

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar 0–7 punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

1.uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādība

$$f(x) + f(x + y) \leq f(xy) + f(y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y .

2.uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādība

$$f(xy) \leq yf(x) + f(y)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y .

3.uzdevums Ar $\mathbb{R}_{\geq 0}$ apzīmēsim nenegatīvo reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, kurām izpildās nevienādība

$$x + 2 \max\{y, f(x), f(z)\} \geq f(f(x)) + 2 \max\{z, f(y)\}$$

visiem nenegatīviem reāliem skaitļiem x, y, z .

4.uzdevums. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām izpildās nevienādība

$$(x - y)(f(x) + f(y)) \leq f(x^2 - y^2)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y .

5.uzdevums Pierādīt, ka neeksistē funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurai izpildās nevienādība

$$f(x - f(y)) \leq x - yf(x)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y .

6.uzdevums. Ar $\mathbb{R}_{\geq 0}$ apzīmēsim nenegatīvo reālo skaitļu kopu. Aplūkosim funkciju $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, kurai izpildās

- visiem reāliem skaitļiem $x, y \geq 0$ izpildās $f(x)f(y) \leq y^2 f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$
- visiem $0 \leq x \leq 1$ ir spēkā, ka $f(x) \leq 2023^{2023^{2023}}$

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem $x \geq 0$ izpildās $f(x) \leq x^2$.

7.uzdevums. Ar \mathbb{R}^+ apzīmēsim pozitīvo reālo skaitļu kopu. Pierādīt, ka katrai funkcijai $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ var atrast reālus skaitļus $x > 0$ un $y > 0$ ar īpašību, ka

$$f(x + y) < yf(f(x)).$$