Punkta pakāpe

Norādījumi. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir relatīvi sakārtoti pieaugošā grūtības secībā. Katrs uzdevums tiek vērtēts ar $0-7$ punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti. Risinājumu iesniegšanai izmantot NMS mājaslapā esošo formu. **Katram risinātajam uzdevumam jāpievieno atbilstošs zīmējums tajā pašā lapā, kur sākas risinājums!**

1.uzdevums. Dota trapece $ABCD$, kuras pamati ir AD un BC. Riņķa līnija, kas iet caur punktiem B un C, krusto trapeces sānu malas punktos P, Q un trapeces diagonāles punktos M un N. Pierādīt, ka taisnes MN, PQ, AD krustojas vienā punktā vai ir paralēlas.

2.uzdevums. Četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojas punktā O. Zināms, ka $\angle BAC = \angle CBD$ un $\angle BCA = \angle CDB$. Pierādīt, ka pieskares, kas vilktas no punktiem B un C pret trijstūra AOD apvilkto riņķa līniju, ir vienāda garuma.

3.uzdevums. Dots izliekts četrstūris $ABCD$, kuram izpildās $AB = BC$ un $AD = DC$. Punkti K, L, M ir attiecīgi nogriežņu AB, CD, AC viduspunkti. Perpendikuls, kas vilkts no punkta A pret taisni BC, krusto perpendikulu, kas vilkts no punkta C pret taisni AD, punktā F. Pierādīt, ka $MF \perp KL$.

4.uzdevums. Dots dažādmalu trijstūris ABC. Taisne ℓ, kas ir paralēla taisnei BC, krusto nogriežņus AB un AC attiecīgi punktos D un E, kā arī trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktos F un G, pie tam punkti F, D, E, G atrodas uz ℓ tieši šādā secībā. Trijstūru FEB un DGC apvilktās riņķa līnijas krustojas punktos P un Q. Pierādīt, ka punkti A, P, Q atrodas uz vienas taisnes.

5.uzdevums. Ar Γ apzīmēsim šaurleņķu trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju. Taisne l ir pieskare Γ punktā A. Uz nogriežņiem AB, AC izvēlēti attiecīgi punkti D un E ar īpašību, ka $\frac{BD}{DA} = \frac{AE}{EC}$. Taisne DE krusto Γ punktos F un G. Pieņemsim, ka taisne, kas ir paralēla malai AC un iet caur punktu D, krusto taisni l punktā H, savukārt taisne, kas ir paralēla malai AB un iet caur punktu E, krusto taisni l punktā I. Pierādīt, ka eksistē riņķa līnija, kas iet caur punktiem F, G, H, I un pieskaras taisnei BC.

6.uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Punkti I un O ir attiecīgi centri tā ievilktajai un apvilktajai riņķa līnijai. Taisnes OI un BC krustojas punktā X. Trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai punkts M ir viduspunkts lokam BC, kurš nesatur punktu A. Zināms, ka ap četrstūri $AOMX$ var apvilkt riņķa līniju. Pierādīt, ka $\angle BAC = 60°$.

7.uzdevums. Dots šaurleņķu trijstūris ABC. Uz nogriežņiem BC, CA, AB atlikti attiecīgi punkti D, E, F ar īpašību, ka $EF \parallel BC$. Pieņemsim, ka taisne DE krusto trijstūra ADC apvilkto riņķa līniju punktā $X \neq D$, savukārt taisne DF krusto trijstūra ADB apvilkto riņķa līniju punktā $Y \neq D$. Punkts P ir nogriežņa BC viduspunkts. Uz nogriežņa BC ir atlikts punkts $D_1 \neq D$ ar īpašību, ka $D_1P = PD$. Pierādīt, ka ap četrstūri $XYDD_1$ var apvilkt riņķa līniju.