Procesi un spēles - atrisinājumi

1.uzdevums. Doti divi maisi ar bumbām. Pirmajā maisā ir m bumbas, bet otrajā maisā ir n bumbas, kur m un n ir naturāli skaitļi. Atļautas divas dažādas operācijas:

- no abiem maisiem izņemt vienādu skaitu bumbu;
- palielināt bumbu skaitu vienā no maisiem k reizes.

Vai ir iespējams abus maisus iztukšot galīgā operāciju skaitā jebkurām sākotnējām m, n vērtībām, ja

a) $k = 2$;

b) $k = 3$?

Atrisinājums. **a)** Jā, tas ir iespējams. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $m \geq n$. Aplūkojam šādu algoritmu:

1. No abiem maisiem izņemam $n - 1$ bumbas. Tad pirmajā maisā paliek $m - n + 1 \geq 1$ bumbas, bet otrajā maisā 1 bumba.
2. Ja pirmajā maisā ir palikusi 1 bumba, tad arī otrajā maisā ir 1 bumba un var no abiem maisiem izņemt 1 bumbu un sasniegt prasīto.
3. Palielinām bumbu skaitu otrajā maisā 2 reizes, tad otrajā maisā tagad ir 2 bumbas.
4. Izņemam no abiem maisiem 1 bumbu. Pirmajā maisā bumbu skaits samazinās par 1, kamēr otrajā maisā atkal paliek 1 bumba.
5. Pārejam atkal uz 2.algoritma soli.

Tā kā ikvienā algoritma iterācijā bumbu skaits pirmajā maisā samazinās, un tajā ir galīgs skaits bumbu, tad algoritma darbība kādā brīdī beigsies. Pie tam, algoritms var beigties tikai situācijā, ja 2.solī abos maisos ir pa vienai bumbai, kas nozīmē, ka tiks sasniegts prasītais.

b) Nē, tas nav iespējams. Aplūkosim situāciju, kurā sākotnēji pirmajā maisā ir 2 bumbas, bet otrajā maisā ir 1 bumba. Tad bumbu kopskaits ir nepāra skaitlis. Aplūkosim, kā operāciju pielietošana var mainīt bumbu kopskaitu maisos.

- Ja no abiem maisiem izņem no katra x bumbas, tad kopā no maisiem izņem $2x$ bumbas, kas ir pāra skaitlis. Ja pirms operācijas maisos kopā bija nepāra skaits bumbu, tad arī pēc operācijas būs nepāra skaits bumbu.
- Ja kādā no maisiem bumbu skaitu palielina 3 reizes, tad šajā maisā bumbu paritāte nemainās, jo $3m \equiv m \pmod{2}$. Tādā gadījumā m un n paritāte nav mainījusies, kas nozīmē, ka arī to summas paritāte nemainās operācijas rezultātā.

Tā kā abas operācijas neizmaina bumbu kopskaita paritāti, var secināt, ka ar dotajiem sākuma nosacījumiem maisos visu procesa laiku saglabāsies summā nepāra skaits bumbu. Taču situācijā, kad maisi ir tukši, summāri ir pāra skaits bumbu, kas ir nesasniedzama situācija.

2.uzdevums. Dots naturāls skaitlis k. Aplūkojam rindu ar $4k$ akmeņiem, no kuriem $2k$ ir sarkani un $2k$ ir zili. Rindas pārveidošanai atļauts veikt gājienus. Vienā gājienā drīkst izvēlēties vienu vai vairākus pēc kārtas blakusesošus sarkanus akmeņus, ko sauksim par *sarkanu akmeņu virkni*, un apmainīt tos vietām ar tāda paša garuma *zilu akmeņu virkni*. Piemēram, rindu $r\underline{bb}br\underline{rr}b$ vienā gājienā var pārveidot par rindu $r\underline{rr}br\underline{bb}b$, kur r ir sarkanie akmeņi un b ir zilie akmeņi. Noteikt mazāko naturālo skaitli n (atkarībā no k vērtības), ka jebkurai sākotnējai $4k$ akmeņu rindai var ne vairāk kā n gājienos panākt, ka rindā pirmie $2k$ akmeņi ir sarkani.

Atrisinājums. Atbilde ir $n = k$ gājieni.

Vispirms pierādīsim, ka jebkurai rindai prasīto var panākt ne vairāk kā k gājienos. Aplūkojam pirmos $2k$ akmeņus rindā. Šķirojam 2 gadījumus.

- Ja starp pirmajiem $2k$ akmeņiem ir vismaz k sarkani akmeņi. Tādā gadījumā var katru no $x \leq k$ zilajiem akmeņiem, kas ir starp pirmajiem $2k$ rindas akmeņiem, vienā gājienā apmainīt pret vienu sarkanu akmeni starp rindas pēdējiem $2k$ akmeņiem. Redzams, ka $x \leq k$ gājienos būs panākts prasītais.

- Ja starp pirmajiem $2k$ akmeņiem mazāk par k sarkaniem akmeņiem. Tādā gadījumā pirmajos $x \leq k-1$ gājienos apmainām katru sarkano akmeni no pirmajiem $2k$ akmeņiem pret vienu zilo akmeni no pēdējiem $2k$ rindas akmeņiem. Tad pēc $x \leq k-1$ gājieniem rindas pirmajā pusē būs $2k$ zili akmeņi, tātad attiecīgi rindas otrajā pusē būs $2k$ sarkani akmeņi. Abas šīs rindas varam vienā gājienā apmainīt vietām, lai panāktu prasīto, un tas būs izdarīts ne vairāk kā $(k-1)+1 = k$ gājienos.

Tālāk parādīsim, ka eksistē rinda, kurai prasīto nevar sasniegt mazāk kā k gājienos. Aplūkojam rindu $rbrb\ldots rb$, kurā akmeņi ir sakārtoti pamīšus pēc krāsas. Šajā rindā definējam *ķēdes* jēdzienu, kas ir secīga vienas krāsas akmeņu virkne, kurai abās pusēs blakus ir otras krāsas akmens vai rindas mala. Šajā rindā ir $2k$ sarkano akmeņu ķēdes. Vienā gājienā sarkano akmeņu ķēžu skaits var samazināties par ne vairāk kā 2 (ja vienu zilo ķēdi visu aizstāj ar pilnu sarkano ķēdi), ko var viegli pārbaudīt, šķirojot iespējamos ķēžu apvienošanas gadījumus.

Tā kā prasītajā gala situācijā ir jābūt 1 sarkano akmeņu ķēdei, tad jābūt veiktiem vismaz $\frac{2k-1}{2}$ gājieniem. Mazākais naturālais skaitlis, kas pārsniedz šo vērtību, ir k, kas pierāda prasīto. Esam ieguvuši, ka $k \leq n \leq k$, tātad $n = k$.

3.uzdevums. Skaitļu rindai ļauts pielietot šādu operāciju: izvēlēties trīs blakusesošus skaitļus a, b, c un samainīt to secību uz b, c, a. Atrast visus naturālus skaitļus $n \geq 3$, kuriem ar galīgu operāciju skaitu var skaitļu rindu $1, 2, \ldots, n$ pārveidot uz $n, n-1, \ldots, 1$.

Atrisinājums. Prasīto var sasniegt visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 3$ formā $n = 4k$ vai $n = 4k + 1$.

Vispirms parādīsim, kā prasīto var sasniegt pie $n = 4k$ vai $n = 4k + 1$. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, pārēju veicot no skaitļa n uz $n + 4$. Bāzes gadījumi ir $n = 4$ un $n = 5$. Pie $n = 4$:

$$1, 2, 3, 4 \to 1, 3, 4, 2 \to 3, 4, 1, 2 \to 4, 1, 3, 2 \to 4, 3, 2, 1.$$

Pie $n = 5$ izmantojam to, ka varam pārkārtot rindu $1, 2, 3, 4$ pretējā secībā:

$$1, 2, 3, 4, 5 \to \ldots \to 4, 3, 2, \underline{1, 5} \to \ldots \to \underline{1, 5}, 4, 3, 2 \to 5, 4, 1, 3, 2 \to 5, 4, 3, 2, 1.$$

Pieņemsim, ka prasīto var izdarīt rindai ar k skaitļiem. Pierādīsim to $k + 4$ skaitļiem, izmantojot induktīvo pieņēmumu un bāzi:

$$|1, 2, \ldots, k|, k+1, k+2, k+3, k+4 \to |k, k-1, \ldots, 1|, k+4, k+3, k+2, k+1.$$

Tālāk varam ievērot, ka var ņemt $(1, k+4, k+3)$, pēc tam $(2, k+4, k+3)$, pēc tam $(3, k+4, k+3)$ utt., lai dabūtu

$$|k, k-1, \ldots, 1|, k+4, k+3, k+2, k+1 \to k+4, k+3, |k, k-1, k-2, \ldots, 1|, k+2, k+1.$$

Pielietojam to pašu ideju, tikai skaitļiem $k + 2$ un $k + 1$:

$$k+4, k+3, |k, k-1, k-2, \ldots, 1|, k+2, k+1 \to k+4, k+3, \ldots, 1.$$

Redzams, ka prasītais ir iegūts $k+4$ skaitļiem, tādēļ induktīvā pāreja ir pierādīta un prasīto var izdarīt visiem skaitļiem minētajā formā.

Atliek pierādīt, ka n formā $n = 4k + 2$ vai $n = 4k + 3$ prasīto nevar izdarīt. Par *inversiju* sauksim skaitļu pāri (a, b), kur $a < b$ un a rindā atrodas pa labi no b. Ievērosim, ka vienas operācijas veikšana izmaina inversijas tikai starp skaitļiem a, b, c, un atkarībā no to lieluma kopējais inversiju skait var pieaugt par 2, nemainīties vai samazināties par 2, tātad inversiju paritāte operācijas rezultātā nemainās.

Sākotnējā virknē ir 0 inversiju, bet gala sakārtotajā stāvoklī visi pāri ir inversijas, tāpēc to ir $\frac{n(n-1)}{2}$. Ja $n \equiv 2 \pmod 4$ vai $n \equiv 3 \pmod 4$, tad skaitlis $\frac{n(n-1)}{2}$ ir nepāra, kas nozīmē, ka galā būtu jāiegūst nepāra skaits inversiju, taču mēs ieguvām, ka sākumā inversiju ir pāra skaits un inversiju paritāte operācijas rezultātā nemainās – pretruna, tādēļ prasīto nav iespējams sasniegt.

4.uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Zemestrīces rezultātā Rīga tika sadalīta n salās. Uz 2 no salām atrodas Instagram ēkas. Sākotnēji starp salām nav tiltu. Džeisons un Edgars spēlē spēli, pamīšus veicot gājienus. Katrā gājienā spēlētājs var uzbūvēt tiltu starp 2 dažādām salām I_1 un I_2, kam izpildās abi nosacījumi:

- I_1 un I_2 nav savienotas ar tiltu;
- vismaz viena no salām I_1 vai I_2 ir tiltu ķēdē savienota ar kādu no 2 salām, uz kuras atrodas Instagram ēka (vai arī uz I_1 vai I_2 atrodas Instagram ēka).

Līdzko spēlētājs uzbūvē tiltu, kas ļauj no vienas Instagram ēkas aiziet uz otru, viņš ir zaudējis, jo Instagram var publicēt visas nozagtās TikTok memes. Ja Džeisons sāk spēli, noteikt katram n spēlētāju, kurš var garantēt uzvaru.

Atrisinājums. Edgars var uzvarēt, ja n ir pāra vai $n \equiv 1 \pmod 4$. Džeisons var uzvarēt, ja $n \equiv 3 \pmod 4$.

Vispirms aplūkosim gadījumu, kad n ir pāra. Modelējam situāciju kā grafu, kurā salas ir virsotnes un tilti ir šķautnes. Tādā gadījumā grafā ir atļauts būvēt divas komponentes, kas sākas no Instagram ēkām. Apzīmēsim komponenšu virsotnes ar A_i un B_i, kur virsotnes numurē to pievienošanas secībā. Tad Instagram ēkas atrodas uz A_1 un B_1. Edgars atbild Džeisona gājieniem pēc būtības simetriski.

- Ja Džeisons kādai no komponentēm pievieno jaunu virsotni, savienojot, piemēram, A_i ar kādu vēl komponentēm nepievienotu virsotni, tad Edgars savā gājienā savieno B_i ar kādu vēl komponentēm nepievienotu virsotni. Tas garantēs, ka šādos gājienos komponenšu struktūra veidojas simetriska, un Edgars vienmēr varēs savu gājienu veikt, jo pēc Edgara gājiena komponentēs kopā ir pāra skaits virsotņu, kas nozīmē, ka komponentēm nepiederošo virsotņu skaits arī ir pāra.
- Ja Džeisons veic gājienu kādā no komponentēm, savienojot divas virsotnes tajā, tad Edgars veic simetrisku gājienu otrā komponentē. Simetrijas dēļ acīmredzami, ka Edgars vienmēr varēs veikt atbildes gājienu.

Tā kā Edgars vienmēr var veikt atbildes gājienu un nezaudēt, un grafā var novilkt galīgu skaitu šķautņu, tad Džeisons kādā brīdī noteikti zaudēs.

Tālāk aplūkosim gadījumu, kad n ir nepāra. Aplūkosim situāciju, kurā kāds no spēlētājiem vairs nevar gājienu, kas nezaudē. Tas nozīmē, ka nevienai no aplūkotajām Instagram ēku komponentēm vairs nevar pievienot klāt jaunu virsotni, tātad visas virsotnes pieder vienai no divām komponentēm, un abās komponentēs vairs nav iespējams novilkt nevienu šķautni komponentes iekšienē, tātad katra komponente ir pilns grafs noteiktam virsotņu skaitam. Šajā situācijā visas šķautnes, ko var vilkt, ir tikai tādas, kas savieno abas komponentes un attiecīgi liek spēlētājam zaudēt.

Pieņemsim, ka vienā komponentē ir $1 \leq k \leq n-1$ virsotnes, bet otrā ir $1 \leq n-k \leq n-1$ virsotnes. Tad pirmajā komponentē ir novilktas visas iespējamās $\frac{k(k-1)}{2}$ šķautnes, bet otrā ir novilktas $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ šķautnes. Kopumā šķautņu skaits ir

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + k(k-n) \equiv \frac{n(n-1)}{2} + k(k-1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod 2,$$

jo n ir nepāra skaitlis un $k(k-1)$ dalās ar 2 neatkarīgi no k paritātes. Tātad zaudējošās situācijas novilkto šķautņu skaita paritāti nosaka $\frac{n(n-1)}{2}$ paritāte jeb n atlikums pēc moduļa 4. Ja $n \equiv 1 \pmod 4$, tad $\frac{n(n-1)}{2}$ ir pāra skaitlis un līdz zaudējošajai situācijai būs veikts pāra skaits gājienu neatkarīgi no komponenšu lieluma. Tātad Edgars (otrais spēlētājs) varēs viennmēr izvēlēties veikt kādu nezaudējošu gājienu un garantēt, ka Džeisons būs spiests veikt gājienu zaudējošajā situācijā. Ja $n \equiv 3 \pmod 4$, tad $\frac{n(n-1)}{2}$ ir nepāra un zaudējošajā situācijā gājiens būs jāveic otrajam spēlētājam, tādēļ Džeisons var garantēt uzvaru, veicot nezaudējošus gājienus. Visi iespējamie gadījumi ir aplūkoti.

5.uzdevums. Uz tāfeles ir uzrakstīti nenegatīvi veseli skaitļi m un n. Ramona un Petr spēlē spēli, pamīšus veicot gājienus. Katrā gājienā ir atļauts nodzēst vienu skaitli uz tāfeles un tā vietā uzrakstīt nenegatīvu veselu skaitli, kas ir mazāks par gājiena laikā nodzēsto skaitli un kas pirms tam ne reizi nav bijis uzrakstīts uz tāfeles. Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena vairs nav iespējams veikt atļautu gājienu. Ja Ramona sāk spēli, kādām m un n vērtībām viņa garantēti var uzvarēt?

Atrisinājums. Ramona var uzvarēt visiem veselu nenegatīvu skaitļu pāriem (m, n), kas nav formā $(2k, 2k)$ vai $(2k+1, 2k)$, kur $k \geq 0$ un skaitļi var būt apmainīti vietām.

Izmantosim pozīciju analīzi, lai pierādītu, ka vienīgās zaudējošās pozīcijas ir formā $(2k, 2k)$ vai $(2k + 1, 2k)$, kur $k \geq 0$ un skaitļi var būt apmainīti vietām. Izmantosim matemātisko indukciju, lai pārietu no $\min(m, n) \leq 2k$ uz $\min(m, n) \leq 2k + 2$.

Bāzes gadījums ir $\min(m, n) \leq 0$, tātad skaitļu pāri formā $(i, 0)$. Ja $i = 0$, tad $(0, 0)$ nav iespējams veikt gājienu un spēlētājs, kam jāiet, ir zaudējis, tātad šī ir zaudējoša pozīcija. Analoģiski, ja $i = 1$, tad $(1, 0)$ nav iespējams veikt gājienus. Savukārt, ja $i \geq 2$, tad spēlētājs var veikt gājienu uz $(1, 0)$ un nostādīt otru spēlētāju zaudējošā pozīcijā. Tātad sākotnējā pozīcija ir uzvaroša.

Veicam induktīvo pāreju. Aplūkojam situāciju $\min(m, n) = 2k + 1$, kurā uz tāfeles ir uzrakstīts pāris $(i, 2k + 1)$, kur $i \geq 2k + 1$. Spēlētājs, kurš veic gājienu, var pāriet uz situāciju $(2k + 1, 2k)$, nodzēšot i un uzrakstot tā vietā $2k$. Acīmredzami, ka mazāki skaitļi par $\min(m, n)$ iepriekš spēles gaitā nevar būt uzrakstīti, jo skaitļi visu laiku samazinās. No induktīvā pieņēmuma $(2k + 1, 2k)$ ir zaudējoša pozīcija, tādēļ sākotnējā pozīcija $(i, 2k + 1)$, kur $i \geq 2k + 1$, ir uzvaroša.

Aplūkojam situāciju $\min(m, n) = 2k+2$, kurā uz tāfeles ir uzrakstīts pāris $(i, 2k+2)$, kur $i \geq 2k+2$.

- Ja $i = 2k + 2$, tad uz tāfeles ir pāris $(2k + 2, 2k + 2)$. No šejienes var nonākt tikai pozīcijās ar mazākiem skaitļiem, pie tam neviena no tām nebūs formā $(2j + 1, 2j)$ vai $(2j, 2j)$, kas nozīmē, ka var aiziet tikai uz uzvarošām pozīcijām, kurās gājienu veiks otrs spēlētājs. Tātad sākotnējā pozīcija ir zaudējoša.

- Ja $i = 2k+3$, tad uz tāfeles ir pāris $(2k+3, 2k+2)$. Ja spēlētājs veic gājienu ar skaitli $2k+3$, tad jāraksta skaitlis, kas ir mazāks par $2k+2$, un var veikt to pašu secinājumu, ko iepriekšējā punktā, ka tiks nonākts uzvarošā pozīcijā. Ja spēlētājs veic gājienu ar $2k+2$, tad rodas situācija $(2k+3, j)$, kur $j < 2k+2$. No induktīvā pieņēmuma un iepriekš iegūta var secināt, ka šī pozīcija ir uzvaroša, tātad sākotnējā pozīcija ir zaudējoša, jo visi iespējamie gājieni ved uz uzvarošām pozīcijām.

- Ja $i > 2k + 3$, tad uz tāfeles ir pāris $(i, 2k + 2)$. Iepriekš noskaidrojām, ka $(2k + 3, 2k + 2)$ ir zaudējoša pozīcija, tādēļ spēlētājs var savā gājienā pāriet uz šo pozīciju, kas padara sākotnējo pozīciju par uzvarošu. Var arī ievērot, ka $2k + 3$ nebūs iepriekš uzrakstīts skaitlis, jo, ja tas būtu, tad uzvarošais spēlētājs pēc aprakstītās stratēģijas būtu nākamajā gājienā uzrakstījis $2k + 2$, un aplūkotā situācija nebūtu sasniegta.

Aplūkoti visi iespējamie gadījumi, tādēļ esam veikuši induktīvo pāreju uz $\min(m, n) \leq 2k + 2$ un parametrizējuši tās pozīcijas, kurās zaudē spēlētājs, kas sāk spēli. Spēles stratēģiju katrā gājienā, lai uzvarētu spēlētājs, kurš savā pirmo gājienu veiks no uzvarošas pozīcijas, var izsecināt no induktīvās pārejas. Šāda stratēģija arī noteikti eksistē, jo spēle ir deterministiska un katram spēlētājam ir pieejama pilna informācija, tādēļ spēles stāvokļu kokā noteikti var atrast zaru, kurš garantēti sniedz labāko rezultātu.

6.uzdevums. Kastē ir k kārtis. Katrai kārtij vienā pusē ir uzrakstīts skaitlis, bet otrā pusē - burts. Ansis un Adriāns spēlē spēli. Sākumā Ansis paņem visas kārtis, saliek tās rindā un katrai kārtij izvēlas, kuru pusi pagriezt uz augšu. Pēc tam Adriāns katrā gājienā izvēlas kādu kārti un apgriež gan to, gan tai blakusesošās kārtis (tātad vienā gājienā tiek apgrieztas 2 vai 3 kārtis). Spēles ietvaros Adriānam ir ļauts veikt ne vairāk kā k gājienus. Adriāns uzvar, ja pēc viņa veiktajiem gājieniem visas kārtis rindā ir pagrieztas ar skaitli uz augšu, pretējā gadījumā uzvar Ansis.
Noteikt, kurš no spēlētājiem var garantēt uzvaru, ja

a) $k = 2024$;

b) $k = 2025$.

Atrisinājums. **a)** Ansis var garantēt uzvaru.

Sākumā Ansim vajag pirmo kārti pagriezt ar skaitli uz augšu, bet pārējās – ar burtu uz augšu. Pierādīsim, ka tādā gadījumā Adriāns nevar pagriezt visas kārtis uz augšu. Sanumurējam kārtis no 1 līdz 2024 un iekrāsojam tās, kuru numurs dod atlikumu 1 vai 2 (mod 3). Kopumā šādu kāršu ir $675 \cdot 2 = 1350$, pie tam abos rindas galos ir divas secīgas iekrāsotas kārtis.

Viegli redzēt, ka jebkurā vietā, kur Adriāns veiks gājienu, viņam nāksies apgriezt divas iekrāsotas kārtis (gan rindai pa vidu, gan rindas galā). Saskaitīsim, cik ir kāršu, kas ir iekrāsotas un ar skaitli uz augšu. Sākumā Ansis kāršu izkārtojumu izvēlējās tā, lai 1 iekrāsotā kārts būtu ar skaitli uz augšu, kas ir nepāra skaits. Ja Adriāns katrā gājienā apgriež 2 iekrāsotās kārtis, tad aplūkotais iekrāsoto skaits ar skaitli uz augšu palielinās par 2, nemainās vai samazinās par 2. Redzams, ka gājienā aplūkotais skaits nemaina paritāti. Tas nozīmē, ka jebkurā brīdī būs nepāra skaits iekrāsoto kāršu ar skaitli uz augšu. Taču, ja visas kārtis rindā būtu ar skaitli uz augšu, tad būtu 1350 iekrāsotās kārtis ar skaitli uz augšu, kas ir pāra skaitlis - pretruna, tātad Adriāns prasīto nevar sasniegt.

b) Adriāns var garantēt uzvaru.

Vispirms veiksim novērojumu – nav svarīgi, cik reižu tiek apgriezta noteikta kārts, bet ir tikai svarīgi, kāda ir tās apgriešanas reižu paritāte. Tas nozīmē, ja procesa gaitā Adriāns kādu kārti izvēlas 2 reizes, viņš sasniedz tādu pašu situāciju, kā ja viņš nebūtu šo kārti izvēlējies vispār. Tātad Adriāns var sākotnēji izvēlēties stratēģiju, kurā viņš noteiktu kārti izvēlas vairākas reizes, un pirms pašu gājienu veikšanas katras kārts izvēļu skaitu reducēt pēc moduļa 2, tādā veidā nodrošinot, ka jebkuru kārti viņš izvēlēsies 0 vai 1 reizi, kopumā veicot ne vairāk kā 2025 izvēles (nejaukt izvēli ar apgriešanu – kārti izvēlas, un tad apgriež gan to, gan kaimiņu kārtis; procesa gaitā kārti var nākties apgriezt vairākas reizes, taču tā būs izvēlēta gājienā ne vairāk kā 1 reizi). Acīmredzami, ka gājienu secība nav svarīga.

Veidosim Adriāna stratēģiju, sākotnēji kārtis, iespējams, izvēloties vairākas reizes. Vispirms Adriāns sāk iet pa kārtīm no rindas kreisās puses, atrodot pirmo kārti, kas ir ar burtu uz augšu. Ja tā ir k-tajā pozīcijā, tad Adriāns apgriež $(k + 1)$-to kārti. Tad k-tā kārts būs ar skaitli uz augšu, un Adriāns atkārto iešanu no kreisās puses. Acīmredzami, ka nākamajā reizē viņš apstāsies tālāk pa labi no k-tās kārts. Šādā veidā būs iespējams apgriezt visas kārtis ar skaitli uz augšu, izņemot pašu labējo kārti 2025.pozīcijā. Ja pēc minētā procesa 2025.kārts ir ar skaitli uz augšu, tad Adriāns var pielietot izvēļu skaita redukciju $\pmod 2$, un prasīto būs sasniedzis.

Ja pēc minētā procesa 2025.kārts ir ar burtu uz augšu, tad Adriāns izvēlas 1.kārti. Ar burtu uz augšu būs 1., 2. un 2025.kārts. Pa vidu tām ir 2022 kārtis, kuru kopējais skaits dalās ar 3. Tad tās var sadalīt pa nepārklājošiem kāršu trijniekiem un katrā no tiem izvēlēties vidējo kārti, lai panāktu, ka visas kārtis ir pagrieztas ar burtu uz augšu. Visbeidzot, Adriāns visas 2025 kārtis sadala nepārklājošos trijniekos, katram no tiem izvēloties vidējo kārti, kas panāks, ka visas kārtis ir pagrieztas ar skaitli uz augšu. Iegūtajai stratēģijai pielietojot kāršu izvēļu redukciju pēc moduļa 2, prasītais būs sasniegts.

7.uzdevums Konferencē piedalās $2n+1$ runātāji (n – naturāls skaitlis). Katri divi no tiem ir vai nu draugi, vai svešinieki. Divi apsargi spēlē spēli, pamīšus veicot gājienus. Apsargs, kurš sāk spēli, pirmajā gājienā var izvēlēties jebkuru no konferences runātājiem. Tālāk katrā gājienā spēlētājs izvēlas konferences runātāju, kuru pirms tam nebija izvēlējies neviens no spēlētājiem un kurš ir draugs pēdējam izvēlētajam runātājam (pēdējo izvēlēto runātāju acīmredzami pirms brīža izvēlējās otrs spēlētājs). Uzvar tas spēlētājs, pēc kura gājiena vairs nav iespējams veikt citu atļautu gājienu. Vai kādam spēlētājam eksistē uzvaroša stratēģija neatkarīgi no tā, kādi runātāji savā starpā draudzējas?

Atrisinājums. Pirmais spēlētājs (kurš sāk) vienmēr var garantēti uzvarēt.

Attēlosim draudzības un runātājus kā grafu, kur runātāji ir virsotnes un draudzības ir šķautnes. Aplūkojam šajā grafā neatkarīgu šķautņu kopas – tādas šķautņu kopas, kur nekādām divām kopas šķautnēm nav kopīga virsotne. Starp šīm kopām izvēlamies lielāko jeb to, kurā ir lielākais šķautņu skaits. Apzīmējam šo šķautņu virsotnes kā $A_1 - B_1, A_2 - B_2, \ldots, A_k - B_k$. Tālāk visi aprakstītie indeksi būs robežās starp 1 un k.

Tā kā grafā ir nepāra skaits virsotņu, tad eksistē virsotne C, kura nav atrodama starp iepriekš apzīmētajām. Savā pirmajā gājienā pirmais spēlētājs izvēlas to runātāju, kam atbilst virsotne C. Vienīgās virsotnes, ar ko var būt savienota C, ir starp A_i un B_j. Ja būtu kāda cita virsotne D, kas nav starp A_i un B_j, tad izvēlētajai neatkarīgu šķautņu kopai varētu pievienot šķautni $C - D$, kas būtu pretrunā ar tās maksimalitāti. Tātad otrais spēlētājs savā pirmajā gājienā var izvēlēties tikai kādu no virsotnēm A_i un B_j.

Tālāk pirmā spēlētāja stratēģija ir sekot izvēlētajiem šķautņu pāriem – ja otrais spēlētājs savā gājienā izvēlas A_i, tad pirmais spēlētājs izvēlas B_i vai otrādi. No neatkarīgu šķautņu kopas definīcijas katrs pāris draudzējas savā starpā. Tā kā ir galīgs skaits šādu pāru, tad vienā brīdī otrais spēlētājs vairs nevarēs veikt jaunu gājienu un zaudēs. Atliek pierādīt, ka otrais spēlētājs nevar kādā brīdī izvēlēties virsotni, kas nav starp A_i vai B_j.

Pieņemsim, ka spēles gaitā eksistē brīdis, kad otrais spēlētājs izvēlas virsotni D, kas ir savienota ar iepriekšējā gājienā pirmā spēlētāja izvēlēto A_y vai B_y, taču nav starp A_i vai B_j. Aplūkojam pirmo šādu brīdi. Tādā gadījumā līdz šim brīdim spēle ir veikta, izvēloties virsotnes

$$C - (A_x - B_y) - (A_{x+1} - B_{x+1}) - \ldots - (A_y - B_y) - D,$$

kur vienas iekavas ietvaros virsotņu secība var būt apmainīta. Ievērosim, ka izvēlētajā neatkarīgu šķautņu kopā bija iekļautas tās šķautnes, kas ir iekavās. Taču, ja aplūko tās šķautnes, kas ir ārpus iekavām, to ir par vienu vairāk nekā iekavās esošo. Apvienojot tās ar vēl neizmantotajiem virsotņu pāriem $A_i - B_i$, tiek iegūta lielāka neatkarīgu šķautņu kopa, kas ir pretruna. Tātad šāda situācija nav iespējama, kas pierāda, ka pirmais spēlētājs var garantēti uzvarēt.