Indukcija

Ilmārs Štolcers

1 Ievads

Šajā materiālā aplūkosim vienu no svarīgākajām matemātisko pierādījumu metodēm – matemātisko indukciju – un tās pielietojumus kombinatorikas uzdevumu risināšanā. Matemātiskās indukcijas veiksmīgai pielietošanai ir ļoti svarīgi labi saprast tās shēmu un darbības principus, tādēļ 2.nodaļā aplūkoti tās pamatprincipi ar piemēriem. Lasītāji, kuri ir izcili pazīstami ar klasisko indukcijas shēmu un tās variācijām, var materiālu sākt lasīt no 3.nodaļas.

2 Matemātiskā indukcija

2.1 Darbības princips

Pieņemsim, ka mums ir dots kāds apgalvojums $P(n)$, kas atkarīgs no mainīgā n vērtības. Tas izpildās gadījumā, ja tā mainīgā vērtība ir $n = 1$, tātad $P(1)$ ir patiess. Mēs vēlētos pierādīt šo apgalvojumu visām naturālām n vērtībām. Veicot spriedumus, varam secināt, ka $P(2)$ arī ir patiess, jo tas īstenībā ir mazliet pārveidots gadījums, kad $n = 1$ jeb $P(1)$. Līdzīgā veidā varam pierādīt, ka $P(3)$ ir patiess, jo tas ir mazliet pārveidots gadījums $P(2)$, kas ir patiess. Šādā veidā varam ievērot, ka vispārīgā gadījumā apgalvojums $P(k+1)$ īstenībā ir mazliet pārveidots/papildināts gadījums $P(k)$, no kura patiesuma varam secināt, ka $P(k+1)$ arī ir patiess.

Matemātikā šādu spriešanas veidu sauc par **matemātisko indukciju**. Tā apgalvo, ka, ja no mazāka gadījuma mēs varam pāriet uz lielāku gadījumu un pierādīt, ka tad arī izpildās prasītais, tad mēs varam šādā veidā prasīto pierādīt visiem prasītajiem skaitļiem (piemēram, visiem naturāliem skaitļiem). To varētu ilustrēt kā pārejas starp skaitļiem

$$1 \to 2 \to 3 \to \dots k \to k+1.$$

Ja mēs zinām, ka prasītais izpildās mazākajā iespējamā gadījumā (piemēram, pie mainīgā vērtības 1) un ir iespējams vispārīgi pierādīt, ka, mainīgajam palielinoties par 1, prasītais joprojām izpildās, tad šādā veidā prasīto var iegūt skaitlim 2, izmantojot patiesumu pie skaitļa 1; tālāk var iegūt skaitlim 3, izmantojot pierādīto patiesumu pie skaitļa 2 utt. Šādā veidā pielietojot spriedumu par mainīgā palielināšanos, ir iespējams sasniegt jebkuru naturālu skaitli, tātad tiek pierādīts prasītais visām naturālām vērtībām.

Indukcijas uzdevumos ierasti tiek izmantota īpatnēja pieraksta forma, lai strukturētu veiktos secinājumus.

- Pirmais punkts ir **indukcijas bāze**. Šajā punktā tiek aplūkoti mazie gadījumi, no kuriem tiek tālāk veikta spriedumu ķēdīte. Parasti šeit aplūko mazākās uzdevumā pieļaujamās mainīgo vērtības un parāda, ka pie tām izpildās uzdevuma nosacījumi. Diezgan bieži bāzes patiesums ir acīmredzams. Ja izmanto standarta spriedumu, ka no $P(k)$ patiesuma secina, ka patiess ir arī apgalvojums $P(k+1)$, tad pietiek aplūkot vienu bāzes gadījumu. Tomēr ir uzdevumi, kuros spriedumu ķēdīte tiek veidota ar lielākiem lēcieniem – tajos nepieciešams aplūkot vairāk bāzes gadījumu, lai nosegtu visas pierādāmās vērtības.

- Otrais punkts ir **induktīvais pieņēmums**. Tajā tiek definēts vispārīgs gadījums (parasti pie patvaļīga mainīgā k), kurā izpildās uzdevuma nosacījumi. Būtībā šeit tiek pieņemts, ka prasītais izpildās kādai vērtībai, tomēr pēc indukcijas principa mēs to varēsim sasniegt un garantēt, ka tas ir patiesi, ja ir derīga bāze, no kuras uzsākt spriedumu ķēdīti.

- Trešais punkts ir **induktīvā pāreja**. Šī parasti ir grūtākā uzdevuma daļa, jo ir jāizdomā, kā pierādīt lielāku gadījumu, par kura patiesumu pagaidām nav nekas zināms. Tipiskā gadījumā mēs aplūkojam ķēdītes vienu posmu tālāk, t.i., gadījumu $k+1$, tomēr ir iespējami arī lielāki lēcieni. Šajā solī ir svarīgi izmantot induktīvo pieņēmumu un no tā zināmos rezultātus, jo tas atvieglo pierādījuma gaitu.

2.2 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n ir spēkā $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n=1$. Tad $1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, kas acīmredzami ir patiesi.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim k izpildās $1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī skaitlim $k+1$. Tad jāizpildās $1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Izmantojot induktīvo pieņēmumu,

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(2k^3+3k^2+k)+(6k^2+12k+6)}{6}=$$
$$=\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}=\frac{2k^2(k+1)+7k(k+1)+6(k+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

kas pierāda prasīto.

Komentārs. Šis uzdevums ir tipisks piemērs indukcijas pielietojumam – jāpierāda summas lielums, kurš, palielinoties mainīgajam, izmainās pavisam nedaudz, jo tiek pievienots tikai papildus saskaitāmais. Līdz ar to daļu no pierādāmās summas mēs varam aizstāt ar pieņēmumā iegūto izteiksmi, lai atvieglotu pārveidojumus. Un šis spriedums ir patiess, jo mazākā iespējamā mainīgā vērtība pieņēmumā ir patiesa no bāzē veiktās pārbaudes, tādēļ mainīgā vērtība, kam izpildās pieņēmums, pēc katras pārejas pieaug.

2.piemērs Pierādīt, ka $2^n>n^2$ visiem naturāliem skaitļiem $n>4$.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. Tā kā $n>4$, tad $n=5$ ir bāzes gadījums. Tad $2^5=32>25=5^2$, kas ir patiesi.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k>4$ izpildās $2^k>k^2$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī skaitlim $k+1$. Tad jāizpildās $2^{k+1}>(k+1)^2$. No induktīvā pieņēmuma $2^k>k^2 \implies 2^{k+1}>2k^2$. Pierādīsim, ka $2k^2>(k+1)^2$ visiem $k>4$.

$$2k^2>k^2+2k+1$$
$$k^2-2k+1>2$$
$$(k-1)^2>2.$$

Ja $k>4$, tad $(k-1)^2\geq 16>2$, tādēļ nevienādība ir patiesa. Tas nozīmē, ka $2^{k+1}>(k+1)^2$ visiem $k>4$, kas pierāda induktīvo pāreju un prasīto.

Komentārs. Arī šajā uzdevumā bija svarīgi izmantot pieņēmuma patiesumu, lai pārveidotu prasīto nevienādību tādā formā, kura jau ir algebriski vienkārši risināma. Vērts pieminēt, ka daudzas šāda veida nevienādības naturālos/veselos skaitļos ir ērti pierādīt ar indukciju.

3.piemērs Pierādīt, ka jebkuru naturālu skaitli var izteikt kā

$$\star 1^2 \star 2^2 \star \ldots \star n^2$$

kaut kādam naturālam skaitlim n, kur katras $\star$ vietā ir $+$ vai $-$ zīme.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. Lai pareizi veiktu pāreju, pierādīsim 4 bāzes gadījumus.

- skaitli 1 var izteikt kā $+1^2 = 1$;
- skaitli 2 var izteikt kā $-1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 16 - 14 = 2$;
- skaitli 3 var izteikt kā $-1^2 + 2^2 = 4 - 1 = 3$;
- skaitli 4 var izteikt kā $+1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 17 - 13 = 4$.

Visi aplūkotie bāzes gadījumi izpildās.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim k izpildās, ka to var izteikt prasītajā veidā ar n_k saskaitāmajiem jeb $k = \star 1^2 \star 2^2 \star \ldots \star n_k^2$.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasītajā veidā var izteikt arī skaitli $k+4$ ar $n_k + 4$ saskaitāmajiem. Ievērosim, ka

$$\begin{gathered}+(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = \\ = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 4n - 4 - n^2 - 6n - 9 + n^2 + 8n + 16 = \\ = 2n^2 + 10n + 17 - 2n^2 - 10n - 13 = 4.\end{gathered}$$

Zināms, ka $k = \star 1^2 \star 2^2 \star \ldots \star n_k^2$. Ja šai izteiksmei pieskaita iepriekš iegūto sakarību, n vietā ievietojot n_k, tad iegūstam

$$k + 4 = \star 1^2 \star 2^2 \star \ldots \star n_k^2 + (n_k+1)^2 - (n_k+2)^2 - (n_k+3)^2 + (n_k+4)^2.$$

Esam pierādījuši induktīvo pāreju. Ievērosim, ka šādā veidā varam izteikt visus skaitļus formā:

- $4i + 1$, sākot no skaitļa 1 un veicot pāreju pa 4 vienībām;
- $4i + 2$, sākot no skaitļa 2 un veicot pāreju pa 4 vienībām;
- $4i + 3$, sākot no skaitļa 3 un veicot pāreju pa 4 vienībām;
- $4i + 4$, sākot no skaitļa 4 un veicot pāreju pa 4 vienībām.

Tā kā šīs skaitļu klases apraksta visus naturālos skaitļus, varam secināt, ka uzdevumā prasītais izpildās visiem naturāliem skaitļiem.

Komentārs. Šis uzdevums ir piemērs situācijai, kad induktīvo pāreju klasiskā veidā (no k uz $k+1$) ir grūti veikt. Tomēr pāreja nav ierobežota tikai šādam veidam, tās lielumu var izvēlēties pēc uzdevuma konteksta. Vienīgi tad ir jāpiedomā, lai joprojām tiktu sasniegtas visas prasītās mainīgo vērtības, tādēļ mums šeit nācās veikt 4 bāzes pārbaudes. Piemēram, ja šeit būtu izlaists gadījums, kad izsaka skaitli 3, tad ar minēto pāreju nevarētu sasniegt skaitļus formā $4i + 3$, tādēļ uzdevums nebūtu pilnībā atrisināts.

2.3 Stiprā indukcija

Reizēm uzdevumos pārejas veikšanai nepietiek tikai zināt, ka prasītais izpildās, ja tas izpildās iepriekšējai vērtībai. Piemēram, ja gadījumu $k+1$ ir ļoti sarežģīti tiešā veidā izteikt no ar gadījuma k palīdzību. Šādos brīžos ir vērts ievērot vēl spēcīgāku indukcijas īpašību – tā saukto **stipro indukciju**. Tajā pieņēmumā tiek pieņemts, ka prasītais izpildās ne tikai vērtībai k, bet arī visām pieļaujamām vērtībām, kas ir mazākas vai vienādas ar k. No loģikas viedokļa nav grūti saprast, kādēļ tas tā ir – lai pierādītu, ka prasītais izpildās vērtībai k, mums bija secīgi jāveic spriedumi no bāzes gadījuma, izmantojot pāreju, tādā veidā pa ceļam pierādot arī visus derīgos gadījumus pa vidu. Šo īpašību ir vērts izmantot, ja gadījumu $k+1$ var pārveidot uz kādu mazāku gadījumu, kurš ne obligāti ir k – tad joprojām varēs izmantot induktīvā pieņēmuma īpašības, lai veiktu spriedumus.

4.piemērs Dots reāls skaitlis x ar īpašību, ka skaitlis $x+\frac{1}{x}$ ir vesels. Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem n ir spēkā, ka $x^n+\frac{1}{x^n}$ arī ir vesels skaitlis.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $x+\frac{1}{x}$ ir vesels no dotā.
Ja $n=2$, tad ievērosim, ka $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ jeb $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, kas ir vesels skaitlis.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem naturāliem skaitļiem $i\leq k$, kur $k\geq 2$, izpildās, ka $x^i+\frac{1}{x^i}$ ir vesels skaitlis.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī skaitlim $k+1$ jeb $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ ir vesels. Ievērosim, ka

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$$

jeb $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$. No induktīvā pieņēmuma zināms, ka visi iekavās esošie skaitļi ir veseli, tātad arī kreisajā pusē esošais rezultāts ir vesels, kas pierāda prasīto.

Komentārs. Šajā uzdevumā mums nebija nepieciešams izmantot visas pieņēmumā iespējamās mainīgā vērtības - tikai 1, $k-1$ un k, tādēļ pieņēmumu varēja veikt arī tikai par šīm vērtībām. Tomēr ērtības labad vienkārši var izmantot arī standarta shēmu par visām vērtībām. Šajā uzdevumā arī svarīgi ņemt vērā, ka bāzē tika pārbaudīts arī gadījums $n=2$, jo citādi pirmā pāreja no 1 uz 2 neizpildītos, jo gadījums $n=0$ nav definēts, tādēļ pāreju var uzsākt tikai no 2 uz 3.

5.piemērs Pierādīt, ka jebkuru naturālu skaitli var izteikt kā summu no divnieku pakāpēm ar nenegatīviem veseliem kāpinātājiem, kuri ir pa pāriem dažādi (parafrāzējot - pierādīt, ka ikvienu naturālu skaitli var izteikt binārajā skaitīšanas sistēmā).

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $1=2^0$, un visi kāpinātāji acīmredzami ir dažādi.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem naturāliem skaitļiem $i\leq k$ izpildās, ka skaitli k var izteikt prasītajā veidā.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī skaitlim $k+1$. Ja $k+1$ ir divnieka pakāpe, jeb $k+1=2^x$, kur x ir nenegatīvs vesels skaitlis, tad prasītais acīmredzami izpildās. Pretējā gadījumā aplūkojam lielāko divnieka pakāpi, kas ir mazāka par $k+1$, jeb $1\leq 2^x<k+1<2^{x+1}$. No induktīvā pieņēmuma zināms, ka skaitli $k+1-2^x$ var izteikt prasītajā formā, pieņemsim, kā $k+1-2^x=$

$2^{r_1}+2^{r_2}+\ldots+2^{r_t}$, kur visi kāpinātāji ir savā starpā atšķirīgi. Līdz ar to $k+1=2^{r_1}+2^{r_2}+\ldots+2^{r_t}+2^x$. Atliek pierādīt, ka $x \neq r_j$ visiem $1 \leq j \leq t$.

Pieņemsim pretējo, ka ir kāds indekss j, kuram $x = r_j$. Tādā gadījumā $k+1 \leq 2^{r_j}+2^x = 2^{x+1}$. Tā kā $k+1$ nav divnieka pakāpe, tad iegūtā nevienādība ir stingra jeb $k+1 > 2^{x+1}$. Taču tā ir pretruna ar x maksimalitāti, tādēļ nevar eksistēt indekss j, kuram $x = r_j$. Tas nozīmē, ka summā $2^{r_1}+2^{r_2}+\ldots+2^{r_t}+2^x$ visi ir kāpinātāji ir dažādi un prasītais izpildās arī skaitlim $k+1$, kas pierāda uzdevumu.

Komentārs. Šajā uzdevumā stiprā indukcija bija nepieciešama, jo mēs nevaram īsti zināt, kādai mazākai vērtībai mēs trāpīsim, atņemot lielāko divnieka pakāpi. Tomēr tas netraucē, jo indukcijas dēļ mēs tāpat varam iegūt tālākus spriedumus. Indukcijā bieži tiek aplūkoti maksimālie/minimālie elementi, lai reducētu pārejā aplūkoto gadījumu uz kādu mazāku ar noteiktām īpašībām. Kā arī šeit atsevišķi tiek aplūkots gadījums, kad $k+1$ ir divnieka pakāpe, jo tad izmantotā pāreja nestrādātu – tā reducētu uzdevumu uz gadījumu 0, kurš bāzē un pieņēmumā nav aplūkots.

3 Lietojumi kombinatorikas uzdevumos

3.1 Kombinatorisku uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Pierādīt, ka jebkuram naturālam n rūtiņu laukumu $2^n \times 2^n$, kurā izgriezta viena rūtiņa, var sagriezt *stūrīšos* (stūrīši ir 3 rūtiņu *L-burti*).

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Tad acīmredzami 2×2 kvadrāts bez vienas rūtiņas ir stūrītis.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim k kvadrātu $2^k \times 2^k$, kuram trūkst vienas (jebkuras) rūtiņas, var sagriezt stūrīšos.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī skaitlim $k+1$. Sagriezīsim $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ kvadrātu ar trūkstošu rūtiņu četros vienādos kvadrātos ar izmēriem $2^k \times 2^k$. Vienā no šiem kvadrātiem atradīsies trūkstošā rūtiņa, šo kvadrātu pēc induktīvā pieņēmuma sagriežam stūrīšos.

Aplūkojam pārējos 3 kvadrātus. Ievērosim, ka izvēloties katrā no šiem kvadrātiem rūtiņu, kas atrodas vistuvāk $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ kvadrāta centram, izvēlētās rūtiņas veidos stūrīti. Izgriežam to. Tad katrs no $2^k \times 2^k$ kvadrātiem paliek ar vienu izgrieztu rūtiņu, ko mēs pēc induktīvā pieņēmuma varam sagriezt stūrīšos. Līdz ar to viss lielais kvadrāts ir sagriezts stūrīšos un prasītais ir pierādīts.

Komentārs. Šis uzdevums ir tipisks piemērs indukcijas lietojumam kombinatorikā – lielāku gadījumu izdodas reducēt uz mazāku (šeit samazina kvadrāta izmēru), kurš ir pēc būtības risināms tādā pašā veidā. Formāli to ir ērti pierakstīt ar indukciju, mazākā gadījuma atrisināšanas algoritmu neuzdodot tiešā veidā, bet gan tikai pasakot, ka to varēs izdarīt, secīgi tiekot līdz bāzes gadījumam.

Šajā uzdevumā arī vērts pieminēt, ka uzreiz tiešā veidā induktīvo pieņēmumu pielietot nebija iespējams, jo trijiem no kvadrātiem nebija izgriezta rūtiņa. Kombinatorikas uzdevumos bieži šī ir viena no galvenajām grūtībām – izdomāt gudru veidu, kā pārveidot lielāku gadījumu uz mazāku tā, lai mazākajam joprojām izpildītos visas nepieciešamās īpašības. Šajā gadījumā svarīgais solis bija izgriezt stūrīti laukuma centrā.

2.piemērs Uz galda stāv 128 vienādas glāzes, kur katrā ir ieliets unikāls daudzums ūdens. Andrejs prot paņemt jebkuras divas glāzes un liet no vienas otrā, kamēr ūdens daudzums abās ir vienāds. Pierādīt, ka Andrejs var panākt situāciju, kurā visās glāzēs uz galda ir vienāds ūdens daudzums.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu, ka Andrejs prasīto var panākt katram glāžu skaitam formā 2^n, kur n ir naturāls.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Tad acīmredzami 2 glāzēm prasīto uzreiz var panākt.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim k Andrejs var 2^k glāzēm panākt prasīto.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasīto var panākt arī 2^{k+1} glāzēm. Sākotnēji Andrejs glāzes sadala 2 grupās ar izmēru 2^k. Katrai no šīm grupām pēc induktīvā pieņēmuma viņš var panākt, ka ūdens daudzums visās glāzēs būs viens un tas pats. Tālāk Andrejs sanumurē glāzes katras grupas ietvaros no 1 līdz 2^k. Tad izvēloties no abām grupām glāzes ar vienādu numuru i ($1 \leq i \leq 2^k$) un izlīdzinot tajās ūdens daudzumu, Andrejs var panākt prasīto. Iegūtajā situācijā katrā glāzē ūdens daudzums būs vienāds ar vidējo aritmētisko starp ūdens daudzumu pirmās grupas glāzēs un otrās grupas glāzēs, kas dod prasīto.

3.piemērs 100 trusīšu mežā atrada mellenes. Jaunākais trusītis salasīja 1 melleni, otrs jaunākais - 2 mellenes, trešais - 4 mellenes un tā tālāk, līdz vecākais salasīja 2^{99} mellenes. Pienāca lapsiņa un piedāvāja palīdzēt pārdalīt ogas godīgāk - viņa atkārtoti izvēlēsies divus trusīšus un sadalīs viņu kopīgo ogu skaitu starp viņiem līdzīgi, pati apēdot lieko ogu (ja kopskaits ir nepāra) kā samaksu par darbu. Kāds ir lielākais skaits melleņu, ko lapsiņa var apēst ar šādiem noteikumiem?

Atrisinājums. Ievērosim – ja diviem trusīšiem ir katram vismaz 1 oga, tad arī pēc pārdalīšanas katram no tiem būs vismaz viena oga, tātad lapsiņa nevar apēst vairāk par $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{99} - 100 = 2^{100} - 101$ ogām. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu, ka lapsiņa var panākt, lai visiem trusīšiem beigās paliek katram tieši 1 oga, t.i., lapsiņa apēda $2^{100} - 101$ ogas. Indukciju veiksim trusīšu skaitam.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Šajā gadījumā ir viens trusītis, kuram ir tieši viena oga, tādēļ prasītais ir sasniegts.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k - 1 \geq 1$ lapsiņa var veikt operācijas

$$(\underbrace{1, 2, 4, \ldots, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{\text{k-1}}),$$

kuru rezultātā visiem $k - 1$ trusīšiem paliek katram pa vienai ogai.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasīto var panākt arī k trusīšiem. Vispirms aplūkojam pirmos $k - 1$ trusīšus, kuriem pēc induktīvā pieņēmuma lapsiņa var atstāt katram tikai 1 ogu

$$(\underbrace{1, 2, 4, \ldots, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}, 2^{k-1}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}, 2^{k-1}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 1}_{\text{k-1}}, 2^{k-1}).$$

Tālāk lapsiņa pārdala ogas pēdējiem diviem trusīšiem

$$(\ldots, 1, 2^{k-1}) \to (\ldots, 2^{k-2}, 2^{k-2}).$$

Tālāk lapsiņa pārdala ogas pirmajiem $k - 1$ trusīšiem, veicot induktīvā pieņēmuma otro pārveidojumu

$$(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}, 2^{k-2}) \to (\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1, 1}_{\text{k-1}}, 2^{k-2}).$$

Un beigu beigās lapsiņa pēc nupat minētā principa pārdala ogas pēdējiem $k - 1$ trusīšiem, izmantojot induktīvo pieņēmumu

$$(1, \underbrace{1, 1, \ldots, 1, 2^{k-2}}_{\text{k-1}}) \to (1, \underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{\text{k-1}}).$$

Līdz ar to lapsiņa ir panākusi situāciju, kurā katram trusītim ir tieši 1 oga, arī k trusīšu gadījumā, pierādot induktīvo pāreju.

Tas nozīmē, ka 100 trusīšu gadījumā lapsiņa var panākt, ka visiem trusīšiem paliek tieši 1 oga, kas nozīmē, ka lapsiņa būs apēdusi $2^{100} - 101$ ogu, kas ir maksimums no iepriekš secinātā.

4.piemērs Ar *vārdu* apzīmēsim patvaļīgu burtu virkni. Teiksim, ka vārds ir palindroms, ja tas lasāms abos virzienos vienādi. Definēsim vārdu virkni $W_0, W_1, W_2, \ldots$ šādi: $W_0 = a, W_1 = b$, un katram $n \geq 2$ vārds W_n ir veidots, pierakstot vārdam W_{n-2} galā vārdu W_{n-1}. Pierādīt, ka jebkuram naturālam n vārds, kas ir veidots, uzrakstot kopā vārdus $W_1, W_2, \ldots, W_n$ vienu otram galā tieši šādā secībā, ir palindroms.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu prasīto. Papildus ieviesīsim apzīmējumu $\overline{W_1W_2\ldots W_n}$, kas apzīmē vārdus W_i sarakstītus kopā secībā pēc kārtas, kā arī W_i^{-1}, kas apzīmē i-to vārdu apgrieztā secībā.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Tad vārds $\overline{W_1} = b$, kas no definīcijas ir palindroms.
Ja $n = 2$, tad $\overline{W_2} = \overline{W_0W_1} = ab$. Vārds $\overline{W_1W_2} = bab$ ir palindroms.
Ja $n = 3$, tad $\overline{W_3} = \overline{W_1W_2} = bab$. Vārds $\overline{W_1W_2W_3} = babbab$ ir palindroms.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visiem naturāliem skaitļiem i, kuri nepārsniedz kādu naturālu skaitli $k \geq 3$, vārds $\overline{W_1W_2\ldots W_i}$ ir palindroms.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka arī vārds $\overline{W_1W_2\ldots W_{k+1}}$ ir palindroms. Pārveidosim W_{k+1} kā $\overline{W_{k-1}W_k}$. Tad $\overline{W_1W_2\ldots W_kW_{k+1}} = \overline{W_1W_2\ldots W_kW_{k-1}W_k}$. Ievērosim no induktīvā pieņēmuma, ka $\overline{W_1W_2\ldots W_k}$ ir palindroms. Tātad varam to apgriezt pretējā secībā $\overline{W_1W_2\ldots W_{k-1}W_k} = \overline{W_k^{-1}W_{k-1}^{-1}\ldots W_2^{-1}W_1^{-1}}$. Kopumā iegūstam

$$\overline{W_1W_2\ldots W_{k-2}W_{k-1}W_kW_{k+1}} = \overline{W_1W_2\ldots W_{k-2}W_{k-1}W_kW_{k-1}W_k} = \overline{W_k^{-1}W_{k-1}^{-1}W_{k-2}^{-1}\ldots W_2^{-1}W_1^{-1}W_{k-1}W_k}.$$

Taču papildus ievērosim no induktīvā pieņēmuma, ka $\overline{W_1W_2\ldots W_{k-2}} = \overline{W_{k-2}^{-1}\ldots W_2^{-1}W_1^{-1}}$, jo tas ir palindroms. Aplūkojot augstāk iegūto sakarību, kurā izteicām $\overline{W_k^{-1}W_{k-1}^{-1}W_{k-2}^{-1}\ldots W_2^{-1}W_1^{-1}W_{k-1}W_k}$, redzams, ka pa vidu ir palindroms $\overline{W_1W_2\ldots W_{k-2}}$, kuram galos pieliktas vienādas, bet pretējas izteiksmes $\overline{W_k^{-1}W_{k-1}^{-1}}$ un $\overline{W_{k-1}W_k}$. Tātad arī iegūtais vārds ir palindroms. Taču aplūkotā izteiksme ir vienāda ar $\overline{W_1W_2\ldots W_{k+1}}$, kas noslēdz induktīvo pāreju un pierāda prasīto.

Komentārs. Šis jau ir grūtāks piemērs par to, kā sasniegt vai ieraudzīt mazāku gadījumu, kuram joprojām izpildās visas uzdevuma īpašības. Šajā uzdevumā arī jāņem vērā, ka bāzē nepieciešams aplūkot vairākus gadījumus, lai pāreja korekti izpildītos, jo pēc būtības lēciens ir no $k-2$ uz $k+1$.

5.piemērs Klasē ir n puiši un n meitenes, kur n ir naturāls skaitlis. Skolēnu garumi ir pāriem atšķirīgi pozitīvi reāli skaitļi. Katra meitene nosaka puišu skaitu, kuri ir garāki par viņu, un no iegūtā skaitļa atņem meiteņu skaitu, kuras ir garākas par viņu, un rezultātu pieraksta uz lapiņas. Katrs puisis nosaka meiteņu skaitu, kuras ir īsākas par viņu, un no iegūtā skaitļa atņem puišu skaitu, kas ir īsāki par viņu, un iegūto rezultātu pieraksta uz lapiņas. Pierādīt, ka meiteņu uz lapiņām uzrakstītie skaitļi ir puišu uz lapiņām uzrakstīto skaitļu permutācija.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu prasīto.

Indukcijas bāze. $n = 1$. Tad manuāli var pārbaudīt, ka abi skolēni uz savām lapiņām vienlaicīgi uzrakstīs vai nu 0, vai 1. Abos gadījumos acīmredzami tiek iegūtas divas identiskas permutācijas.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim k prasītais izpildās klasei ar k puišiem un k meitenēm, t.i., šajā gadījumā meiteņu uzrakstītie skaitļi ir puišu uzrakstīto skaitļu permutācija.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka prasītais izpildās arī klasei ar $k+1$ puišiem un $k+1$ meitenēm.

Sakārtosim visus skolēnus rindā pēc garumiem no īsākā uz garāko. Tā kā skolēnu garumi ir dažādi, tad eksistēs viens unikāls sakārtojums. Ievērosim, ka rindā kādā vietā blakus atradīsies puisis un meitene. Aplūkosim pirmo šādu situāciju, sākot no īsākajiem skolēniem. Pieņemsim, ka par šo skolēnu pāri īsāki ir b puiši un g meitenes. Šķirojam gadījumus.

Ja pārī meitene ir garāka par puisi, tad puisis uz lapiņas uzrakstīs skaitli $g-b$, bet meitene uzrakstīs skaitli $(k+1-b-1)-(k+1-g-1) = g-b$ (no kopējā meiteņu un puišu skaita atņem tos, kas ir īsāki, kā arī abus aplūkotos skolēnus). Tātad abi uzrakstītie skaitļi ir vienādi.

Ja pārī puisis ir garāks par meiteni, tad puisis uz lapiņas uzrakstīs skaitli $g+1-b$, bet meitene uzrakstīs skaitli $(k+1-b)-(k+1-g-1) = g+1-b$. Arī šajā gadījumā abi uzrakstītie skaitļi ir vienādi.

Uz brīdi izņemam abus aplūkotos skolēnus ārā no rindas. Tiek iegūta skolēnu rinda ar k puišiem un k meitenēm. Papildus tam varam secināt, ka šajā rindā katrs skolēns uzrakstīs to pašu skaitli, ko rindā ar $k+1$ puisi un $k+1$ meiteni, jo katram skolēnam izņēma vai nu vienu garāku puisi un vienu garāku meiteni, vai arī vienu īsāku puisi un vienu īsāku meiteni (jo izņemtie skolēni stāvēja blakus), kas acīmredzami nemaina uzrakstīto izteiksmju vērtības.

Pielietojam rindai, no kuras izņemti divi skolēni, induktīvo pieņēmumu. Secinām, ka tajā meiteņu uzrakstītie skaitļi būs puišu uzrakstīto skaitļu permutācija. Ievietojam izņemtos skolēnus atpakaļ rindā. Zināms, ka pārējo skolēnu uzrakstītie skaitļi nemainās, un izņemto skolēnu uzrakstītie skaitļi bija vienādi. Līdz ar to meiteņu un puišu uzrakstīto skaitļu kopām katrai tika pievienots viens un tas pats skaitlis, kas neizjauc īpašību par permutāciju jeb katram skaitlim vienā kopā joprojām var atrast kopiju otrā kopā. Tas arī noslēdz induktīvo pāreju un attiecīgi pierāda uzdevumā prasīto.

3.2 Svarīga nianse grafu un daudzstūru uzdevumos

Aplūkosim klasisku piemēru, kurā tiks piedāvāts nepareizs risinājums ar bieži pieļautu kļūdu uzdevumos par grafiem, kur tiek izmantota indukcija. Dziļāka informācija par grafiem tiks sniegta turpmākajos materiālos, taču pamatlietas visiem lasītājiem jau būtu jāzina.

6.piemērs Pierādīt, ka savienotā $n \geq 3$ virsotņu grafā, kurā ir vismaz n šķautnes, eksistē cikls.

Kļūdains atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 3$, kurā vienīgais iespējamais grafs ar vismaz 3 šķautnēm ir trijstūris, kas acīmredzami ir cikls.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k \geq 3$ izpildās, ka grafā ar k virsotnēm un vismaz k šķautnēm eksistē cikls.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī grafam ar $k+1$ virsotni un vismaz $k+1$ šķautni. No induktīvā pieņēmuma aplūkojam k virsotņu grafu ar vismaz k šķautnēm – tajā eksistē cikls. Pievienojam šim grafam klāt vēl vienu virsotni. Tā kā grafam jābūt savienotam, šai virsotnei jābūt savienotai ar pārējām k virsotnēm, līdz ar to grafā radīsies papildus vismaz viena šķautne, tātad grafā būs vismaz $k+1$ šķautne. Tā kā zināms, ka no induktīvā pieņēmuma aplūkotajā grafa daļā ar k virsotnēm eksistē cikls, tad cikls eksistēs arī šajā grafā ar $k+1$ virsotni un vismaz $k+1$ šķautnēm, kas pierāda prasīto.

Komentārs. Vai jums izdevās atrast kļūdu veiktajos spriedumos?

Bieži skolēni uzdevumos par grafiem indukciju izmanto šādā veidā – paņem k virsotņu grafu, pieliek tam klāt vienu virsotni, parāda, ka jaunajam grafam izpildās vajadzīgās īpašības, un uzskata, ka uzdevums ir atrisināts. Tomēr par šādu risinājumu labošanā tiktu saņemti 0 punkti. Tas ir tādēļ, ka ar šādu pārejas spriedumu netiek aplūkoti visi uzdevumā iespējamie gadījumi. Lai šāds konstruktīvs risinājums strādātu uzdevumā, kur jāpierāda īpašība patvaļīgam grafam, nepieciešams papildus pierādīt, ka uzdotā konstrukcija pārejā iegūs visus iespējamos grafus.

Šajā gadījumā nav grūti atrast pretpiemēru tam – vienīgais derīgais grafs ar 3 virsotnēm ir trijstūris, tādēļ visos tālāk šādi ģenerētajos grafos arī būs trijstūrveida cikls. Taču derīgs grafs 4 virsotnēm ir arī kvadrātveida cikls (katrai virsotnei ir 2 šķautnes), ko nevar iegūt no uzdotās konstrukcijas.

Tādēļ uzdevumos par grafiem vai kādām citām ģeometriskām struktūrām (piemēram, daudzstūriem), tipiskā shēma ir: aplūkot patvaļīgu šādu struktūru ar $k+1$ virsotnēm, izvēlēties kādu virsotni no tās (bieži kādu īpašu), paslēpt to un visus ar to saistītos savienojumus, pārliecināties, ka palikušajai struktūrai izpildās visi nosacījumi un var izmantot induktīvo pieņēmumu, no induktīvā pieņēmuma iegūt kādu secinājumu, un tad paslēpto virsotni atkal iesaistīt uzdevumā, lai arī ap to izpildītos prasītais.

Pareizs atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

<u>Indukcijas bāze</u>. $n = 3$, kurā vienīgais iespējamais grafs ar vismaz 3 šķautnēm ir trijstūris, kas acīmredzami ir cikls.

<u>Induktīvais pieņēmums</u>. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k \geq 3$ izpildās, ka savienotā grafā ar k virsotnēm un vismaz k šķautnēm eksistē cikls.

<u>Induktīvā pāreja</u>. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī savienotam grafam ar $k+1$ virsotni un vismaz $k+1$ šķautni. Aplūkosim šādu grafu, un izdalīsim divus gadījumus.

- Ja grafā eksistē virsotne, no kuras iziet tikai viena šķautne. Paslēpjam šo virsotni un no tās izejošo šķautni – atlikušajā grafa daļā ir k virsotnes un vismaz k šķautnes, tādēļ no induktīvā pieņēmuma tajā eksistē cikls, kas pierāda šo gadījumu.

- Ja grafā no katras virsotnes iziet vismaz 2 šķautnes. Uzsākam iet pa grafa šķautnēm no patvaļīga virsotnes. Tā kā no katras virsotnes iziet vismaz 2 šķautnes, tad, ienākot virsotnē pa vienu šķautni, mums vienmēr būs iespējams iziet pa atšķirīgu šķautni. Pārtraucam šo procesu brīdī, kad nonākam kādā virsotnē, kurā jau esam bijuši. Šādā veidā mēs iesim pa unikālām šķautnēm, jo katrai no tām būs unikāla virsotne, kurā mēs uzsākam pa šķautni iet. Tā kā virsotņu skaits ir galīgs, šāds process nevar turpināties bezgalīgi un kādā brīdī mums nāksies atgriezties jau apmeklētā virsotnē. Tā kā visas apmeklētās šķautnes ir unikālas, tad tās veido ciklu, kas pierāda prasīto.

Abi iespējamie gadījumi ir aplūkoti, tādēļ uzdevums ir pierādīts.

Komentārs. No šī risinājuma arī redzams, ka nepareizajā risinājumā būtībā tika aplūkots tikai gadījums, ja grafā ir virsotne, no kuras iziet tikai viena šķautne, jo konstrukcija vienmēr tādu radīja. Tomēr eksistē arī otra klase ar grafiem, kas ir jāaplūko atsevišķi.

7.piemērs Vienvirziena zemē starp katrām divām pilsētām ir vienvirziena ceļš. Pierādīt, ka Vienvirziena zemē ir pilsēta, no kuras var nonākt jebkurā citā pilsētā (iespējams, izmantojot vairākus ceļus).

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu. Papildus tam arī pārveidosim uzdevumu grafu valodā - apzīmēsim pilsētas ar virsotnēm un vienvirziena ceļus ar orientētām šķautnēm.

<u>Indukcijas bāze</u>. $n = 2$, kurā prasītais acīmredzami izpildās. *Tehniski drīkstētu lietot arī $n = 1$, taču grafiem labāk izmantot viegli saprotamus gadījumus indukcijas bāzei.*

<u>Induktīvais pieņēmums</u>. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k \geq 2$ pilnā orientētā grafā ar k virsotnēm eksistē virsotne, no kuras var sasniegt jebkuru citu virsotni.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī grafam ar $k+1$ virsotni. Lai pierādītu prasīto jebkuram iespējamam $k+1$ virsotnes grafam (kas apmierina uzdevuma nosacījumus), aplūkosim patvaļīgu $k+1$ virsotnes grafu un paslēpsim tajā vienu virsotni (apzīmēsim ar A) un šķautnes, kas saistītas ar to. Paslēpšanas rezultātā tiek iegūts pilns orientēts k virsotņu grafs, kurā no induktīvā pieņēmuma eksistē virsotne, no kuras var sasniegt visas pārējās citas. Apzīmēsim šo virsotni ar B.

Tagad A padarām atkal redzamu un aplūkojam šķautni starp A un B. Ja šķautne iet no B uz A, tad var secināt, ka no B var nokļūt jebkurā citā virsotnē. Tas izpildās, jo no B pēc induktīvā pieņēmuma var nokļūt jebkurā virsotnē, kas nav A, kā arī šajā gadījumā var nokļūt virsotnē A. Ja šķautne iet no A uz B, tad vajadzīgā virsotne ir A. Tas tādēļ, jo no A var nokļūt gan B, gan pēc tam caur B jebkurā citā virsotnē. Līdz ar to esam pierādījuši prasīto.

Komentārs. Šajā piemērā acīgi risinātāji varētu pamanīt, ka šeit virsotnes pievienošana mazākam grafam joprojām dotu pareizu pierādījumu. Tā ir taisnība, jo no grafiem, kuros ir savienoti visi virsotņu pāri, varēs iegūt visus grafus arī lielākam virsotņu skaitam, kuros ir savienotas visas virsotnes, tomēr tad šis secinājums būtu risinājumā formāli jāatrunā.

8.piemērs. Izliektā n-stūrī katra virsotne ir izkrāsota vienā no trim dažādām krāsām, piedevām zināms, ka eksistē vismaz viena katras krāsas virsotne un katrām divām blakusesošām virsotnēm ir dažādas krāsas. Pierādīt, ka daudzstūri var ar nekrustojošām diagonālēm sadalīt trijstūros tā, lai katrā trijstūrī ir trīs dažādu krāsu virsotnes.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu.

Indukcijas bāze. $n = 3$, jo trijstūris ir mazākais izliektais daudzstūris. Šajā gadījumā acīmredzami veidojas tikai viens trijstūris, kuram visas virsotnes ir dažādās krāsās.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k \geq 3$ izliektu k-stūri, kurā ir vismaz viena katras krāsas virsotne un visas kaimiņu virsotnes ir atšķirīgās krāsās, var ar nekrustojošām diagonālēm sadalīt trijstūros tā, ka ikviena trijstūra virsotnes ir visās trijās krāsās.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī derīgam $(k+1)$-stūrim. Ievērosim, ka derīgā n-stūrī ir jābūt trīs secīgām virsotnēm, kuras ir visās 3 iespējamās krāsās. Apzīmēsim krāsas ar R, G, B. Pieņemsim, ka minētās trīs virsotnes nevar atrast, tad aplūkojam patvaļīgas 3 secīgas virsotnes. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka tās ir nokrāsotas veidā $G - R - G$. Tā kā virsotnēm blakus ir jābūt dažādās krāsās, bet trīs secīgām virsotnēm nav visām atšķirīgas krāsas, tad nākamā virsotne pulksteņrādītāja secībā būs krāsā R, t.i., krāsojums būs $G-R-G-R$. Pielietojot secinājumu vienu virsotni tālāk, redzams, ka tai jābūt krāsā G, t.i., krāsojums būs $G - R - G - R - G$. Šādi turpinot spriedumus, varam secināt, ka visas virsotnes n-stūrī būs tikai krāsās R un G, kas ir pretruna ar to, ka jābūt vismaz vienai virsotnei krāsā B.

Tātad $(k+1)$-stūrī eksistēs trīs secīgas virsotnes, kas katra ir atšķirīgā krāsā. Pieņemsim, ka tās ir nokrāsotas kā $G - R - B$. Paslēpsim virsotni krāsā R un no tās izejošās malas, kā arī savienosim aplūkotās virsotnes krāsās G un B. Rezultātā veidojas k-stūris, kurā visām blakus virsotnēm ir dažādas krāsas. Aplūkosim divus iespējamos gadījumus.

- Ja starp atlikušajām k virsotnēm kāda ir krāsā R. Tad atlikušajam izliektajam k-stūrim izpildās visi nosacījumi no induktīvā pieņēmuma, tādēļ to var sadalīt trijstūros prasītajā veidā. Padarām paslēpto virsotni un malas atkal redzamas. Iepriekš iegūtais sadalījums trijstūros nemainās, tikai pie paslēptās virsotnes klāt rodas vēl viens trijstūris, jo iepriekš novilktā k-stūra mala $G - B$ tagad kļūst par diagonāli. Tomēr trijstūrim, kas veidojas blakus šai diagonālei, arī izpildās, ka visas malas ir atšķirīgās krāsās, jo paslēptā virsotne bija trešajā krāsā, tādēļ prasītais ir pierādīts.

- Ja starp atlikušajām k virsotnēm neviena nav krāsā R. Šajā gadījumā induktīvo pieņēmumu pielietot nedrīkst, jo atlikušajam k-stūrim neizpildās nosacījums par to, ka ir vismaz viena virsotne no katras krāsas. Tomēr šajā gadījumā redzams, ka atlikušās k virsotnes ir pamīšus nokrāsotas krāsās $B - G - B - G - \ldots$, jo aplūkotajam $(k+1)$-stūrim izpildījās nosacījums, ka ikvienam virsotņu kaimiņu pārim ir dažādas krāsas. Tad varam dalījumu trijstūros veidot šādi - paslēpto virsotni krāsā R savienot ar diagonāli ar visām pārējām virsotnēm. Tad veidosies trijstūri, kuriem viena virsotne būs krāsā R, bet pret šo virsotni būs $(k+1)$-stūra mala, kuras virsotnes no iegūtā ir nokrāsotas krāsās G un B. Tātad arī šajā gadījumā prasītais izpildās.

Tā kā esam aplūkojuši abus iespējamos gadījumus, tad uzdevumā prasītais ir pierādīts.

Komentārs. Šajā uzdevumā bija svarīgi ņemt vērā gadījumu, kad pēc virsotnes izslēgšanas kāda krāsa var pavisam pazust no daudzstūra – tādēļ šāda veida uzdevumos ir svarīgi pārliecināties, ka visi nosacījumi induktīvā pieņēmuma izmantošanai joprojām ir spēkā. Šī gadījuma eksistence arī parāda, ka nederētu risinājums, kurā pie mazāka daudzstūra liek klāt virsotni, jo ne vienmēr varētu garantēti sasniegt visus pieļaujamos daudzstūrus (jāsāk ar divkrāsainu daudzstūri, kas pieņēmumā nebūtu ietverts).

9.piemērs Ramona uzzīmēja izliektu 2023-stūri plaknē. Petr katrā 2023-stūra virsotnē ierakstīja reālu skaitli tā, ka jebkurās divās blakusesošās virsotnēs uzrakstīto skaitļu starpība pēc moduļa ir ne lielāka par 1. Tad starp jebkurām divām virsotnēm, kas neatrodas blakus, Ramona novilka diagonāli, ja tajās ierakstīto skaitļu starpība pēc moduļa ir ne lielāka par 1. Ar d apzīmēsim diagonāļu skaitu, ko Ramona novilka. Noteikt mazāko iespējamo d vērtību.

Atrisinājums. Mazākā iespējamā d vērtība ir 2020. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu, lai pierādītu n-stūrim, ka mazākā iespējamā d vērtība ir $d = n - 3$.

Indukcijas bāze. $n = 3$, kur acīmredzami prasītais izpildās, jo trijstūrī var novilkt tieši $d = 0$ diagonāles. *Ja nav skaidrs, vai šis gadījums patiešām ir derīgs uzdevuma kontekstā, drīkst izmantot arī lielāku, piemēram, $n = 4$, kur pierādījums nav grūts.*

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam skaitlim $k \geq 3$ Ramona k-stūrī nevar novilkt mazāk par $k - 3$ diagonālēm.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka dotais apgalvojums izpildās arī $(k+1)$-stūrim, t.i., Ramona tajā nevar novilkt mazāk par $k - 2$ diagonālēm. Aplūkosim $(k+1)$-stūra virsotni, kurā ierakstīts lielākais skaitlis (ja tādas ir vairākas, tad patvaļīgi izvēlas vienu), apzīmēsim tās vērtību ar v. Ievērosim, ka šīs virsotnes kaimiņu vērtības ir intervālā $[v-1; v]$. Acīmredzami, ka šie kaimiņi būs savienoti ar diagonāli, jo to starpība pēc moduļa nevar būt lielāka par 1.

Uz brīdi ignorējam aplūkoto virsotni ar lielāko vērtību. Atlikušās virsotnes veido k-stūri, kuram izpildās oriģinālā īpašība kaimiņiem, jo visiem pārējiem virsotņu kaimiņu pāriem īpašība saglabājas, bet jauniegūtajiem kaimiņiem, kas bija lielākās vērtības kaimiņi, mēs jau secinājām, ka prasītā īpašība izpildās. Iegūtajam k-stūrim no induktīvā pieņēmuma varam secināt, ka tajā Ramona novilks vismaz $k - 3$ diagonāles.

Ignorēto virsotni padarām atkal redzamu. Visām tām diagonālēm, kas bija novilktas iegūtajā k-stūrī, joprojām ir jābūt novilktām, jo virsotnēs ierakstītie skaitļi nemainījās. Papildus tam ar diagonāli vēl tiks savienotas lielākās vērtības kaimiņi, kas pirms tam veidoja k-stūra malu. Līdz ar to Ramonai jānovelk vismaz $k-3+1 = k-2$ diagonāles, kas pierāda induktīvo pāreju. No tā secinām, ka 2023-stūrī Ramona nevarēja novilkt mazāk par 2020 diagonālēm.

Atliek atrast konstrukciju, kurā 2020 diagonāles patiešām var sasniegt. Tādu var sasniegt, kā mazāko skaitli izvēloties 1 un uz vienu pusi no šī skaitļa secīgi rakstot skaitļus $2; 3; 4; \ldots; 1012$, bet uz otru rakstot $1.5; 2.5; 3.5; \ldots; 1011.5$. Šādā konstrukcijā ar diagonālēm būs savienoti skaitļi, kuru starpība ir 0.5 un kas ir intervālā $[1.5; 1011.5]$. Saskaitot var iegūt, ka tad būs novilktas tieši 2020 diagonāles, kas sniedz uzdevuma risinājumu.