Indukcija - atrisinājumi

1.uzdevums. Fibonači skaitļu virkni definē $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ visiem naturāliem n. Pierādīt šādas sakarības:

- $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ visiem naturāliem n;
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ visiem naturāliem $n \geq 2$;
- $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ visiem naturāliem $m, n \geq 2$.

Atrisinājums. Visām sakarībām to pierādīšanai izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

a) Indukcijas bāze. $n = 1$, tad $F_2 = F_3 - 1$ jeb $1 = 2 - 1$, kas ir patiesi.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam $n = k$ izpildās $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2k} = F_{2k+1} - 1$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim to $n = k + 1$, izmantojot induktīvo pieņēmumu.

$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2k} + F_{2k+2} = (F_{2k+1} - 1) + F_{2k+2} = F_{2k+3} - 1,$$

kas bija jāpierāda.

b) Indukcijas bāze. $n = 2$. Tad $F_1F_3 - F_2 = 1 \cdot 2 - 1 = 1 = (-1)^2$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam $n = k$ izpildās $F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim to $n = k + 1$, izmantojot induktīvo pieņēmumu.

$$F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 = F_k(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}(F_{k-1} + F_k) = F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} = (-1) \cdot (-1)^k = (-1)^{k+1},$$

kas bija jāpierāda.

c) Katram fiksētam $m \geq 2$ pierādīsim prasīto visiem $n \geq 2$.

Indukcijas bāze. $n = 2$. Tad $F_{m+2} = F_1F_m + F_2F_{m+1} = F_m + F_{m+1}$ no Fibonači skaitļu definīcijas.
$n = 3$. Tad $F_{m+3} = F_2F_m + F_3F_{m+1} = F_m + 2F_{m+1} = F_{m+1} + F_{m+2}$ no Fibonači skaitļu definīcijas.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturāliem $n = k - 2$ un $n = k - 1$, kur $k \geq 4$, izpildās

$$F_{k-2+m} = F_{k-3}F_m + F_{k-2}F_{m+1}$$
$$F_{k-1+m} = F_{k-2}F_m + F_{k-1}F_{m+1}$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim to $n = k$, izmantojot induktīvo pieņēmumu.

$$F_{k+m} = F_{k-2+m} + F_{k-1+m} = (F_{k-3}F_m + F_{k-2}F_{m+1}) + (F_{k-2}F_m + F_{k-1}F_{m+1}) =$$
$$= (F_{k-3} + F_{k-2})F_m + (F_{k-2} + F_{k-1})F_{m+1} = F_{k-1}F_m + F_kF_{m+1},$$

kas pierāda prasīto katrai m vērtībai visiem n, tātad visām iespējamām $(m; n)$ vērtībām.

2.uzdevums. Līnijzemē ir $n \geq 1$ pilsētas, kas izvietotas taisnā līnijā uz ceļa no kreisās uz labo pusi. Katrai pilsētai ir *kreisais* buldozers, kurš atrodas kreisajā pusē pilsētai un ir vērsts to pilsētu virzienā, kas atrodas pa kreisi, kā arī *labais* buldozers, kurš atrodas labajā pusē pilsētai un ir vērsts to pilsētu virzienā, kas atrodas pa labi. Visu $2n$ buldozeru izmēri ir cits no cita atšķirīgi. Katru reizi, kad uz ceļa satiekas kreisais un labais buldozers, lielākais no tiem nostumj mazāko nost no ceļa. Toties buldozeru aizmugures ir diezgan neaizsargātas – ja buldozers braucot sasniedz kāda cita buldozera aizmuguri, tad braucošais buldozers nostumj otru nost no ceļa neatkarīgi no tā izmēra.
Aplūkosim divas patvaļīgas pilsētas A un B, kur B atrodas pa labi no A. Teiksim, ka pilsēta A var *aizslaucīt* pilsētu B, ja A labais buldozers var aizbraukt līdz pilsētas B centram, nostumjot no ceļa visus buldozerus, ko tas satiek savā ceļā. Līdzīgā veidā var teikt, ka pilsēta B var aizslaucīt pilsētu A, ja B kreisais buldozers var aizbraukt līdz pilsētas A centram, nostumjot no ceļa visus buldozerus, ko tas satiek savā ceļā.
Pierādīt, ka Līnijzemē eksistē tieši viena pilsēta, kuru nevar aizslaucīt neviena cita pilsēta.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Acīmredzami, ka prasītais izpildās.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem naturāliem $n < k$, kur $k \geq 2$, prasītais izpildās n pilsētām.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasītais izpildās arī $n = k$ pilsētām. Aplūkojam lielāko buldozeru, kurš nav kreisajā malā esošās pilsētas kreisais buldozers vai labajā malā esošās pilsētas labais buldozers. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka tas ir P_i labais buldozers, pie tam $i < n$. Tādā gadījumā ievērosim, ka P_i labais buldozers var noslaucīt visas pilsētas pa labi no tā, kā arī neviena no pilsētām pa labi nevarēs nostumt nost P_i labo buldozeru un tālāk noslaucīt kādu pilsētu pa kreisi no P_i. Tāpēc pilsētas pa labi no P_i neietekmēs pārējās pilsētas. Varam pielietot pilsētām pa kreisi no P_i (ieskaitot P_i) induktīvo pieņēmumu, no kura secinām, ka eksistēs tieši viena prasītā pilsēta, piedevām to nevarēs noslaucīt neviena no pilsētām pa labi no P_i, kas noslēdz induktīvo pāreju.

3.uzdevums. Kaudzē ir saliktas $n \geq 1$ spēļu kārtis. Visas kārtis ir vienādas savā starpā, un katrai kārtij vienā pusē ir skaitlis, bet otrā - zīmējums. Kaudzē tās ir pagrieztas patvaļīgi. Vienā gājienā Māris no kaudzes augšpuses drīkst paņemt patvaļīgu skaitu secīgu augšējo kāršu, katru no tām apgriezt otrādi, un tādā pašā secībā atlikt atpakaļ kaudzes augšpusē (līdz ar to augšējā kārts vienmēr būs kaudzes augšā). Māris vēlas panākt, lai minēto gājienu rezultātā visas kaudzē esošās kārtis būtu pagrieztas ar zīmējumu uz augšu. Ar x apzīmēsim mazāko naturālo skaitli, kuram izpildās, ka Māris jebkuram sākotnējam kāršu izkārtojumam prasīto var sasniegt ne vairāk kā x gājienos. Pierādīt, ka $x = n$.

Atrisinājums. Lai pierādītu, ka $x \leq n$ izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Acīmredzami to var apgriezt 1 gājienā, ja nepieciešams.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $n = k - 1$, kur $k \geq 2$, patvaļīgas kārtis var apgriezt ne vairāk kā $k - 1$ gājienos.

Induktīvā pāreja. Aplūkojam $n = k$ kārtis. Ja apakšējā kārts ir ar zīmējumu uz augšu, tad pielietojam induktīvo pieņēmumu augšējām $k - 1$ kārtīm, ko var sakārtot ne vairāk kā $k - 1$ gājienos. Ja apakšējā kārts ir ar skaitli uz augšu, tad apgriežam visas kārtis 1 gājienā, un atkal pielietojam induktīvo pieņēmumu augšējām $k - 1$ kārtīm. Tad visas $n = k$ kārtis būs sakārtotas ne vairāk kā k gājienos.

Tālāk pierādīsim, ka izkārtojumu $SZSZSZ\ldots$, kur S ir skaitlis, Z ir zīmējums un kārtis sāk skaitīt no kaudzes apakšas, nevar sakārtot mazāk kā n gājienos. To arī pierādīsim ar matemātisko indukciju.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Acīmredzami S var apgriezt mazākais 1 gājienā.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $n = k - 1$, kur $k \geq 2$, kārtis secībā $SZSZSZ\ldots$ var apgriezt ne mazāk kā $k - 1$ gājienos.

Induktīvā pāreja. Aplūkojam $n = k$ kārtis. Ievērosim, ka gājieni, kuros apgriež tikai augšējo kārti, neietekmē apakšējo $k-1$ kāršu stāvokli. Tādēļ varam tām pielietot induktīvo pieņēmumu, lai noteiktu, ka apakšējām $k - 1$ kārtīm vajag vismaz $k - 1$ gājienu, lai visas tās pagrieztu ar zīmējumu uz augšu. Ievērosim arī, ka ikviens gājiens ar šīm kārtīm apgriež augšējo kārti. Aplūkosim, kā šie vismaz $k - 1$ gājieni ietekmēs augšējās kārts stāvokli.

Ja k ir pāra, tad $k - 1$ ir nepāra skaitlis un augšējā kārts pēc $k - 1$ gājieniem būs pretējā stāvoklī sākumam. Sākumā tā bija Z, tātad tagad tā būtu S. Tas nozīmē, ka pēc $k-1$ gājieniem kaudze nebūs sakārtota, tādēļ būs nepieciešami vismaz k gājieni.

Ja k ir nepāra, tad $k - 1$ ir pāra skaitlis un augšējā kārts pēc $k - 1$ gājieniem būs vienādā stāvoklī sākumam. Sākumā tā bija S, tātad tagad tā būtu S. Tas nozīmē, ka pēc $k-1$ gājieniem kaudze nebūs sakārtota, tādēļ būs nepieciešami vismaz k gājieni. Abi gadījumi pierādīti.

Esam pierādījuši, ka $n \leq x \leq n$, kas pierāda uzdevumā prasīto.

4.uzdevums. Uz tāfeles ir uzzīmēts izliekts 2024-stūris. Filips tajā velk diagonāles tā, ka ikviena pievienotā diagonāle tās novilkšanas brīdī krusto ne vairāk kā vienu no jau novilktajām diagonālēm (diagonāļu krustpunkti stingri atrodas 2024-stūra iekšienē, tātad 2024-stūra virsotnes nav krustpunkti). Noteikt lielāko diagonāļu skaitu, ko Filips šādā veidā var novilkt.

Atrisinājums. Atbilde ir 4042 diagonāles. Pierādīsim vispārīgāku apgalvojumu, ka izliektam n-stūrim maksimālais diagonāļu skaits, ko Filips var novilkt, ir $2n-6$. Vispirms ar matemātiskās indukcijas principu pierādīsim, ka lielāku skaitu nav iespējams novilkt.

Indukcijas bāze. $n=3$. Acīmredzami, ka trijstūrī var novilkt $2\cdot 3-6=0$ diagonāles.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem naturāliem $n<k$, kur $k\geq 4$, n-stūrī Filips var atļautajā veidā novilkt maksimāli $2n-6$ diagonāles.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim apgalvojumu arī pie $n=k$. Aplūkojam pēdējo diagonāli, ko Filips novelk. Tā var krustot maksimāli vienu citu diagonāli. Pieņemsim, ka pēdējā novilktā diagonāle sadala n-stūri divos mazākos izliektos daudzstūros, attiecīgi $(a+1)$-stūrī un $(b+1)$-stūrī, kur $a+b=n$. Ievērosim, ka visas diagonāles, izņemt pēdējo novilkto diagonāli un minēto vienu diagonāli, ko tā var krustot, atrodas katra vai nu $(a+1)$-stūrī, vai $(b+1)$-stūrī. Maksimālais diagonāļu skaits, ko Filips varēja novilkt šajos izolētajos daudzstūros, ir zināms no induktīvā pieņēmuma. Tādēļ kopumā n-stūrī Filips nevarēja novilkt vairāk par

$$1+1+(2(a+1)-6)+(2(b+1)-6)=2(a+b)-6=2n-6$$

diagonālēm, kas pierāda induktīvo pāreju.

Atliek parādīt konstrukciju, ar kuru Filips iegūto vērtību patiešām var sasniegt. Apzīmēsim n-stūra virsotnes kā $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Vispirms Filips secīgi velk visas diagonāles A_iA_{i+2}, sākot ar $i=1$ un beidzot ar $i=n-1$, kur indeksi ņemti pēc moduļa n. Acīmredzami, ka ikviena novilktā diagonāle var krustot tikai iepriekšējā gājienā vilkto vienu diagonāli. Šādi tiks novilktas $n-1$ diagonāles. Tālāk tiek novilktas visas diagonāles A_1A_j, kur $4\leq j\leq n-2$. Šīm diagonālēm viegli redzams, ka tās katra novilkšanas brīdī krustos tikai vienu diagonāli $A_{j-1}A_{j+1}$. Šādu diagonāļu ir $n-5$. Tātad kopā būs atļauti novilktas $(n-1)+(n-5)=2n-6$ diagonāles, kas pierāda, ka šī patiešām ir maksimālā sasniedzamā vērtība.

5.uzdevums. Parlamentā, kurā ir $n \geq 2$ deputāti, darbojas $k \geq 0$ komisijas. Katrā komisijā ir vismaz divi deputāti, nevienā komisijā neietilpst visi n deputāti. Katrs deputāts var darboties vienā vai vairākās komisijās, var arī nebūt nevienā komisijā. Kādai lielākajai k vērtībai deputātus noteikti iespējams nosēdināt rindā tā, ka nevienas komisijas deputāti tajā nesēž visi pēc kārtas viens otram blakus?

Atrisinājums. Atbilde ir $k = n - 2$ komisijas. Apzīmēsim deputātus ar D_i. Ja parlamentā ir lielāks komisiju skaits, starp tām var būt komisijas $\{D_1, D_2\}, \{D_1, D_3\}, \ldots, \{D_1, D_n\}$. Acīmredzami, ka šādā gadījumā D_1 nevar nosēdināt blakus nevienam deputātam, tādēļ nebūs iespējams noteikti (katrā iespējamā gadījumā) sasniegt prasīto.

Tālāk pierādīsim, ka $k - 2$ komisijām prasīto vienmēr varēs sasniegt. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 2$. Tad $k = 0$ un prasīto acīmredzami var izdarīt.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $n - 1$ ($n \geq 3$) deputātu parlamentā ar $k = n - 3$ komisijām, kur nevienā komisijā nav visi deputāti un katrā komisijā ir vismaz 2 deputāti, deputātus var nosēdināt rindā prasītajā veidā.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasīto var sasniegt arī n deputātu parlamentam, kam izpildās uzdevuma nosacījumi. Sākumā aplūkojam visas tās $x \leq n-2$ komisijas, kurās ir $n-1$ deputāts. Katrā šādā komisijā trūkst viens deputāts, tādēļ tādu deputātu, kuri neietilpst visās šādās komisijās, nav vairāk par $x \leq n-2$. Tas nozīmē, ka eksistē $n - x \geq 2$ deputāti, kuri ietilpst visās komisijās ar $n-1$ deputātu (iespējams, ka $x = 0$).

Aplūkojam šos $n - x$ deputātus, kuri ir visās x komisijās. Pierādīsim, ka starp tiem ir tāds, kurš ietilpst ne vairāk kā vienā komisijā ar 2 deputātiem. Pieņemsim pretējo, ka ikviens no šiem $n - x$ deputātiem ir vismaz 2 komisijās, kur ir 2 deputāti. Tādā gadījumā katrs deputāts aizpilda vismaz 2 vietas 2-komisijās, tādēļ tajās ir vismaz $2(n - x)$ vietu. Tā kā ikvienā 2-komisijā ir tieši 2 vietas, tad komisiju skaits ir vismaz $\frac{2(n-x)}{2} = n - x$, taču tad parlamentā kopā ir vismaz $(n - x) + x = n$ komisijas – pretruna.

Aplūkojam atrasto deputātu, kurš ietilpst ne vairāk kā vienā 2-komisijā. Izņemam uz brīdi to no parlamenta un visām komisijām, kurās tas darbojas. Ja deputāts nedarbojas nevienā 2-komisijā, tad izdzēšam vienu no komisijām, kurā tas darbojas. Ja deputāts darbojas vienā 2-komisijā, izdzēšam to. Ievērosim, ka visās atlikušajās komisijās deputātu skaits ir vismaz 2 un nepārsniedz $n - 2$, jo visām komisijām ar $n-1$ deputātu tika izņemts viens deputāts. Pielietojam induktīvo pieņēmumu – sasēdinām $n - 1$ deputātu ar $n - 3$ derīgām komisijām rindā pēc nosacījumiem. Šajā brīdī var gadīties, ka viena izdzēstā komisija šobrīd sēž pēc kārtas (kur, iespējams, šobrīd ir tikai 1 deputāts). Tā kā tajā nav visi deputāti, varam izņemto deputātu nosēdināt vienā no rindas galiem, lai starp komisijas locekļiem pa vidu sēdētu kāds deputāts, kas tai nepieder.

Vienīgais atlikušais iespējamais gadījums ir tad, ja $x = 0$ un atrastais deputāts nedarbojas nevienā komisijā. Tādā gadījumā izdzēšam vienu no komisijām un šo deputātu – viegli redzams, ka atlikušajiem deputātiem un komisijām izpildās uzdevuma nosacījumi. Pielietojam induktīvo pieņēmumu, lai sakārtotu $n-1$ deputātus ar $n-3$ komisijām rindā. Var gadīties, ka izdzēstās komisija deputāti sēž kaut kur rindā pēc kārtas. Tādā gadījumā nosēdinām izdzēsto deputātu minētajai komisijai pa vidu, un tad nosacījumi izpildīsies visām komisijām, citādi nosēdinām to kādā rindas galā. Visi gadījumi ir aplūkoti, tātad induktīvā pāreja ir noslēgta.

6.uzdevums. Rūtiņu kvadrātā ar izmēriem $n \times n$ katra rūtiņa ir izkrāsota baltā vai melnā krāsā. Ar a_i apzīmēsim balto rūtiņu skaitu i-tajā rindā, un ar b_i apzīmēsim melno rūtiņu skaitu i-tajā kolonnā. No visiem iespējamajiem rūtiņu kvadrāta krāsojumiem noteikt maksimālo vērtību, ko var pieņemt $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Atrisinājums. Maksimālā iespējamā vērtība ir $\frac{n^3-n}{3}$. Vispirms pierādīsim, ka lielāku vērtību nav iespējams sasniegt, izmantojot matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 1$, kurā acīmredzami maksimālā vērtība ir 0.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka $(n-1) \times (n-1)$ rūtiņu kvadrātā maksimālā sasniedzamā izteiksmes vērtība ir $\frac{(n-1)^3-(n-1)}{3}$ kādam naturālam $n = k \geq 2$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim prasīto arī $n \times n$ rūtiņu kvadrātā. Aplūkojam patvaļīgu tādu kvadrātu, kurš pieņem maksimālo izteiksmes vērtību. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka

$$a_1 = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

jo var patvaļīgi pārbīdīt kolonnu un rindu pārus ar vienādiem numuriem, jo tas nemaina izteiksmes vērtību. Veiksim vairākas operācijas, kuras nesamazinās $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ vērtību.

- Kreisajā kolonnā nomainām katru balto rūtiņu uz melnu, izņemot pašu augšējo rūtiņu. Ja tika mainīta j-tā rūtiņa ($j \geq 2$), tad a_j samazinājās par 1, kamēr b_1 palielinājās par 1. Aplūkojot to $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ kontekstā, summa izmainījās par $a_1 - b_j \geq 0$, jo a_1 sākotnēji ir maksimālais skaitlis.
- Esam ieguvuši, ka $b_1 \geq n-1$. Tālāk aplūkojam augšējo rindu un tajā katru melno rūtiņu pārmainām uz baltu, izņemot pašu kreisējo rūtiņu. Ja tika mainīta j-tā rūtiņa ($j \geq 2$), tad b_j samazinājās par 1, kamēr a_1 palielinājās par 1. Aplūkojot to $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ kontekstā, summa izmainījās par $b_1 - a_j \geq (n-1) - a_j \geq 0$, jo $a_j \neq n$ tādēļ, ka pirmajā kolonnā visas rūtiņas zem augšējās ir melnas.

Līdz ar to pēc šādiem pārveidojumiem esam ieguvuši laukumu, kurā joprojām tiek sasniegta maksimālā izteiksmes vērtība un vienlaicīgi $\{a_1, b_1\} = \{n-1, n\}$ kaut kādā secībā. Abi skaitļi acīmredzami nevar būt n to kopīgās vienas rūtiņas dēļ. Tātad maksimālā vērtība tiek sasniegta arī konfigurācijām, kur kreisā kolonna ir melna un augšējā rinda ir balta, izņemot to krustpunktu.

Aplūkojam šādu konfigurāciju. Izdzēšam kreiso kolonnu un augšējo rindu – varam ievērot, ka tādā gadījumā atlikušajā $(n-1) \times (n-1)$ rūtiņu kvadrātā izteiksmes vērtība netiek ietekmēta, jo katrai rindai tika izdzēsta melna rūtiņa, bet katrai kolonnai – balta. Tātad atlikušā rūtiņu kvadrāta maksimālā vērtība ir $\frac{(n-1)^3-(n-1)}{3}$. Šai izteiksmei pieskaitot $n(n-1)$, iegūstam, ka maksimālā vērtība $n \times n$ kvadrātam ir $\frac{n^3-n}{3}$.

Atliek uzrādīt konstrukciju, pie kuras šī maksimālā vērtība tiek sasniegta. Derīga konstrukcija ir tā sauktā "trepīte" – kvadrāta galveno diagonāli izkrāso baltu, augšējo trijstūri izkrāso baltu, bet apakšējo trijstūri izkrāso melnu. Tādā gadījumā izteiksmes vērtība būs

$$n(n-1) + (n-1)(n-2) + \ldots + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3-n}{3},$$

kas pierāda, ka tā patiešām ir maksimālā sasniedzamā vērtība.

7.uzdevums Doti naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kuri ir pa pāriem dažādi, un naturālu skaitļu kopa M, kurā ir $n-1$ elementi, no kuriem neviens nav vienāds ar $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Skaitļu ass punktā 0 sēž sienāzis, kurš pēc kāda laika ass pozitīvajā virzienā secīgi veic n lēcienus, pie tam lēcienu garumi ir skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sakārtoti kaut kādā secībā. Pierādīt, ka lēcienu garumus var sakārtot tādā secībā, lai sienāzis pēc katra veiktā lēciena nosēstos punktā, kurš nepieder kopai M.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n$, un kopas M skaitļus apzīmēsim ar m_i, kuriem pieņemsim, ka $m_1 < m_2 < m_3 \ldots < m_{n-1}$. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu prasīto.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad sienāzis vienkārši veic lēcienu. Ja $n = 2$, tad acīmredzami vienā no lēcienu secībām tas neielēktu m_1, jo $a_1 \neq a_2$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem $n \leq k-1$, kur $k \geq 3$, izpildās, ka lēcienus ar garumiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ var sakārtot prasītajā veidā, ja dota naturālu skaitļu kopa M ar $n-1$ elementiem, no kuriem neviens nav vienāds ar $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasītais izpildās arī $n = k$ skaitļiem, kur kopā M ir $n-1$ elementi, no kuriem neviens nav s. Aplūkosim 2 gadījumus:

- ja $m_{n-1} \leq s - a_n$. Pielietojam induktīvo pieņēmumu lēcieniem $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ un skaitļiem $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}$. No induktīvā pieņēmuma šos lēcienus var sakārtot tādā secībā, lai tie netrāpītu uz neviena no minētajiem m_i. Vienīgais skaitlis no sākotnējās kopas, kuram varētu uzlēkt sienāzis, ir m_{n-1}. Aplūkojam lēcienu a_j, pēc kura sienāzis trāpa uz m_{n-1}. Aizstājam a_j ar a_n, tādā gadījumā no sākotnējā sakārtojuma sienāzis aizlēks tālāk par m_{n-1} un no tā maksimalitātes netrāpīs uz neviena cita m_i. Tālāk a_n vietā tiek veikts lēciens a_i un prasītais ir sasniegts.

- ja $m_{n-1} > s - a_n$. Ja eksistē tāds a_i, ka $s - a_i \notin M$ un $s - a_i < m_{n-1}$, tādā gadījumā varam pielietot induktīvo paņēmienu visiem lēcienu garumiem, izņemot a_i, un visiem M skaitļiem, izņemot m_{n-1}. Acīmredzami, ka tādā gadījumā sienāzis neuzlēks nevienam M skaitlim, kas ir mazāks par $a - a_i$, un ar pēdējo lēcienu a_i nosēdīsies $s \notin M$.
  Atliek noskaidrot gadījumu, kad tādu a_i nevar atrast. Eksistē tāds a_i, ka $s - a_i \notin M$, jo ir n lēcienu garumi, bet kopā M ir $n-1$ skaitļi. Aplūkosim lielāko a_i, kuram $s - a_i \notin M$. Tādā gadījumā $N = \{s - a_{i+1}, s - a_{i+2}, \ldots s - a_n\} \subseteq M$. Ievērosim, ka $s - a_n < m_{n-1}$, tādēļ intervālā $[s - a_n; s)$ atrodas vismaz 2 kopas M skaitļi, ja N satur vienu skaitli, un vispārīgi vismaz N skaitļi, ja N ir vismaz divi skaitļi. Tātad intervālā $(0; s - a_n)$ ir ne vairāk kā $n - 1 - |N|$ kopas M skaitļi. Aplūkojam lēcienu garumus a_j, kur $1 \leq j \leq i$. Visiem tiem i maksimalitātes un nosacījuma $s - a_i < m_{n-1}$ neizpildīšanās dēļ izpildās $s - a_j \notin M$. Aplūkojam $n - |N|$ skaitļus formā $s - a_n - a_j$. No Dirihlē principa tad kādam no tiem izpildās, ka $s - a_n - a_j \notin M$. Pielietojam induktīvo pieņēmumu visiem lēcienu garumiem, izņemot a_n un a_j, kā arī visiem kopas M skaitļiem, izņemot kopas N elementus un m_{n-1} (šādi tiek izņemto vismaz 2 skaitļi). Tādā gadījumā pēc pirmo lēcienu veikšanas sasniedz punktu $s - a_n - a_j \notin M$, tālāk lec uz $s - a_j \notin M$ un beigās uz $s \notin M$, izpildot vajadzīgo arī šajā gadījumā.

Visi iespējamie gadījumi pārejā ir aplūkoti, tātad prasītais ir pierādīts.