņķa trijstūra $\triangle BKB_1$ apvilktās r.l. centrs atrodas hipotenūzas BB_1 viduspunktā, varam secināt, ka BB_1 viduspunkts atrodas uz taisnes AC.

Noslēgumā aplūkosim šķietami sarežģītu uzdevumu, kuru, kā izrādās, iespējams atrisināt ar samērā vienkāršām metodēm un jau apgūto teoriju.

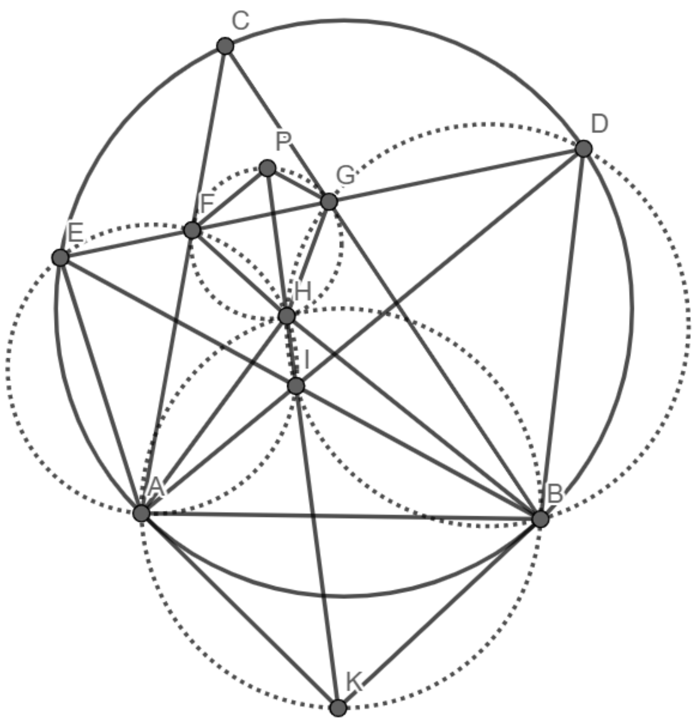
9.piemērs. Dots trijstūris $\triangle ABC$, kura ievilktās riņķa līnijas centrs ir I un ω ir $\triangle ABC$ apvilktā riņķa līnija. Ar D un E apzīmēsim attiecīgi AI un BI krustpunktus ar ω. Pieņemsim, ka DE krusto AC un BC attiecīgi punktos F, G. Ar P apzīmēsim taisnes, kas satur punktu F un ir paralēla ar AD, un taisnes, kas satur punktu G un ir paralēla BE, krustpunktu. Pieņemsim, ka pieskares ω punktos A un B krustojas punktā K. Pierādīt, ka taisnes AE, BD, KP krustojas vienā punktā vai arī ir paralēlas.

Ieskats uzdevumā. Uzdevumā pierādāmais apgalvojums ļoti atgādina radikālo asu teorēmu 3 riņķa līnijām, ieskaitot paralelitātes iespējamo gadījumu. Ja mēs ieviestu papildus riņķa līnijas $\odot(BID)$ un $\odot(AIE)$, tad uzdevumā prasītais gandrīz sekotu no mums zināmās teorijas.

Tomēr tikai gandrīz. Apzīmējot $H = \odot(BID) \cap \odot(AIE), H \neq I$, mēs redzam, ka uzdevumā prasīto izpilda taisnes AE, BD un HI, nevis KP. Taču uzzīmējot samērā precīzu zīmējumu, varam minēt, ka taisnēm KP un HI būtu jābūt sakrītošām. Tas rosina pierādīt, ka K, P, H, I atrodas uz vienas taisnes.

Tā kā uzdevumā nav informācijas par nogriežņu garumiem, visticamāk, šoreiz nāksies izmantot leņķus, jo ir daudz riņķa līniju un paralēlu taišņu, ar ko strādāt. Veicot leņķu izpēti, varam pamanīt, ka CG un CF ir $\odot(PFG)$ pieskares. Taču ar to vēl ir par maz, lai ko pateiktu par I, H, P novietojumu.

Tā kā punktos F un G satiekas daudzas taisnes, būtu nepieciešams tos iesaistīt. Vai nu atkal meklējot vienādus leņķus, vai arī minot no zīmējuma, varam pamanīt, ka F būtu jāatrodas uz $\odot(AIE)$ un G uz $\odot(BID)$. Tas jau būtu pietiekami, lai iegūtu, ka P pieder HI. Tālāk uzdevumā atliek atrast vēl kādu riņķa līniju un ar mērķtiecīgu leņķu izteikšanu iegūt informāciju par K novietojumu.



Atrisinājums. Sākotnēji pierādīsim šādu apgalvojumu:

1.apgalvojums: $\odot(BID)$ un $\odot(AIE)$ radikālā ass ir taisne PI.

Pierādījums: Ievērosim, ka

$$\angle PGC = \angle EBC = \angle EBA = \angle EDA = \angle PFG.$$

No tā varam secināt, ka CG ir $\odot(PFG)$ pieskare. Līdzīgi iegūstam, ka arī CF ir $\odot(PFG)$ pieskare.

Tālāk varam iegūt, ka

$$\angle BGD = \angle CGF = 180^\circ - \angle FPG = 180^\circ - \angle AIB = \angle BID,$$

tādēļ $G \in \odot(BID)$. Līdzīgā veidā secinām, ka $F \in \odot(AIE)$. Definējam punktu $H = \odot(BID) \cap \odot(AIE), H \neq I$. Ievērojam, ka

$$\angle GHF = 360^\circ - (\angle IHG + \angle IHF) = 360^\circ - (180^\circ - \angle CAI + 180^\circ - \angle CBI) =$$

$$= 90^\circ - \angle ACI = 180^\circ - \angle AIB = 180^\circ - \angle FPG,$$

tādēļ $H \in \odot(FPG)$. No tā varam iegūt $\angle PHG = \angle PFG = \angle CGP = \angle IBG$, kas nozīmē, ka P, H, I atrodas uz vienas taisnes - $\odot(AIE)$ un $\odot(BID)$ radikālās ass.

2.apgalvojums: H pieder $\odot(AKB)$.
Pierādījums: Ievērojam, ka

$$\angle AHB = 360^\circ - (\angle AHF + \angle BHG + \angle FHG) = \angle AEF + \angle BDG - \angle FHG =$$

$$= \angle ACB + \angle BAI + \angle ACB + \angle ABI - 180^\circ + \angle AIB =$$

$$= 180^\circ - \angle AIB - 180^\circ + \angle AIB + 2\angle ACB = 2\angle ACB,$$

tādēļ $H \in \odot(AKB)$.

3.apgalvojums: K, H, P - kolineāri.
Pierādījums: No leņķiem iegūstam, ka $\angle KHB = \angle KAB = \angle ACB = \angle ADB = \angle IHB$, tāpēc K, I, H, P ir kolineāri.

Pielietojot radikālo asu teorēmu $\odot(AIHE), \odot(BIHD), \odot(ABDCE)$, mēs iegūstam prasīto.