Klasiskās nevienādības

Kims Georgs Pavlovs, Alfrēds Saročinskis

1 Ievads

Skolā bieži ir sastopami uzdevumi, kuros dota kaut kāda nevienādība un ir prasīts atrast visus reālos skaitļus, kuriem tā izpildās. Olimpiāžu matemātikā uzdevumi par nevienādībām bieži vien ir krasi atšķirīgi no skolā sastopamiem – ir dota nevienādība un ir **jāpierāda**, ka tā izpildās **visām** pieļaujamajām mainīgo vērtībām. Viena no vienkāršākajām nevienādību pierādīšanas metodēm ir kvadrātu atdalīšana, taču šajā materiālā aplūkosim citas nevienādību pierādīšanas metodes – klasisko nevienādību izmantošanu. Nekādas priekšzināšanas šī materiāla izprašanai nav vajadzīgas.

Mēģinot pierādīt nevienādības, ir svarīgi veikt pareizu spriedumu virkni. Piemēram, pieņemsim, ka mums ir jāpierāda, ka kaut kāda izteiksme A ir lielāka par izteiksmi C kaut kādām pieļaujamām mainīgo vērtībām. Ja mēs varam pierādīt, ka $A \geq B$, kur B ir kaut kāda izteiksme pieļaujamām mainīgo vērtībām, un tad pierādīt, ka $B \geq C$, tad varam secināt, ka $A \geq B \geq C$, kas nozīmē, ka $A \geq C$, kas arī bija jāpierāda. Šo loģisko spriedumu virkni var attēlot šādi

$$A \geq B \quad \text{un} \quad B \geq C \implies A \geq C$$

Tagad aplūkosim **nepareizu** spriedumu virkni. Pieņemsim, ka B ir kaut kāda izteiksme un mēs pierādījām, ka $A \geq B$ un $C \geq B$ pieļaujamām mainīgo vērtībām, tad mēs **nevaram** secināt, ka $A \geq C$. Līdz ar to

$$A \geq B \quad \text{un} \quad C \geq B \quad \textbf{negarantē} \implies A \geq C$$

Aplūkosim to konkrētam skaitliskam piemēram. Ja $A = 5$, $B = 3$ un $C = 7$, tad $A \geq B$ un $C \geq B$, taču acīmredzami, ka $A \leq C$.

Pierādot nevienādības, līdz ar to ir svarīgi sekot līdzi, vai tiek veiktas pareizas spriedumu virknes, jo uzdevumu nevar pierādīt, ja tiek veikta nepareiza spriedumu virkne.

2 Sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

Aplūkosim vienu no vērtīgākajām teorēmām, ko ir vērts zināt, mēģinot pierādīt nevienādības. Olimpiādēs šo teorēmu var izmantot, nezinot tās pierādījumu.

Teorēma (AM-GM). Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$ un pozitīvi reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tādā gadījumā izpildās nevienādība

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Vienādība izpildās tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Atzīmēsim, ka skaitlis $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ ir skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējais aritmētiskais un tiek parasti apzīmēts ar AM, savukārt skaitlis $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ ir skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējais ģeometriskais un tiek parasti apzīmēts ar GM. Ir svarīgi atzīmēt — lai izmantotu šo nevienādību, **visiem** skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir jābūt pozitīviem – ja kaut viens no tiem ir negatīvs, tad nevienādība var būt aplama.

Otra lieta, ko ir vērts precizēt, ir vienādības gadījums. Pieņemsim, ka pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izpildās vienādība

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

tad no teorēmas mēs varam secināt, ka $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Šī teorēma netiks pierādīta šajā materiālā, bet interesenti var iepazīties ar pierādījumu Vikipēdijas lapā.

2.1 Viegli uzdevumu risināšanas piemēri

Aplūkosim pāris piemērus, kuros var izmantot *AM-GM*, lai pierādītu nevienādību.

1.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Atrisinājums. No *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$
$$c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Sareizinot šīs trīs nevienādības kopā (to drīkst darīt, jo visu nevienādību abas puses ir pozitīvas), iegūsim, ka

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

Līdz ar to prasītā nevienādība ir pierādīta.

2.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$$

Atrisinājums. No *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$
$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Sareizinot šīs divas nevienādības kopā (to drīkst darīt, jo visu nevienādību abas puses ir pozitīvas), iegūsim, ka

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.

3.piemērs. Dots naturāls skaitlis n un reāli skaitļi $a_1, \cdots, a_n$ ar īpašību, ka $0 < a_i < 1$ visiem $i = 1, \ldots, n$. Pierādīt, ka:

$$(1 - {a_1}^n)(1 - {a_2}^n) \cdots (1 - {a_n}^n) \leq (1 - a_1a_2 \cdots a_n)^n.$$

Atrisinājums. Ņemot n-tās pakāpes sakni no abās pusēm (to drīkst darīt, jo abas nevienādības puses ir pozitīvas), iegūsim, ka

$$\sqrt[n]{(1-a_1^n)(1-a_2^n)\ldots(1-a_n^n)} \leq (1 - a_1a_2\ldots a_n)$$

No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka

$$\sqrt[n]{(1-a_1^n)(1-a_2^n)\ldots(1-a_n^n)} \leq \frac{(1-a_1^n)+(1-a_2^n)+\ldots+(1-a_n^n)}{n}$$

Pēdējā izteiksmē mēs drīkstējām pielietot *AM-GM*, jo no dotā nosacījuma $0 < a_i < 1$ izriet, ka $(1 - a_i^n)$ ir pozitīvs skaitlis katram indeksam i. Mums atliek pierādīt, ka

$$\begin{aligned}
\frac{(1-a_1^n)+(1-a_2^n)+\ldots+(1-a_n^n)}{n} &\leq (1-a_1a_2\ldots a_n)\\
\frac{n-(a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n)}{n} &\leq (1-a_1a_2\ldots a_n)\\
1-\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n}{n} &\leq 1-a_1a_2\ldots a_n\\
\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n}{n} &\geq a_1a_2\ldots a_n
\end{aligned}$$

Pēdējā nevienādība izriet no sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, līdz ar to ar ekvivalentiem pārveidojumiem uzdevums ir atrisināts.

2.2 Dalīšana sīkākās daļās

Šajā sadaļā aplūkosim svarīgu ideju, triku, kas var palīdzēt pierādīt nevienādības. Bieži vien, lai pierādītu nevienādību, nelīdzēs pielietot *AM-GM* dotajiem saskaitāmajiem, bet būs vajadzība kādu saskaitāmo sadalīt sīkāk. Ilustrēsim šo ideju vairākos piemēros.

4.piemērs. Pierādīt, ka reāliem skaitļiem a, b $(a \neq 0, b \neq 0)$ izpildās nevienādība

$$a^4 + b^4 + \frac{2}{a^2b^2} \geq 4$$

Atrisinājums. Sadalīsim saskaitāmo $\frac{2}{a^2b^2}$ divās vienādās daļās, tas ir, $\frac{2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2}$. Tādā gadījumā no *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$a^4 + b^4 + \frac{2}{a^2b^2} = a^4 + b^4 + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2b^2} \geq 4\sqrt[4]{a^4 \cdot b^4 \cdot \frac{1}{a^2b^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2}} = 4$$

Ievērosim, ka visi saskaitāmie, kam tiek pielietota *AM-GM* nevienādība, ir kvadrāti un tātad pozitīvi. Prasītā nevienādība ir pierādīta.

5.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c ar īpašību, ka $abc = 1$, izpildās nevienādība

$$(a+2)(b+2)(c+2) \geq 27$$

Atrisinājums. Doma ir sadalīt skaitli 2 kā $1 + 1$. Tādā gadījumā no *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$\begin{aligned}
a+2 = a+1+1 \geq 3\sqrt[3]{a\cdot 1\cdot 1} = 3\sqrt[3]{a}\\
b+2 = b+1+1 \geq 3\sqrt[3]{b\cdot 1\cdot 1} = 3\sqrt[3]{b}\\
c+2 = c+1+1 \geq 3\sqrt[3]{c\cdot 1\cdot 1} = 3\sqrt[3]{c}
\end{aligned}$$

Sareizinot šīs trīs nevienādības kopā (to drīkst darīt, jo visu nevienādību abas puses ir pozitīvas) un izmantojot uzdevumā doto, ka $abc = 1$, iegūsim:

$$(a+2)(b+2)(c+2) \geq 3\sqrt[3]{a}\cdot 3\sqrt[3]{b}\cdot 3\sqrt[3]{c} = 27\sqrt[3]{abc} = 27\sqrt[3]{1} = 27$$

Līdz ar to prasītā nevienādība ir pierādīta.

6.piemērs. Atrisināt reālos pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$x^{40}+\frac{1}{x^{16}}+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x}=16.$$

Atrisinājums. Tā kā vienādojuma labajā pusē parādās skaitlis 16, tad tas motivē mūs sadalīt vienādojuma kreiso pusi 16 saskaitāmajos. Ievērosim, ka no *AM-GM* nevienādības tādā gadījumā izriet, ka

$$\begin{gathered}x^{40}+\frac{1}{x^{16}}+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x}=\\ x^{40}+\frac{1}{x^{16}}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq\\ 16\sqrt[16]{x^{40}\cdot\frac{1}{x^{16}}\cdot\frac{1}{x^8}\cdot\frac{1}{x^8}\cdot\frac{1}{x^8}}=\\ =16,\end{gathered}$$

Taču mēs meklējam tādu x, ka

$$x^{40}+\frac{1}{x^{16}}+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x}=16$$

Līdz ar to mums sakarībā starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko jāizpildās vienādībai, kas nozīmē, ka:

$$x^{40}=\frac{1}{x^{16}}=\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\implies x=1$$

Viegli pārbaudīt, kas tas patiešām ir atrisinājums.

7.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a,b,c izpildās nevienādība

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$$

Atrisinājums. Šis uzdevums balstās uz specifisku triku, ko ir vērts zināt, un saskaitāmo dalīšanu sīkākās daļās. Pareizināsim abas nevienādības puses ar 3 (citos līdzīgos uzdevumus šis skaitlis var atšķirties), tad mums ir jāpierāda, ka

$$3a^3+3b^3+3c^3\geq 3a^2b+3b^2c+3c^2a$$

Ievērosim, ka no *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$a^3+a^3+b^3\geq 3\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3}=3a^2b.$$

Līdzīgi varam iegūt, ka

$$\begin{gathered}b^3+b^3+c^3\geq 3b^2c\\ c^3+c^3+a^3\geq 3c^2a\end{gathered}$$

Saskaitot šīs trīs nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$\begin{gathered}(a^3+a^3+b^3)+(b^3+b^3+c^3)+(c^3+c^3+a^3)\geq 3a^2b+3b^2c+3c^a\\ 3(a^3+b^3+c^3)\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)\\ a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a\end{gathered}$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.

8.piemērs. Dots, ka x, y, z ir nenegatīvi reāli skaitļi un $x \geq y$. Pierādīt, ka

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x-y)\sqrt{xyz}.$$

Atrisinājums. Nevienādības kreisajā pusē saucējā parādās skaitlis 6, kas motivē skaitītāju sadalīt 6 saskaitāmajos. Ievērosim, ka

$$\begin{gathered} x^3 - y^3 + z^3 + 1 = \\ = (x-y)(x^2 + xy + y^2) + z^3 + 1 = \\ = (x-y)((x-y)^2 + 3xy) + z^3 + 1 = \\ = (x-y)^3 + 3xy(x-y) + z^3 + 1 = \\ = (x-y)^3 + xy(x-y) + xy(x-y) + xy(x-y) + z^3 + 1 \end{gathered}$$

No *AM-GM* nevienādības izriet, ka:

$$(x-y)^3 + xy(x-y) + xy(x-y) + xy(x-y) + z^3 + 1 \geq 6\sqrt[6]{(x-y)^6 x^3 y^3 z^3} = 6(x-y)\sqrt{xyz}$$

Līdz ar to

$$\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 1}{6} \geq (x-y)\sqrt{xyz},$$

kas arī bija jāpierāda. Gadījumus, kad starp saskaitāmajiem kāds ir vienāds ar 0, var viegli pārbaudīt.

2.3 Vienādības gadījuma saglabāšana

Aplūkosim 5. piemēru vēlreiz. Mūsu mērķis ir pierādīt, ka visiem pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c ar īpašību, ka $abc = 1$, izpildās nevienādība $(a+2)(b+2)(c+2) \geq 27$.

Ievērosim, ka šī nevienādība kļūst par vienādību, ja $a = b = c = 1$. Tas nozīmē, ka vienādības gadījumu var sasniegt. Tādā gadījumā visām nevienādībām, ko mēs izmantojām risinājumā, ir jāsaglabā šis vienādības gadījums. Līdz ar to nav jēgas veikt novērtējumu $a + 2 \geq 2\sqrt{2a}$ (un analoģiski novērtējumu priekš b un c), lai atrisinātu uzdevumu, jo tādā gadījumā vienādība būtu sasniedzama tad un tikai tad, ja $a = b = c = 2$, taču mēs zinām, ka viens no vienādības gadījumiem ir $a = b = c = 1$. Savukārt *AM-GM* pielietojums $a + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a}$ ir derīgs, jo šajā gadījumā vienādība tiek sasniegta ar $a = b = c = 1$. Aplūkosim vēl pāris piemērus, lai ilustrētu šo ideju sīkāk.

6.piemērs Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z ar īpašību, ka $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Pierādīt, ka

$$x + y + z \geq \sqrt{\frac{xy+1}{2}} + \sqrt{\frac{yz+1}{2}} + \sqrt{\frac{zx+1}{2}}$$

Atrisinājums. No *AM-GM* nevienādības izriet, ka:

$$2\sqrt{\frac{xy+1}{2}} = 2\sqrt{x \cdot \frac{y + \frac{1}{x}}{2}} \leq x + \frac{y + \frac{1}{x}}{2}$$

$$2\sqrt{\frac{yz+1}{2}} = 2\sqrt{y \cdot \frac{z + \frac{1}{y}}{2}} \leq y + \frac{z + \frac{1}{y}}{2}$$

$$2\sqrt{\frac{zx+1}{2}} = 2\sqrt{z \cdot \frac{x + \frac{1}{z}}{2}} \leq z + \frac{x + \frac{1}{z}}{2}$$

Saskaitot šīs trīs nevienādības kopā un izmantojot to, ka $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, iegūsim, ka:

$$2\sqrt{\frac{xy+1}{2}}+2\sqrt{\frac{yz+1}{2}}+2\sqrt{\frac{zx+1}{2}} \leq x+y+z+\frac{x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{2}$$
$$2\sqrt{\frac{xy+1}{2}}+2\sqrt{\frac{yz+1}{2}}+2\sqrt{\frac{zx+1}{2}} \leq x+y+z+\frac{x+y+z+x+y+z}{2}$$
$$\sqrt{\frac{xy+1}{2}}+\sqrt{\frac{yz+1}{2}}+\sqrt{\frac{zx+1}{2}} \leq x+y+z$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.

Piezīme. Ievērosim, ka iepriekšēja nevienādība kļūst par vienādību, ja $x=y=z=1$. Līdz ar to visām nevienādībām, kas tiek pielietotas, ir jāsaglabā šīs vienādības gadījums. Līdz ar to, piemēram, novērtējums

$$2\sqrt{\frac{xy+1}{2}}=2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)} \leq \frac{x}{2}+y+\frac{1}{x}$$

neaizvedīs pie atrisinājuma, jo vienādības gadījumā, kad $x=y=z=1$, izpildās $y+\frac{1}{x}=2$ un $\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, taču, lai sasniegtu vienādību, ir jāizpildās $\frac{x}{2}=y+\frac{1}{x}$, jo vienādība izpildās tad un tikai tad, ja saskaitāmie, kuriem tika pielietots *AM-GM*, ir vienādi. Taču mēs redzam, ka šajā gadījumā tas tā nav, tādēļ mūsu novērtējums neaizvedīs pie risinājuma. Savukārt uzdevuma atrisinājumā izmantotais novērtējums tiešām saglabā vienādību, jo $x=\frac{y+\frac{1}{x}}{2}=1$, kad $x=y=z=1$.

7.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a,b,c ar īpašību, ka $a+b+c=1$, izpildās

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+b\sqrt[3]{\frac{c}{b}}+c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leq ab+bc+ca+\frac{2}{3}.$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka no *AM-GM* izriet, ka:

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{ba^2}=\sqrt[3]{a\cdot 3ab\cdot\frac{1}{3}} \leq \frac{a+3ab+\frac{1}{3}}{3}$$

Līdzīgi varam iegūt, ka:

$$b\sqrt[3]{\frac{c}{b}} \leq \frac{b+3bc+\frac{1}{3}}{3}$$
$$c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leq \frac{c+3ca+\frac{1}{3}}{3}$$

Līdz ar to secinām, ka:

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+b\sqrt[3]{\frac{c}{b}}+c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leq \frac{a+b+c+3(ab+bc+ca)+1}{3}=ab+bc+ca+\frac{2}{3}$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.

Piezīme. Ievērosim, ka vienādība tiek sasniegta tad un tikai tad, ja $a=b=c=\frac{1}{3}$. Mūsu novērtējums

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{ba^2}=\sqrt[3]{a\cdot 3ab\cdot\frac{1}{3}} \leq \frac{a+3ab+\frac{1}{3}}{3}$$

saglabā šo vienādības gadījumu, jo, kad $a=b=c=\frac{1}{3}$, izpildās $a=3ab=\frac{1}{3}$.

3 Citas sakarības starp vidējiem

Bieži vien uzdevuma risināšanā var nepietikt ar AM-GM nevienādību, tāpēc ir vērts papildināt savas zināšanas ar vēl pāris noderīgām nevienādībām.

Teorēma (QM-AM-GM-HM) Fiksēsim naturālu skaitli n. Aplūkosim pozitīvus skaitļus $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Definēsim sekojošus lielumus

$$\begin{aligned} QM &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \\ AM &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \\ GM &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \\ HM &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \end{aligned}$$

Tādā gadījumā izpildās nevienādības

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

Līdzīgi kā ar AM-GM nevienādību, ir svarīgi pārliecināties, ka **visi** skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir pozitīvi, pirms lietot šīs nevienādības kādā uzdevumā. Viena uzdevuma ietvaros, visticamāk, nevajadzēs izmantot visu šo nevienādību virkni, bet tikai vienu konkrētu nevienādību – visvairāk izmantotās nevienādības ir $QM \geq AM$, $AM \geq HM$, taču ir arī uzdevumi, kuros var noderēt, piemēram, $GM \geq HM$.

3.1 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Atrisinājums. No $AM - HM$ nevienādības izriet, ka

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Reizinot abas šīs nevienādības puses ar $3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, iegūsim, ka

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9,$$

kas arī bija jāpierāda.

2.piemērs. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $a + b + c + ab + bc + ca + abc = 7$. Pierādīt, ka

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geq 6.$$

Atrisinājums. Pārveidosim doto nosacījumu šādi

$$\begin{aligned} a + b + c + ab + bc + ca + abc &= 7 \\ a + b + c + ab + bc + ca + abc + 1 &= 8 \\ (a+1)(b+1)(c+1) &= 8 \end{aligned}$$

Lasītājam paliek kā vingrinājums pārliecināties, ka, atverot iekavas, iegūsim, ka $(a+1)(b+1)(c+1) = a+b+c+ab+bc+ca+abc+1$. Pielietosim *QM-AM* nevienādību, lai iegūtu, ka

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+1+1}{4}} \geq \frac{a+b+1+1}{4}$$
$$\sqrt{a^2+b^2+2} \geq \frac{a+b+2}{2}$$

Analoģiski varam iegūt, ka:

$$\sqrt{b^2+c^2+2} \geq \frac{b+c+2}{2}$$
$$\sqrt{c^2+a^2+2} \geq \frac{c+a+2}{2}$$

Saskaitot šīs trīs nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$\sqrt{a^2+b^2+2} + \sqrt{b^2+c^2+2} + \sqrt{c^2+a^2+2} \geq \frac{a+b+2}{2} + \frac{b+c+2}{2} + \frac{c+a+2}{2} = a+b+c+3$$

Līdz ar to mēs gribētu pierādīt, ka:

$$a+b+c+3 \geq 6$$

Atcerēsimies to, ka $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. No sakarības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko izriet, ka:

$$a+b+c+3 = (a+1)+(b+1)+(c+1) \geq 3\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

Līdz ar to uzdevums ir atrisināts.

3.piemērs. Doti nenegatīvi reāli skaitļi a, b, c, d ar īpašību, ka $a+b+c+d = 4$. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}.$$

Atrisinājums. No sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka

$$a^3+8 = a^3+1+1+6 \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + 6 = 3a+6$$

Līdz ar to secinām, ka

$$\frac{a}{a^3+8} \leq \frac{a}{3a+6}$$

Analoģiski varam iegūt, ka:

$$\frac{b}{b^3+8} \leq \frac{b}{3b+6}$$
$$\frac{c}{c^3+8} \leq \frac{c}{3c+6}$$
$$\frac{d}{d^3+8} \leq \frac{d}{3d+6}$$

Secinām, ka

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{a}{3a+6} + \frac{b}{3b+6} + \frac{c}{3c+6} + \frac{d}{3d+6}$$

Mēs gribētu pierādīt, ka

$$\frac{a}{3a+6}+\frac{b}{3b+6}+\frac{c}{3c+6}+\frac{d}{3d+6}\leq\frac{4}{9}$$
$$\frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}+\frac{d}{d+2}\leq\frac{4}{3}$$
$$\frac{(a+2)-2}{a+2}+\frac{(b+2)-2}{b+2}+\frac{(c+2)-2}{c+2}+\frac{(d+2)-2}{d+2}\leq\frac{4}{3}$$
$$1-\frac{2}{a+2}+1-\frac{2}{b+2}+1-\frac{2}{c+2}+1-\frac{2}{d+2}\leq\frac{4}{3}$$
$$4-\frac{4}{3}\leq\frac{2}{a+2}+\frac{2}{b+2}+\frac{2}{c+2}+\frac{2}{d+2}$$
$$2-\frac{2}{3}\leq\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}$$
$$\frac{4}{3}\leq\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}$$

No *AM-HM* nevienādības izriet, ka

$$\frac{(a+2)+(b+2)+(c+2)+(d+2)}{4}\geq\frac{4}{\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}}$$
$$\frac{4+8}{4}\geq\frac{4}{\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}}$$
$$3\geq\frac{4}{\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}}$$
$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\geq\frac{4}{3}$$

Prasītais ir pierādīts.

4.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\sqrt{a^3b+a^3c}+\sqrt{b^3c+b^3a}+\sqrt{c^3a+c^3b}\geq\frac{4}{3}(ab+bc+ca).$$

Atrisinājums. Pielietojot *GM-HM* nevienādību, iegūsim, ka

$$\sqrt{a^3b+a^3c}=\sqrt{a^2(ab+ac)}\geq\frac{2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab+ac}}=\frac{2a^2(ab+ac)}{ab+ac+a^2}=\frac{3a^2(b+c)}{a+b+c}$$

Analoģiski varam iegūt, ka

$$\sqrt{b^3c+b^3a}\geq\frac{2b^2(c+a)}{a+b+c}$$
$$\sqrt{c^3a+c^3b}\geq\frac{2c^2(a+b)}{a+b+c}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$\sqrt{a^3b+a^3c}+\sqrt{b^3c+b^3a}+\sqrt{c^3a+c^3b}\geq\frac{2a^2(b+c)+2b^2(c+a)+2c^2(a+b)}{a+b+c}$$

Līdz ar to, ja mēs pierādītu, ka

$$\frac{2a^2(b+c)+2b^2(c+a)+2c^2(a+b)}{a+b+c}\geq\frac{4}{3}(ab+bc+ca),$$

tad uzdevums būtu atrisināts. Veiksim ekvivalentus pārveidojumus

$$\frac{2a^2(b+c)+2b^2(c+a)+2c^2(a+b)}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca)$$
$$6a^2(b+c)+6b^2(c+a)+6c^2(a+b) \geq 4(ab+bc+ca)(a+b+c)$$
$$6ab(a+b)+6bc(b+c)+6ca(c+a) \geq 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+12abc$$
$$2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a) \geq 12abc$$
$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$$
$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^a+ca^2 \geq 6abc$$

Taču no *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geq 6\sqrt[6]{a^2b\cdot ab^2\cdot b^2c\cdot bc^2\cdot c^2a\cdot ca^2} = 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 6abc$$

Līdz ar to uzdevums ir atrisināts.

3.2 AM-GM ar svariem

Šajā sadaļā aplūkosim specifisku nevienādību, ko ir vērts zināt. Interesants stāsts saistībā ar to ir tāds, ka Latvijas IMO 2020 komandai tā nebija padziļināti mācīta, līdz ar to neviens nevarēja atrisināt pirmās dienas otro uzdevumu.

Teorēma (AM-GM ar svariem) Dots fiksēts naturāls skaitlis $n \geq 2$. Pieņemsim, ka doti pozitīvi reāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots x_n$ un $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, kur $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \alpha$. Tādā gadījumā izpildās nevienādība

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha} \geq \sqrt[\alpha]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}}$$

Ir vērts atzīmēt, ka šī teorēma acīmredzami izriet no *AM-GM* nevienādības, kad skaitļi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ir naturāli skaitļi, jo tad αx_1 var sadalīt α_1 saskaitāmajos x_1 un analoģiski izdarīt ar $\alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n$. Tad, pielietojot *AM-GM* nevienādību, iegūtajiem α saskaitāmajiem iegūsim prasīto. Pārsteidzoši ir tas, ka šī nevienādība ir spēkā arī tad, ja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ir reāli (tostarp iracionāli) skaitļi. Šīs teorēma tiks atstāta bez pierādījuma, bet interesenti var ar pierādījumu iepazīties Vikipēdijas lapā.

3.3 Uzdevumu risināšanas piemēri

5.piemērs Skaitļi a, b un c pieder reālo pozitīvo skaitļu kopai un $a+b+c=1$. Pierādīt, ka

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1$$

Atrisinājums. Sastopot nevienādības, kurās mainīgie ir arī kāpinātāji, var mēģināt pielietot AM-GM ar svariem. Atcerēsimies no vidusskolas kursa to, ka $\sqrt[\alpha]{x} = x^{\frac{1}{\alpha}}$. Izmantojot uzdevumā doto nosacījumu, ka $a+b+c=1$, un AM-GM ar svariem, iegūsim, ka

$$a^a b^b c^c = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}} \leq \frac{a\cdot a + b\cdot b + c\cdot c}{a+b+c} = a^2+b^2+c^2$$

Veicot līdzīgus spriedumus, var attiecīgi secināt, ka

$$a^b b^c c^a = (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}} \leq \frac{a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a}{a+b+c} = ab+bc+ca$$

$$a^c b^a c^b = (a^c b^a c^b)^{\frac{1}{a+b+c}} \leq \frac{a\cdot c + b\cdot a + c\cdot b}{a+b+c} = ab+bc+ca$$

Saskaitot visas šīs nevienādības kopā, var dabūt

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 = 1,$$

kas arī bija jāpierāda.

6.piemērs Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$ un pozitīvi reāli skaitļi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ar īpašību, ka $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Pierādīt, ka

$$x_1^{1-x_2} + x_2^{1-x_3} \cdots + x_{n-1}^{1-x_n} + x_n^{1-x_1} < 2.$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka arī šajā uzdevumā parādās mainīgie kāpinātājos, tāpēc padomāsim, vai varam kādā gudrā veidā pielietot AM-GM ar svariem. Aplūkosim vienu kreisās puses saskaitāmo $x_1^{1-x_2}$. Ievērosim, ka

$$x_1^{1-x_2} = 1^{x_2} \cdot x_1^{1-x_2} \leq 1 \cdot x_2 + x_1 \cdot (1 - x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2 < x_1 + x_2.$$

Mēs pielietojām sakarību AM-GM ar svariem, kur $\alpha = 1$ un $\alpha_1 = x_2$, $\alpha_2 = 1 - x_2$. Analoģiski varam iegūt, ka

$$\begin{aligned} x_2^{1-x_3} &< x_2 + x_3 \\ x_3^{1-x_4} &< x_3 + x_4 \\ &\cdots \\ x_n^{1-x_1} &< x_n + x_1 \end{aligned}$$

Saskaitot šīs nevienādības kopā iegūsim, ka

$$x_1^{1-x_2} + x_2^{1-x_3} \cdots + x_{n-1}^{1-x_n} + x_n^{1-x_1} < 2(x_1 + \cdots + x_n) = 2,$$

kas arī bija jāpierāda.

4 Košī nevienādība

Teorēma (Košī nevienādība). Aplūkosim reālus skaitļus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Tiem izpildās nevienādība

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

Pierādījums. Aplūkosim šādu kvadrātfunkciju

$$f(t) = (x_1t - y_1)^2 + (x_2t - y_2)^2 + \ldots (x_nt - y_n)^2 \geq 0$$

Šī funkcija pieņem nenegatīvas vērtības visiem reāliem skaitļiem t, jo tā ir uzrakstīta kā vairāku kvadrātu summa. Ievērosim, ka funkciju $f(t)$ var pārrakstīt sekojoši, atverot iekavas

$$f(t) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)t^2 - 2t(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) + (y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Ievērosim, ka vienādojumam $(x_1^2+\ldots+x_n^2)t^2-2t(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+(y_1^2+\ldots+y_n^2) = 0$ diskriminantam jābūt nepozitīvam, līdz ar to iegūstam, ka

$$4(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n)^2 \leq 0$$
$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

Līdz ar to prasītā teorēma ir pierādīta.

Bieži vien šī teorēma tiek pielietota mazliet citā formā. Pieņemsim, ka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir pozitīvi reāli skaitļi, tad

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \geq (\sqrt{x_1y_1} + \ldots + \sqrt{x_ny_n})^2$$

Olimpiādē jebkuru no Košī nevienādības formām var izmantot bez pierādījuma.

4.1 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Pierādīt, ka reāliem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

Atrisinājums. Pielietosim Košī nevienādību sekojošā veidā – paņemsim, ka $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ un $y_1 = a^2, y_2 = b^2, y_3 = c^2$, tad no Košī nevienādības izriet, ka

$$(1 + 1 + 1)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2,$$

kas arī bija jāpierāda.

2.piemērs Doti reāli pozitīvi skaitļi x, y un z. Pierādīt, ka

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leq 2(x + y + z)$$

Atrisinājums. Pārrakstīsim doto nevienādību sekojošā veidā

$$\sqrt{x(3x + y)} + \sqrt{y(3y + z)} + \sqrt{z(3z + x)} \leq 2(x + y + z)$$
$$(\sqrt{x(3x + y)} + \sqrt{y(3y + z)} + \sqrt{z(3z + x)})^2 \leq 4(x + y + z)^2$$

Pielietosim Košī nevienādību – pieņemsim, ka $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ un $y_1 = 3x + y, y_2 = 3y + z, y_3 = 3z + x$. Līdz ar to iegūstam, ka

$$(\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)})^2 \leq (x+y+z)((3x+y)+(3y+z)+(3z+x)) = 4(x+y+z)^2$$

Līdz ar to esam pierādījuši dotajai nevienādībai ekvivalentu nevienādību, kas nozīmē, ka arī sākotnējā nevienādība ir pierādīta.

3.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Atrisinājums. Pareizināsim abas nevienādības puses ar $a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$, tad mums vajadzētu pierādīt, ka

$$(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b))\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}\Big(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)\Big)$$

Pielietosim Košī nevienādību sekojošā veidā – pieņemsim, ka $x_1 = a(b+c), x_2 = b(c+a), x_3 = c(a+b)$ un $y_1 = \frac{a}{b+c}$, $y_2 = \frac{b}{c+a}, y_3 = \frac{c}{a+b}$, tad iegūsim, ka

$$(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b))(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}) \geq (a+b+c)^2$$

Ja mēs pierādīsim, ka

$$(a+b+c)^2 \geq \frac{3}{2}(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)),$$

tad uzdevums būs atrisināts. To var izdarīt, vienkārši atverot iekavas

$$\begin{gathered}(a+b+c)^2 \geq \frac{3}{2}(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)) \\ (a+b+c)^2 \geq \frac{3}{2}(2(ab+bc+ca)) \\ (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3ab + 3bc + 3ca \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0 \\ 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0 \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0\end{gathered}$$

Līdz ar to uzdevums ir atrisināts.

4.piemērs. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $a + b + c = 1$. Pierādīt, ka

$$a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1} \leq \sqrt{2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka no Košī nevienādības izriet, ka

$$(a+b+c)((2ab+a) + (2bc+b) + (2ca+c)) \geq (\sqrt{a^2(2b+1)} + \sqrt{b^2(2c+1)} + \sqrt{c^2(2a+1)})^2$$

Velkot kvadrātsakni no iegūtās nevienādības abām pusēm un izmantojot to, ka $a + b + c = 1$, iegūsim, ka

$$\sqrt{1 + 2ab + 2bc + 2ca} \geq a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1}$$

Taču ievērosim, ka, ja $a+b+c=1$, tad $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = 1$, kas nozīmē, ka $2ab+2bc+2ca = 1-(a^2+b^2+c^2)$. Līdz ar to secinām, ka

$$\sqrt{1+2ab+2bc+2ca} \geq a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}$$
$$\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)} \geq a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.

4.2 Titu lemma

Titu lemma ir nevienādība, kas pēc savas būtības ir Košī nevienādības speciālgadījums, ko ir vērts lietot tajos gadījumos, kad parādās daļveida algebriskas izteiksmes.

Titu lemma. Pieņemsim, ka ir doti pozitīvi reāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tad izpildās nevienādība

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$$

Pierādījums. Pareizināsim abas nevienādības puses ar $(y_1+y_2+\ldots+y_n)$, tad mums ir jāpierāda, ka

$$(y_1+y_2+\ldots+y_n)\left(\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\right) \geq (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$$

Taču šī nevienādība ir patiesa no Košī nevienādības.

4.3 Uzdevumu risināšanas piemēri

5.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c, d izpildās nevienādība

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2$$

Atrisinājums. Mazliet pārveidosim dotās nevienādības kreisās puses katru saskaitāmo un pielietosim Titu lemmu

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} = \\
&= \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+bd}+\frac{c^2}{cd+ca}+\frac{d^2}{da+db} \geq \\
&\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db} = \\
&= \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+2bd+bc+cd+da}
\end{aligned}$$

Ja mēs pierādītu, ka

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+2bd+bc+cd+da} \geq 2,$$

tad uzdevums būtu atrisināts. Veiksim ekvivalentus pārveidojumus

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+2bd+bc+cd+da} \geq 2$$
$$(a+b+c+d)^2 \geq 2ab+2bc+2cd+2da+4ac+4bd$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \geq 2ab+2bc+2cd+2da+4ac+4bd$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd \geq 0$$
$$(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo reālu skaitļu kvadrātu summa ir nenegatīva, līdz ar to uzdevums ir atrisināts.

6.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}$$

Atrisinājums. Reizināsim abas nevienādības puses ar 3, tad mēs gribētu pierādīt, ka

$$3\left(\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2\right) \geq 1$$

Ievērosim, ka no Košī nevienādības izriet, ka

$$(1+1+1)\left(\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2\right) \geq \left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a}\right)^2$$

Līdz ar to mūsu mērķis ir pierādīt, ka

$$\left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq 1 \implies \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$$

Pielietosim Titu lemmu sekojošā veidā

$$\begin{aligned} &\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} = \\ =\ &\frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{b^2+2bc} + \frac{c^2}{c^2+2ca} \geq \\ \geq\ &\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Līdz ar to prasītā nevienādība ir pierādīta.

7.piemērs. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c, d ar īpašību, ka $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$. Pierādīt, ka

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 4.$$

Atrisinājums. Pamēģināsim pielietot Titu lemmu tieši, tad iegūsim, ka

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{b+c+d+a} \geq (a+b+c+d)$$

Ja mēs pierādītu, ka $a+b+c+d \geq 4$, tad uzdevums būtu atrisināts. Taču no Košī nevienādības izriet, ka

$$16 = 4(a^2+b^2+c^2+d^2) = (1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a+b+c+d)^2$$

Esam ieguvuši, ka $16 \geq (a+b+c+d)^2 \implies 4 \geq a+b+c+d$. Esam ieguvuši, ka $4 \geq a+b+c+d$, taču mums ir jāpierāda, ka $a+b+c+d \geq 4$, kas nozīmē, ka mēs nevaram pierādīt to, ko vēlājāmies. Līdz ar to mums ir jādomā cits veids, kā pielietot Titu lemmu.

Pamēģināsim pielietot Titu lemmu sekojošā veidā

$$\begin{gathered}
\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}= \\
=\frac{a^4}{a^2b}+\frac{b^4}{b^2c}+\frac{c^4}{c^2d}+\frac{d^4}{d^2a}\geq \\
\geq\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a}= \\
=\frac{16}{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a}
\end{gathered}$$

Ja mēs pierādītu, ka

$$\begin{gathered}
\frac{16}{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a}\geq 4 \\
4\geq a^2b+b^2c+c^2d+d^2a,
\end{gathered}$$

tad uzdevums būtu atrisināts. Ievērosim, ka no Košī nevienādības izriet, ka

$$\begin{gathered}
(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)\geq(a^2b+b^2c+c^2d+d^2a)^2 \\
4(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)\geq(a^2b+b^2c+c^2d+d^2a)^2
\end{gathered}$$

Ja mēs pierādītu, ka $4\geq a^2b^2+b^2c^2+d^2a^2$, tad mēs būtu ieguvuši, ka

$$16\geq 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)\geq(a^2b+b^2c+c^2d+d^2a)^2 \implies 4\geq a^2b+b^2c+c^2d+d^2a$$

un mēs būtu pierādījuši to, ko gribējām.

Līdz ar to mūsu mērķis ir pierādīt, ka $4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2$. Ievērosim, ka to var ekvivalenti pārrakstīt sekojošā veidā

$$\begin{gathered}
4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2 \\
16\geq 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \\
(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\geq 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \\
(a^2+c^2)^2+2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+(b^2+d^2)^2\geq 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \\
(a^2+c^2)^2-2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+(b^2+d^2)^2\geq 0 \\
(a^2+c^2-b^2-d^2)^2\geq 0
\end{gathered}$$

Pēdējā nevienādība ir patiesa, jo reāla skaitļa kvadrāts ir vienmēr nenegatīvs lielums. Līdz ar to prasītais ir pierādīts.

5 Ko darīt ar dotajiem nosacījumiem?

Bieži vien uzdevumā dots ne tikai tas, ka mainīgie, piemēram, ir pozitīvi reāli skaitļi, bet arī, ka tiem izpildās kāda algebriska īpašība. Šajā sadaļā mēs aplūkosim, kā var rēķināt uzdevumus ar dažādiem dotajiem nosacījumiem.

1.piemērs. Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z, kuriem ir spēkā sakarība $xy + yz + zx = 3xyz$. Pierādīt, ka

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3.$$

Atrisinājums. Vispirms pārnesīsim skaitli 3 uz otru pusi, lai tiktu vaļā no mīnusa zīmes

$$x^2y + y^2z + z^2x + 3 \geq 2(x + y + z)$$

Aplūkosim doto nosacījumu. Vai no tā mēs varam ērti izteikt skaitli 3? Ievērosim, ka

$$3xyz = xy + yz + zx \implies 3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Līdz ar to varam pārrakstīt pierādāmo nevienādību šādi

$$x^2y + y^2z + z^2x + 3 \geq 2(x + y + z)$$
$$x^2y + y^2z + z^2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2(x + y + z)$$

Ievērosim, ka no *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$x^2y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{x^2y \cdot \frac{1}{y}} = 2x$$
$$y^2z + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{y^z \cdot \frac{1}{z}} = 2y$$
$$z^2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{z^2x \cdot \frac{1}{x}} = 2z$$

Saskaitot šīs nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$x^2y + y^2z + z^2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2(x + y + z),$$

kas arī bija jāpierāda.

2.piemērs. Doti reāli pozitīvi skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 2$. Pierādīt, ka

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3$$

Atrisinājums. Ievērosim, ka doto nosacījumu var pārrakstīt šādi

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 2$$
$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leq 4$$
$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 \leq 4.$$

Iegūtais motivē mūs apzīmēt $a + b = 2x, b + c = 2y, c + a = 2z$, tad dotais nosacījums ir ekvivalents ar to, ka

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 4 \implies x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Izteiksim katru no mainīgajiem a, b, c kā funkciju no x, y, z. Ievērosim, ka

$$2(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a) = 2x + 2y + 2z \implies a+b+c = x+y+z$$

Tas nozīmē, ka

$$\begin{aligned} a &= a+b+c-(b+c) = x+y+z-2y = x+z-y \\ b &= a+b+c-(c+a) = x+y+z-2z = x+y-z \\ c &= a+b+c-(a+b) = x+y+z-2x = y+z-x \end{aligned}$$

Līdz ar to varam secināt, ka

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} = \frac{(x+z-y)(x+y-z)+1}{4x^2} = \frac{x^2-y^2-z^2+2yz+1}{4x^2} \geq \frac{2x^2+2yz}{4x^2},$$

kur mēs izmantojām to, ka $1 \geq x^2+y^2+z^2$. Analoģiski varam iegūt, ka

$$\begin{aligned} \frac{bc+1}{b+c} &\geq \frac{2y^2+2zx}{4y^2} \\ \frac{ca+1}{c+a} &\geq \frac{2z^2+2xy}{4x^2} \end{aligned}$$

Līdz ar to varam secināt, ka

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq \frac{2x^2+2yz}{4x^2} + \frac{2y^2+2zx}{4y^2} + \frac{2z^2+2xy}{4x^2}$$

Ja mēs pierādīsim, ka

$$\frac{2x^2+2yz}{4x^2} + \frac{2y^2+2zx}{4y^2} + \frac{2z^2+2xy}{4x^2} \geq 3,$$

tad uzdevums būs atrisināts. Veiksim ekvivalentus pārveidojumus

$$\begin{gathered} \frac{2x^2+2yz}{4x^2} + \frac{2y^2+2zx}{4y^2} + \frac{2z^2+2xy}{4x^2} \geq 3 \\ \frac{x^2+yz}{2x^2} + \frac{y^2+zx}{2y^2} + \frac{z^2+xy}{2x^2} \geq 3 \\ \frac{x^2+yz}{x^2} + \frac{y^2+zx}{y^2} + \frac{z^2+xy}{x^2} \geq 6 \\ 3 + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{x^2} \geq 6 \\ \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{x^2} \geq 3 \end{gathered}$$

No AM-GM nevienādības izriet, ka

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{yz}{x^2} \cdot \frac{zx}{y^2} \cdot \frac{xy}{x^2}} = 3$$

Līdz ar to uzdevums ir atrisināts.

3.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c ar īpašību, ka $abc = 1$, izpildās nevienādība

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

Atrisinājums. Uzdevumos, kuros ir dots $abc = 1$, bieži vien var veikt šādu populāru substitūciju

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x},$$

kur x, y, z ir patvaļīgi reāli skaitļi (šajā uzdevumā tie visi ir pozitīvi). Tagad var pārrakstīt doto nevienādību sekojošā veidā

$$\begin{gathered}
\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2} \\
\frac{1}{\frac{y}{z}(\frac{x}{y} + \frac{y}{z})} + \frac{1}{\frac{z}{x}(\frac{y}{z} + \frac{z}{x})} + \frac{1}{\frac{x}{y}(\frac{z}{x} + \frac{x}{y})} \geq \frac{3}{2} \\
\frac{z^2}{y(\frac{zx}{y} + y)} + \frac{x^2}{z(\frac{xy}{z} + z)} + \frac{y^2}{x(\frac{yz}{x} + x)} \geq \frac{3}{2} \\
\frac{z^2}{zx + y^2} + \frac{x^2}{xy + z^2} + \frac{y^2}{yz + x^2} \geq \frac{3}{2} \\
\frac{z^4}{z^3x + y^2z^2} + \frac{x^4}{x^3y + z^2x^2} + \frac{y^4}{y^3z + x^2y^2} \geq \frac{3}{2}
\end{gathered}$$

Pielietojot Titu lemmu, mēs iegūstam, ka

$$\frac{z^4}{z^3x + y^2z^2} + \frac{x^4}{x^3y + z^2x^2} + \frac{y^4}{y^3z + x^2y^2} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^3y + y^3z + z^3x}$$

Tādējādi mums paliek pierādīt, ka

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^3y + y^3z + z^3x} \geq \frac{3}{2}$$

To var ekvivalenti pārveidot sekojošā veidā

$$\begin{gathered}
2(x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^3y + y^3z + z^3x) \\
2(x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2) \geq 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^3y + y^3z + z^3x) \\
2(x^4 + y^4 + z^4) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x)
\end{gathered}$$

Pierādīsim pēdējo nevienādību.

Lemma. Izpildās nevienādība $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3x$.
Pierādījums. Pareizināsim abas nevienādības puses ar 4, tad mums ir jāpierāda, ka $4x^4 + 4y^4 + 4z^4 \geq 4x^3y + 4y^3z + 4z^3x$ No AM-GM nevienādības izriet, ka

$$\begin{gathered}
x^4 + x^4 + x^4 + y^4 \geq 4\sqrt[4]{x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 \cdot y^4} = 4x^3y \\
y^4 + y^4 + y^4 + z^4 \geq 4\sqrt[4]{y^4 \cdot y^4 \cdot y^4 \cdot z^4} = 4y^3z \\
z^4 + z^4 + z^4 + x^4 \geq 4\sqrt[4]{z^4 \cdot z^4 \cdot z^4 \cdot x^4} = 4z^3x
\end{gathered}$$

Saskaitot šīs 3 nevienādības kopā, mēs iegūsim, ka

$$4x^4 + 4y^4 + 4z^4 \geq 4x^3y + 4y^3z + 4z^3x,$$

kas pierāda mūsu lemmu.

Līdz ar to no lemmas izriet, ka

$$2(x^4+y^4+z^4)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^3y+y^3z+z^3x+x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

Ja mēs pierādītu, ka

$$\begin{gathered}x^3y+y^3z+z^3x+x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq 3(x^3y+y^3z+z^3x)\\ x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq 2(x^3y+y^3z+z^3x)\end{gathered}$$

tad uzdevums būtu atrisināts. Taču no AM-GM nevienādības izriet, ka

$$\begin{gathered}x^4+x^2y^2 \geq 2x^3y\\ y^4+y^2z^2 \geq 2y^3z\\ z^4+z^2x^2 \geq 2z^3x\end{gathered}$$

Saskaitot šīs trīs nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq 2(x^3y+y^3z+z^3x),$$

kas pierāda prasīto.

4.piemērs. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem skaitļiem a, b, c ar īpašību, ka $abc = 1$, ir spēkā nevienādība

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a^2+1}{2a}+\frac{b^2+1}{2b}+\frac{c^2+1}{2c}.$$

Atrisinājums. Līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā veiksim substitūciju $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$. Tad dotā nevienādība kļūst par

$$\begin{gathered}\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a^2+1}{2a}+\frac{b^2+1}{2b}+\frac{c^2+1}{2c}\\ \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}}+\frac{\frac{y}{z}}{\frac{z}{x}}+\frac{\frac{z}{x}}{\frac{x}{y}} \geq \frac{\frac{x^2}{y^2}+1}{2\frac{x}{y}}+\frac{\frac{y^2}{z^2}+1}{2\frac{y}{z}}+\frac{\frac{z^2}{x^2}+1}{2\frac{z}{x}}\\ \frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2} \geq \frac{x^2+y^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2}{2zx}\end{gathered}$$

Reizināsim abas nevienādības puses ar $2x^2y^2z^2$, tad iegūsim, ka

$$2x^3z^3+2x^3y^3+2y^3z^3 \geq z^2x^3y+z^2xy^3+x^2y^3z+x^2yz^3+y^2z^3x+y^2zx^3$$

Apzīmēsim $xy=u$, $yz=v$, $zx=t$. Ievērosim, ka tādā gadījumā $z^2xy^3=(zx)^2xy=t^2u$. Analoģiski izsakot pārējos kreisās puses saskaitāmos ar u, t, v, iegūsim, ka mums ir jāpierāda, ka

$$2(u^3+v^3+t^3) \geq u^2t+t^2v+v^2u+t^2u+u^2v+v^2t$$

Taču 2.2 sadaļas 7.piemērā mēs pierādījām, ka

$$u^3+v^3+t^3 \geq u^2t+t^2v+v^2t$$

Analoģiski mēs varam pierādīt, ka

$$u^3+v^3+t^3 \geq t^2u+u^2v+v^2t$$

Saskaitot šīs 2 nevienādības kopā, iegūsim, ka

$$2(u^3+v^3+t^3) \geq u^2t+t^2v+v^2u+t^2u+u^2v+v^2t,$$

kas pierāda prasīto.

5.piemērs. Doti reāli pozitīvi skaitļi a, b un c, kuri ir kāda trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Atrisinājums. Uzdevumos, kuros parādās trijstūra malu garumi, ir vērts veikt substitūciju, ko literatūrā dēvē par Ravi substitūciju. Tā ir šāda

$$a = x+y,\ b = y+z,\ c = z+x$$

Pamatosim, ka šādu substitūciju tiešām var veikt. No skolas mēs zinām, ka, ja trijstūra malu garumi ir a, b un c, tad izpildās nevienādības $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$ jeb $a+b-c > 0$, $b+c-a > 0$, $c+a-b > 0$. Tagad mēs varam definēt trīs skaitļus:

$$x = \frac{c+a-b}{2}, \quad y = \frac{a+b-c}{2}, \quad z = \frac{b+c-a}{2}$$

Ievērosim, ka visi trīs skaitļi x, y un z ir pozitīvi. Tagad izteiksim skaitļus a, b, c ar x, y, z. Iznāk, ka

$$a = x+y, \quad b = y+z, \quad c = z+x$$

Secinām, ka šī substitūcija ir derīga.

Tagad atrisināsim uzdevumu, izmantojot šo substitūciju. Doto nevienādību var pārrakstīt šādi

$$\begin{gathered}
a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc \\
2(x+y)^2z+2(y+z)^2x+2(z+x)^2y \leq 3(x+y)(y+z)(z+x) \\
12xyz+2xy(x+y)+2yz(y+z)+2zx(z+x) \leq 3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x)+6xyz \\
xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \geq 6xyz
\end{gathered}$$

Pārējā no otrās uz trešo rindu mēs abās pusēs atvērām iekavas un sagrupējam locekļus kā trešajā rindā. Taču no *AM-GM* nevienādības izriet, ka

$$\begin{gathered}
xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) = \\
= x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2 \geq \\
\geq 6\sqrt[6]{x^2y \cdot xy^2 \cdot y^2z \cdot yz^2 \cdot z^2x \cdot zx^2} = 6xyz
\end{gathered}$$

kas pierāda prasīto.

6.piemērs. Dots, ka skaitļi a, b, c ir trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b} \geq 1.$$

Atrisinājums. Līdzīgi kā iepriekšējā uzdevumā veiksim Ravi substitūciju – $a = x+y, b = y+z, c = z+x$. Tādā gadījumā dotā nevienādība kļūst par

$$\begin{gathered}
\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b} \geq 1 \\
\frac{x+y}{3(x+y)-(y+z)+(z+x)}+\frac{y+z}{3(y+z)-(z+x)+(x+y)}+\frac{z+x}{3(z+x)-(x+y)+(y+z)} \\
\frac{x+y}{4x+2y}+\frac{y+z}{4y+2z}+\frac{z+x}{4z+2x} \geq 1
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x+y}{2x+y}+\frac{y+z}{2y+z}+\frac{z+x}{2z+x}&\geq 2\\
\frac{(2x+2y)}{2x+y}+\frac{(2y+2z)}{2y+z}+\frac{(2z+2x)}{2z+x}&\geq 4\\
1+\frac{y}{2x+y}+1+\frac{z}{2y+z}+1+\frac{x}{2z+x}&\geq 4\\
\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}&\geq 1
\end{aligned}
$$

No Titu lemmas izriet, ka

$$
\begin{aligned}
&\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}=\\
&=\frac{y^2}{2xy+y^2}+\frac{z^2}{2yz+z^2}+\frac{x^2}{2zx+x^2}\geq\\
&\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}=1
\end{aligned}
$$

Tas pierāda prasīto.