Ievads. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā, bet **ne tēmu secībā**, kāda ir materiālā. Līdz ar to, lai tiktu galā ar pirmajiem uzdevumiem ir vērts izlasīt visu materiālu. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar $0-7$ punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

1.uzdevums Doti reāli pozitīvi skaitļi x, y, z ar īpašību, ka $xy + yz + zx = 27$. Pierādīt, ka

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

2.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $a + b + c = 1$. Pierādīt, ka

$$\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b+1}{\sqrt{b+ca}} + \frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2}.$$

3.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z ar īpašību, ka $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Pierādīt, ka

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

4.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c. Pierādīt, ka

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

5.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Pierādīt, ka

$$a^a bc + b^b ca + c^c ab \geq 27bc + 27ca + 27ab.$$

6.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$ un pozitīvi reāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pierādīt, ka

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n.$$

7.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c, d ar īpašību, ka $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} = 3$. Pierādīt, ka

$$\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{bcd} + \sqrt[3]{cda} + \sqrt[3]{dab} \leq \frac{4}{3}.$$