

Dalāmība

Ievads. Šajā mājasdarbā Jums tiek piedāvāti 7 uzdevumi, kuri ir sakārtoti grūtību pieaugošā secībā, bet **ne tēmu secībā**, kāda ir materiālā. Viena uzdevuma ietvaros var nākties izmantot teorijas faktus, idejas no vairākām tēmām vienlaikus. Līdz ar to, lai tiktu galā ar uzdevumiem, ir vērts izlasīt visu materiālu. Katrs uzdevums tiek novērtēts ar 0 – 7 punktiem. Punkti tiek piešķirti arī par ne līdz galam atrisinātiem uzdevumiem, ja ir iegūti noderīgi rezultāti.

1.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu pārus (a, b) , kuriem a un b ir savstarpēji pirmskaitļi, $a < b$ un

$$b \mid (n+2)a^{n+1002} - (n+1)a^{n+1001} - na^{n+1000}$$

katram naturālam skaitlim n .

2.uzdevums Doti naturāli skaitļi a, b, c ar īpašību, ka

$$\begin{aligned}ca - 1 &\mid ab^2 - 1 \\bc - 1 &\mid ca^2 - 1 \\ab - 1 &\mid bc^2 - 1.\end{aligned}$$

Pierādīt, ka kāds no skaitļiem a, b, c ir naturāla skaitļa kvadrāts.

3.uzdevums Atrast mazāko naturālo skaitli n ar īpašību, ka visiem naturāliem skaitļiem x, y, z , kuriem $x \mid y^3$, $y \mid z^3$ un $z \mid x^3$, ir spēkā, ka $xyz \mid (x + y + z)^n$.

4.uzdevums Atrast visus veselu skaitļu pārus (x, y) , kuriem skaitļi $x^3 + y$ un $x + y^3$ abi dalās ar skaitli $x^2 + y^2$.

5.uzdevums Ar \mathbb{N} apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ar īpašību, ka

$$f(x) + yf(y) \mid x + f(y^2)$$

visiem naturāliem skaitļiem x un y .

6.uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus $n \geq 1$, kuriem eksistē naturālu skaitļu pāris (a, b) ar īpašību, ka skaitlis $a^2 + b + 3$ nedalās ar neviena pirmskaitļa kubu un

$$n = \frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3}.$$

7.uzdevums Doti naturāli skaitļi a un b , kuriem skaitlis $a!b!$ dalās ar skaitli $a! + b!$. Pierādīt, ka $3a \geq 2b + 2$.