Grafi - atrisinājumi

1.uzdevums. Hokeja turnīrā piedalījās n komandas, kas spēlēja katra ar katru vienu reizi, ikvienai spēlei beidzoties ar vienas komandas uzvaru. Pierādīt, ka visas komandas var nostādīt rindā tā, ka ikviena komanda ir uzvarējusi to komandu, kas atrodas rindā blakus pa kreisi.

Atrisinājums. Modelēsim uzdevuma situāciju kā orientētu grafu, kur virsotnes ir komandas un šķautnes ir spēles, pie tam šķautne iet no zaudētāja uz uzvarētāju. Starp katrām divām virsotnēm tad ir viena šķautne. Pierādīsim, ka šādā grafā eksistē Hamiltona ceļš, kas ir ekvivalents uzdevumā prasītajai rindai. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Acīmredzami, ka vienu komandu var nostādīt rindā.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka orientētā pilnā grafā ar $n = k - 1$ virsotnēm, kur $k \geq 2$, eksistē Hamiltona ceļš.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasītais izpildās arī orientētam pilnam grafam ar $n = k$ virsotnēm. Paslēpjam vienu no virsotnēm (apzīmējam to ar v) ar visām šķautnēm, kas ir savienotas ar to. Paliek orientēts pilns grafs ar $n - 1$ virsotni, kam pielietojam induktīvo pieņēmumu un iegūstam Hamiltona ceļu, ko apzīmēsim $v_1 v_2 \ldots v_{n-1}$. Aplūkojam 3 gadījumus.

- Ja grafā ir šķautne $v \to v_1$. Tādā gadījumā pievienosim v ar šo šķautni iepriekš iegūtajam Hamiltona ceļam, un prasītais izpildās.
- Ja grafā ir šķautne $v_{n-1} \to v$. Tādā gadījumā pievienosim v ar šo šķautni iepriekš iegūtajam Hamiltona ceļam, un prasītais izpildās.
- Ja grafā nav abu iepriekš aplūkoto šķautņu. Tātad ir novilktas šķautnes $v_1 \to v$ un $v \to v_{n-1}$. Aplūkojam mazāko indeksu $i \geq 2$, kuram eksistē šķautne $v \to v_i$ (tāds eksistē, jo ir $v \to v_{n-1}$). Tādā gadījumā no i minimalitātes grafā būs šķautne $v_{i-1} \to v$. Iegūstam Hamiltona ceļu $v_1 \to \ldots \to v_{i-1} \to v \to v_i \to \ldots \to v_{n-1}$, un prasītais izpildās.

Esam aplūkojuši visus iespējamos gadījumus, tātad Hamiltona ceļš eksistē un pāreja ir noslēgta. Izvēloties komandas tām atbilstošo virsotņu Hamiltona ceļa secībā, var sasniegt uzdevumā prasīto.

2.uzdevums. Grafā ir p virsotnes, kuras sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz p, un q šķautnes, kas sanumurētas ar skaitļiem no $p+1$ līdz $p+q$. Izrādījās, ka visām šķautnēm izpildās – šķautnes numuram pieskaitot tās galapunktu (virsotņu) numurus, tiek iegūts viens un tas pats skaitlis s. Papildus zināms, ka visām virsotnēm grafā ir vienāda pakāpe. Pierādīt, ka

$$s = \frac{1}{2}(4p + q + 3).$$

Atrisinājums. Dots, ka visām virsotnēm ir vienāda pakāpe, ko apzīmējam ar d. Tādā gadījumā $2q = dp$, jo katrā no p virsotnēm ir d šķautņu gali un katrai šķautnei ir 2 gali. Varam izteikt $d = \frac{2q}{p}$.

Apzīmēsim visu šķautņu aprēķināto skaitļu summu ar S. Viegli redzams, ka $S = qs$. Ievērosim, ka kopējā summā katras šķautnes numurs tiek ieskaitīts vienu reizi, bet katras virsotnes numurs – tik reižu, cik tā ir galapunkts šķautnei, kas ir virsotnes pakāpe, tātad d reizes. Varam izteikt

$$S = qs = d \cdot (1 + 2 + \cdots + p) + ((p+1) + (p+2) + \cdots + (p+q)) =$$
$$= \frac{2q}{p} \cdot \frac{p(p+1)}{2} + q \cdot \frac{((p+1) + (p+q))}{2} = \frac{q}{2}(4p + q + 3),$$

kas nozīmē, ka $s = \frac{1}{2}(4p + q + 3)$.

3.uzdevums. Labirinta pilsētā katrā ceļu krustojumā satiekas tieši 3 ielas (šajos krustojumos atrodas ielu sākumi un beigas, t.i., nav tādu ielu, kas ietu cauri kādam krustojumam un turpinātos tālāk). Katra iela ir nokrāsota vienā no trim krāsām, pie tam katrā krustojumā satiekas trīs dažādu krāsu ielas. Pilsētā arī ir trīs ielas, kuras iziet ārā no Labirinta pilsētas un bezgalīgi turpinās tālajos valsts plašumos. Pierādīt, ka šīs trīs no pilsētas izejošās ielas ir visas atšķirīgās krāsās.

Atrisinājums. Apzīmēsim krustojumus kā grafa virsotnes un ielas kā šķautnes, pie tam katra šķautne ir nokrāsota vienā no 3 krāsām. Papildus tam pieņemsim, ka plašumi ir vēl viens krustojums, kurā satiekas 3 no pilsētas izejošās ielas. Ja pilsētas iekšienē ir n krustojumi, tad izveidojas grafs ar $n+1$ virsotnēm, kur no katras iziet 3 šķautnes. Apzīmējot šķautņu skaitu grafā ar E, izpildās sakarība

$$2E = 3(n+1).$$

No tās var secināt, ka $n+1$ jābūt pāra skaitlim, tātad n ir nepāra. Pieņemsim, ka īpašajā plašumu krustojumā ieiet c_1 pirmās krāsas šķautnes, c_2 otrās krāsas šķautnes un c_3 trešās krāsas šķautnes. Zināms, ka $c_1+c_2+c_3=3$.

Aplūkojam šķautnes, kuras ir pirmajā krāsā. Kopā šīm šķautnēm ir $n+c_1$ galu, kas ieiet krustojumos (viens katrā no n pilsētas krustojumiem un c_1 plašumu krustojumā). Tā kā galu skaits ir 2 reizes lielāks nekā šķautņu skaits, tad $n+c_1$ jābūt pāra skaitlim. Ņemot vērā, ka n ir nepāra, tad c_1 arī ir nepāra un $c_1 \geq 1$. Līdzīgu secinājumu var veikt arī par $c_2 \geq 1$ un $c_3 \geq 1$. Tātad $c_1+c_2+c_3 \geq 3$. Ņemot vērā iepriekšējo, ir jāizpildās vienādībai, tātad $c_1=c_2=c_3=1$, kas nozīmē, ka visas no pilsētas izejošās šķautnes ir katra savā krāsā.

4.uzdevums. Kādā valstī ir 32 lidostas, katras divas no tām abos virzienos ir savienotas ar tiešajiem avioreisiem. Satiksmes ministrija ir noteikusi, ka 470 no šiem reisiem ir jābūt bezmaksas. Katru dienu lidsabiedrība izvēlas kādu vēl iepriekš neizvēlētu lidostu pāri, bet satiksmes ministrija nosaka, kurā virzienā šis reiss būs bezmaksas (otrā virzienā tas paliek par maksu).
Pierādīt, ka lidsabiedrība lidostu pārus var izvēlēties tā, ka pēc 470 dienām joprojām būs divas tādas lidostas A un B, ka no A uz B nevarēs aizlidot bez maksas pat vairākkārt pārsēžoties.

Atrisinājums. Apzīmēsim lidostas ar grafa virsotnēm sākotnēji grafā bez šķautnēm, un vilksim starp divām virsotnēm orientētu šķautni tajā lidojuma virzienā, kurā tiek noteikts bezmaksas reiss. Pierādīsim, ka lidsabiedrība var garantēt, lai būtu lidosta, uz kuru nevar bez maksas aizlidot no jebkuras citas lidostas.

Lidsabiedrība izvēlas šādu stratēģiju – tā sadala lidostas pa pāriem, un pirmajās 16 dienās izvēlas šos pārus. Pēc 16 dienām grafā būs 16 virsotnes, kurās ieiet viena šķautne, un 16 virsotnes, no kurām iziet viena šķautne. Aplūkojam tās 16 lidostas, no kuru virsotnēm iziet viena šķautne. Sadalām tās atkal pa pāriem un tos izvēlamies. Pēc 8 dienām starp šīm lidostām būs 8 lidostas, no kuru grafa virsotnēm iziet 2 šķautnes. Turpinām šo procesu iteratīvi vēl 3 reizes, līdz galā paliks viena lidosta, no kuras iziet 5 šķautnes.

Aplūkojam pārējās 31 lidostas. Izvēlamies pārus starp tām līdz brīdim, kad visi pāri starp šīm lidostām ir izvēlēti. Tādā gadījumā starp šīm lidostām būs kopumā izvēlēti $\frac{31 \cdot 30}{2} = 465$ lidostu pāri, kā arī vēl viena īpašajai lidostai ir izejoši 5 bezmaksas lidojumi, kas nav starp minētajiem 465, tātad kopā būs veiktas 470 izvēles. Šajā brīdī varam redzēt, ka uz īpašo lidostu nav iespējams no jebkuras citas lidostas aizlidot bez maksas, jo visi tajā ieejošie reisi ir maksas, kas pierāda prasīto.

5.uzdevums. Matemātikas olimpiādē piedalījās vairāki dalībnieki, no kuriem daži ir draugi viens ar otru. Divus dalībniekus A un B sauksim par *paziņām*, ja eksistē dalībnieki $C_1, C_2, \ldots, C_n$, ka A un C_1 ir draugi, C_1 un C_2 ir draugi utt., kā arī C_n un B ir draugi. Papildus tam, ja A un B ir draugi, tad uzskatām tos arī vienlaicīgi par paziņām.
Olimpiādes laikā dalībnieki savā starpā nodibināja jaunas draudzības, pie tam pēc olimpiādes izrādījās, ka tagad katram dalībniekam ir vismaz viens draugs. Sauksim dalībnieku par *īpašu*, ja pēc olimpiādes viņa paziņu skaits ir divreiz lielāks, nekā tas bija pirms olimpiādes.
Pierādīt, ka īpašu dalībnieku skaits nepārsniedz $\frac{2}{3}$ no kopējā olimpiādes dalībnieku skaita.

Atrisinājums. Attēlosim dalībniekus kā grafa virsotnes un divas paziņas savienosim ar šķautni. Ievērosim, ka grafs sastāv no vairākām komponentēm, kur katrā komponentē jebkuri divi dalībnieki ir paziņas, tātad katrā komponentē ir novilktas visas iespējamās šķautnes.

Aplūkosim patvaļīgu dalībnieku, kas pēc olimpiādes ir īpašs. Pieņemsim, ka pirms olimpiādes viņš bija komponentē, kur ir $k \geq 2$ dalībnieki. Ja dalībnieks bija viens pats komponentē, viņš nevar būt īpašs, jo pirms olimpiādes viņam bija 0 paziņu, bet tagad ir vismaz 1, taču $0 \cdot 2 = 0$. Šādam dalībniekam pirms olimpiādes bija $k-1$ paziņa, bet pēc olimpiādes ir $2k-2$ paziņas. Tas nozīmē, ka dalībnieka komponentei pievienojās vēl $k-1$ dalībnieki no vienas vai vairākām citām komponentēm. Ievērosim, ka šiem pievienotajiem dalībniekiem katram pirms olimpiādes bija ne vairāk kā $k-2$ paziņas, pretējā gadījumā tiktu pievienotas vairāk kā $k-1$ jaunas paziņas īpašajam dalībniekam. Taču pēc olimpiādes pievienotajiem dalībniekiem ir $2k-2$ paziņas (jo atkal veidojas pilna komponente), tādēļ tie nevar būt īpaši, jo $2(k-2) = 2k-4$.

Tas nozīmē, ka ikvienā grafa komponentē pēc olimpiādes, kurā ir īpaši dalībnieki, to skaits nepārsniedz $\frac{k}{2k-1}$ no komponentes dalībnieku skaita. Viegli ievērot, ka šī funkcija lielāko vērtību sasniedz pie mazākām k vērtībām. Kā iepriekš noskaidrojām, mazākā pieļaujamā vērtība ir $k=2$, tātad nevienā komponentē pēc olimpiādes īpašo dalībnieku skaits nepārsniedz $\frac{2}{2\cdot 2-1} = \frac{2}{3}$ no komponentes dalībnieku skaita. Acīmredzami, ka tad īpašo dalībnieku skaits nevar pārsniegt $\frac{2}{3}$ no kopējā dalībnieku skaita, ja katrā nodalītā grafa daļā tas nav lielāks par $\frac{2}{3}$ no dalībniekiem, kas pierāda prasīto.

6.uzdevums. Atrast lielāko naturālo skaitli k, kuram eksistē vienkāršs 2023 virsotņu grafs G, kam vienlaicīgi izpildās minētās trīs īpašības:

1. G nesatur ciklus ar garumu 3;
2. katram naturālam i, kur $1 \le i \le k$, eksistē vismaz viena G virsotne, kuras pakāpe ir i;
3. visām G virsotnēm pakāpe nav lielāka par k.

Atrisinājums. Atbilde ir $k = 1348$.

Aplūkojam virsotni, kuras pakāpe ir k. Tās kaimiņu virsotnēm maksimālā pakāpe ir $n-k$, jo nekādas divas no šīm k virsotnēm savā starpā nevar būt savienotas, citādi grafā veidotos cikls ar garumu 3. Tas nozīmē, ka šīs k virsotnes var maksimāli būt ar $n-k$ dažādām pakāpēm.

Aplūkojam atlikušās $n-k-1$ virsotnes. Tās var radīt ne vairāk kā $n-k-1$ dažādas virsotņu pakāpes. Tā kā grafā ir jābūt k dažādām virsotņu pakāpēm, tad jāizpildās nevienādībai

$$1 + (n-k) + (n-k-1) \ge k,$$

pretējā gadījumā uzdevuma nosacījumi neizpildītos. Pārveidojot nevienādību, iegūst $2n \ge 3k \implies \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \ge k$. Tātad $k \le \left\lfloor \frac{2 \cdot 2023}{3} \right\rfloor = 1348$.

Atliek atrast grafu, kuram $k = 1348$ un izpildās visas minētās īpašības. Apzīmējam $t = 674$, tad $3t + 1 = 2023$. Mēs vēlamies konstruēt tādu grafu, kurā ir virsotnes ar pakāpēm $1, 2, \ldots, 2t$. Sadalām virsotnes grupās: $A_1, A_2, \ldots, A_{2t}$, tad arī $B_1, B_2, \ldots, B_t$, kā arī viena virsotne X. Savienojam X ar visām virsotnēm $A_1, A_2, \ldots, A_{2t}$. Tādā gadījumā X pakāpe ir $2t$.

Tālāk savienojam katru A_i, kur $2 \le i \le t$, ar virsotnēm $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$. Tagad virsotnēm $A_1, A_2, \ldots, A_t$ ir attiecīgi pakāpes $1, 2, \ldots, t$ (jo tās ir savienotas arī ar X), bet $B_1, B_2, \ldots, B_t$ attiecīgi ir pakāpes $t-1, t-2, \ldots, 0$. Visbeidzot, savienojam katru B_i ar visām virsotnēm $A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots, A_{2t}$. Tad

- $B_1, B_2, \ldots, B_t$ attiecīgi ir pakāpes $2t-1, 2t-2, \ldots, t$;
- $A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots, A_{2t}$ visām ir pakāpe $t+1$;
- $A_1, A_2, \ldots, A_t$ ir attiecīgi pakāpes $1, 2, \ldots, t$;
- X ir pakāpe $2t$.

Visas pakāpes ir iegūtas, tās nepārsniedz $2t$, kā arī grafā nav ciklu ar garumu 3, jo visi savienojumi ir starp divām grupām – A_i un $X \cap B_j$. Ja grafā būtu cikls ar garumu 3, tad divām virsotnēm no vienas grupas būtu jābūt savienotām savā starpā, taču konstrukcija nodrošina, lai tā nebūtu. Tātad lielākā iespējamā k vērtība patiešām ir 1348.

7.uzdevums Dots rūtiņu laukums $m \times n$, kur m un n ir nepāra skaitļi. Laukums noklāts ar 1×2 domino figūrām tā, ka ikvienu rūtiņu noklāj tieši viena domino figūra, izņemot kreiso apakšējo laukuma stūra rūtiņu, kas nav noklāta. Vienā gājienā ir atļauts taisni, bez rotēšanas pabīdīt kādu domino figūru uz nenoklāto rūtiņu (ja tās bīdīšanai netraucē citas figūras), tādā veidā nosedzot iepriekš nenoklāto rūtiņu un padarot vienu citu laukuma rūtiņu atklātu.
Pierādīt, ka, veicot minētos gājienus, var jebkuru laukuma stūra rūtiņu padarīt atklātu.

Atrisinājums. Aplūkojam tās rūtiņas, kurām ir nepāra gan rindas, gan kolonnas numurs. Skaidrs, ka tās ir vienīgās rūtiņas, kas var kļūt atklātas, jo sākumā ir atklāta rūtiņa $(1, 1)$ un katrā gājienā viena no koordinātām mainās par 2. Pierādīsim, ka jebkuru šādu rūtiņu ir iespējams ar noteiktu gājienu secību atklāt.

Izveidojam grafu, kurā virsotnes ir aplūkotās nepāra rūtiņas. Ja nepāra rūtiņu nosedz domino, tad vilksim orientētu šķautni no šīs rūtiņas uz to rūtiņu, kuras virzienā iet otra domino rūtiņa. Tādā gadījumā no katras nepāra rūtiņas iziet šķautne, izņemot sākotnēji atklāto rūtiņu. Vērts ievērot, ka m un n ir nepāra, tādēļ pārējās stūra rūtiņas arī ir nepāra rūtiņas. Ja pieņem, ka laukumā ir k nepāra rūtiņas, tātad attiecīgi k virsotnes grafā, tad ieguvām, ka grafā ir novilktas $k-1$ šķautnes. Ja pierāda, ka grafā nav ciklu, tad varēs secināt, ka tas ir koks un viss grafs attiecīgi ir saistīts, kas pierādīs prasīto, jo starp jebkurām divām nepāra rūtiņām varēs atrast ceļu, kuram sekojot, domino kauliņus varēs pārbīdīt.

Pieņemsim pretējo, ka grafā eksistē cikls. Sekojot cikla šķautnēm, var iegūt, ka izveidojas domino kauliņu cikls, kurš ierobežo kādu rūtiņu reģionu. Pierādīsim, ka šajā reģionā ir nepāra skaits rūtiņu. Varam ievērot, ka minētā cikla stūra rūtiņas visas ir nepāra. Ja cikls nav taisnstūra formas, veicam ar to pārveidojumu – aplūkojam kādu ieliektu stūri un *atlokām* to izliektā veidā (blakus stūros izveidojam perpendikulāru domino rindu tai, kas veido ieliektu stūri). Var viegli pārbaudīt iespējamos atlocīšanas gadījumus, lai secinātu, ka cikla ierobežotajam laukumam tiek pievienots pāra skaits rūtiņu. Tas nozīmē, ka operācijas rezultātā ierobežoto rūtiņu laukuma paritāte nemainās. Aplūkojot taisnstūrveida ciklu, kuram visi stūri ir nepāra rūtiņās, var viegli secināt, ka tas ierobežo nepāra skaitu rūtiņu. Tātad arī sākotnējais cikls ierobežoja nepāra skaitu rūtiņu.

Ja cikls ierobežo nepāra skaitu rūtiņu, tad tās nevar būt pilnībā noklātas ar domino kauliņiem, tātad starp tām ir arī atklātā rūtiņa. Taču sākotnēji atklātā rūtiņa ir laukuma stūrī, ko acīmredzami nevar ierobežot cikls. Tādēļ aplūkotajā grafā cikli nevar eksistēt, tāpēc tas attiecīgi ir koks, kas ir saistīts. No tā iegūstam prasīto.