Mazā matemātikas universitāte 2.

Ziemassvētkiem robežu nav!

Apzīmējumi

- $\exists x\, P(x)$–Eksistē tāds x, ka $P(x)$ ir patiess/izpildās.
- $\forall x\, P(x)$–Visiem x ir patiess/izpildās $P(x)$.
- $U_a(b)$–Punkta b apkārtne ar rādiusu a.

MM

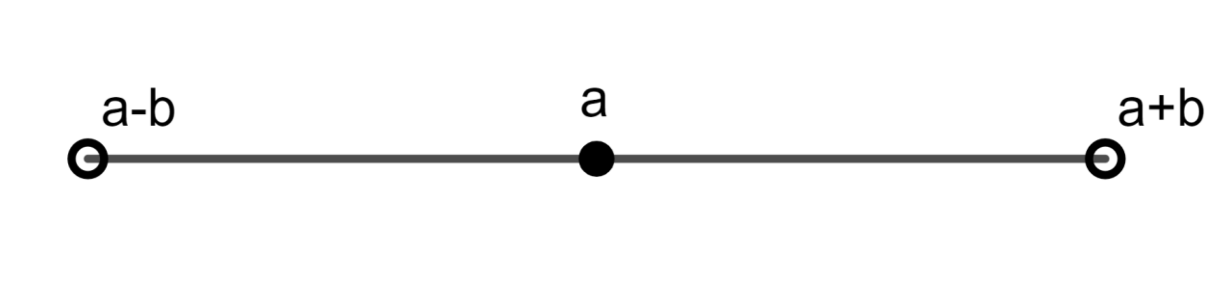
Kvantori - piemēri

- $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 4$ – Eksistē tāds x, kas pieder naturālajiem skaitļiem, ka x^2=4.
- $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < 0{,}01$- Eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka $\frac{1}{n}$ ir mazāks nekā 0,01.
- $\forall x \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$-Visi skaitļi x, kas pieder naturālo skaitļu kopai pieder arī reālo skaitļu kopai.
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}$: x^2=y -Visiem x, kas pieder reālo skaitļu kopai, eksistē tāds y kas pieder reālo skaitļu kopai, ka $x^2 = y$.

MM

APKĀRTNES – PIEMĒRI

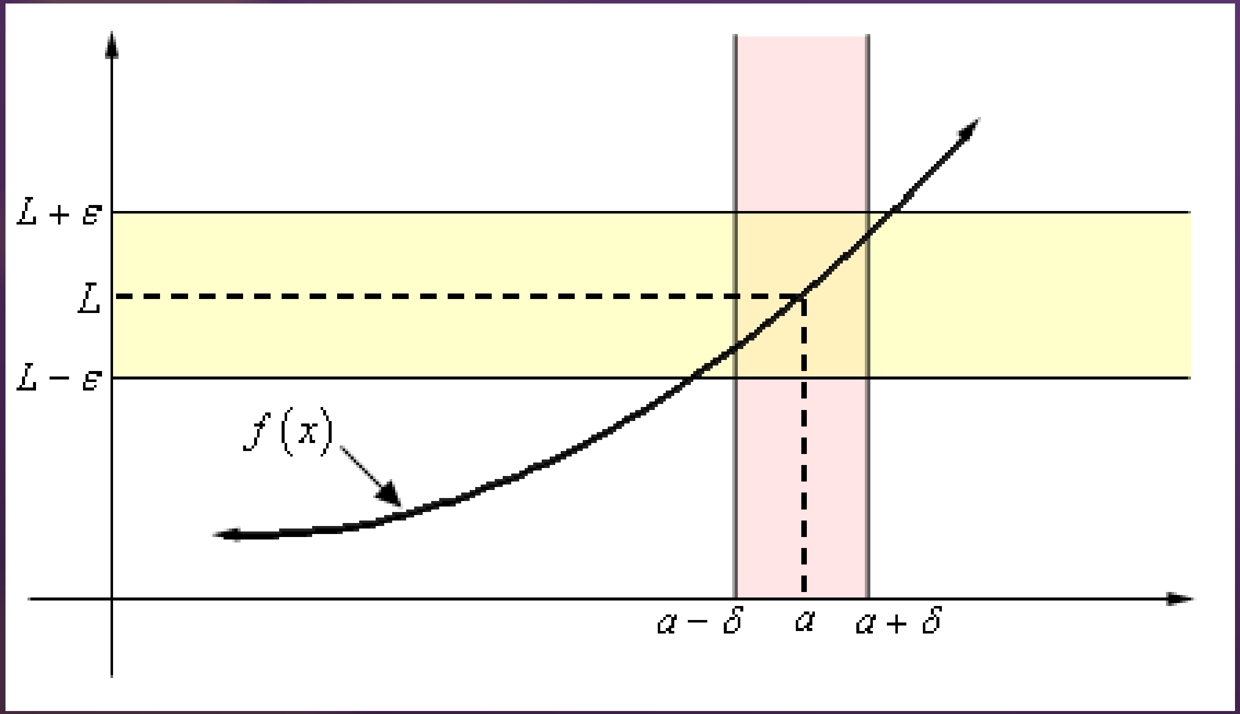
- $U_b(a)$- vaļēja kopa centrēta punktā a ar rādiusu b.
- Reālo skaitļu gadījumā, ja $a, b \in \mathbb{R}$ apkārtni var uzrakstīt kā nevienādību: $|x - a| < b$



Robeža=«tuvošanās»

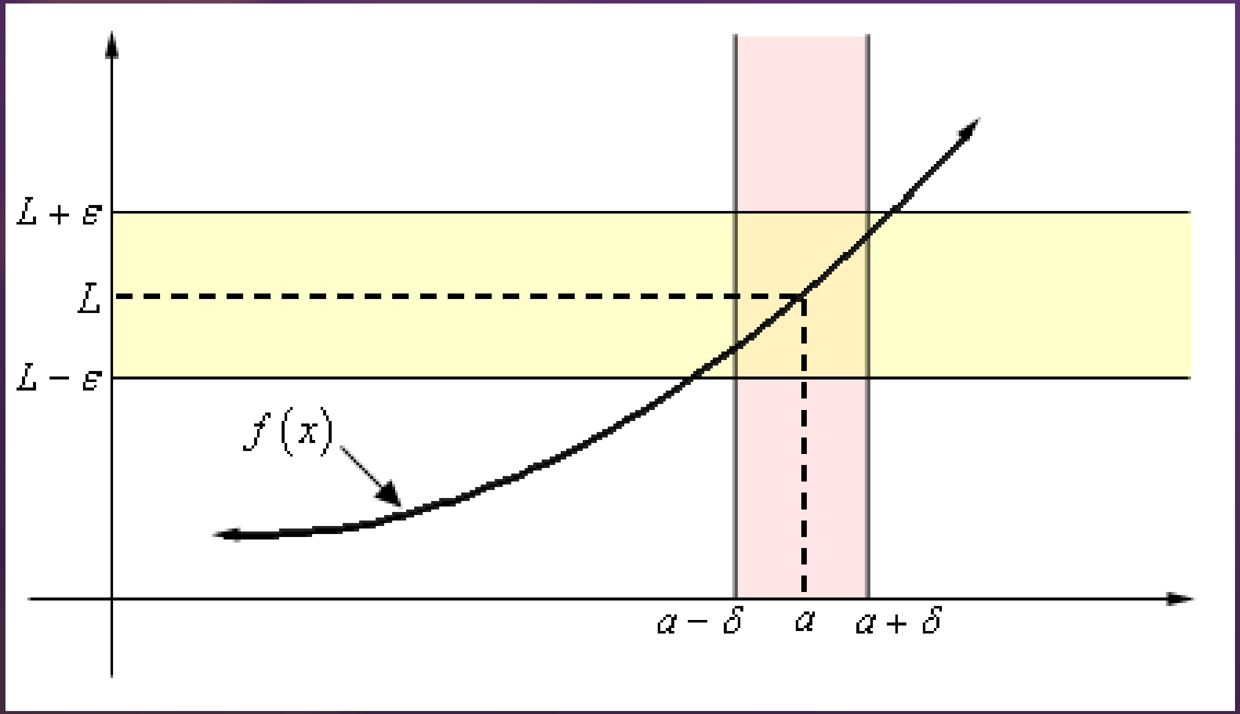
Kā matemātiski aprakstīt tuvošanos?

Tuvošanās matemātiskā nozīme



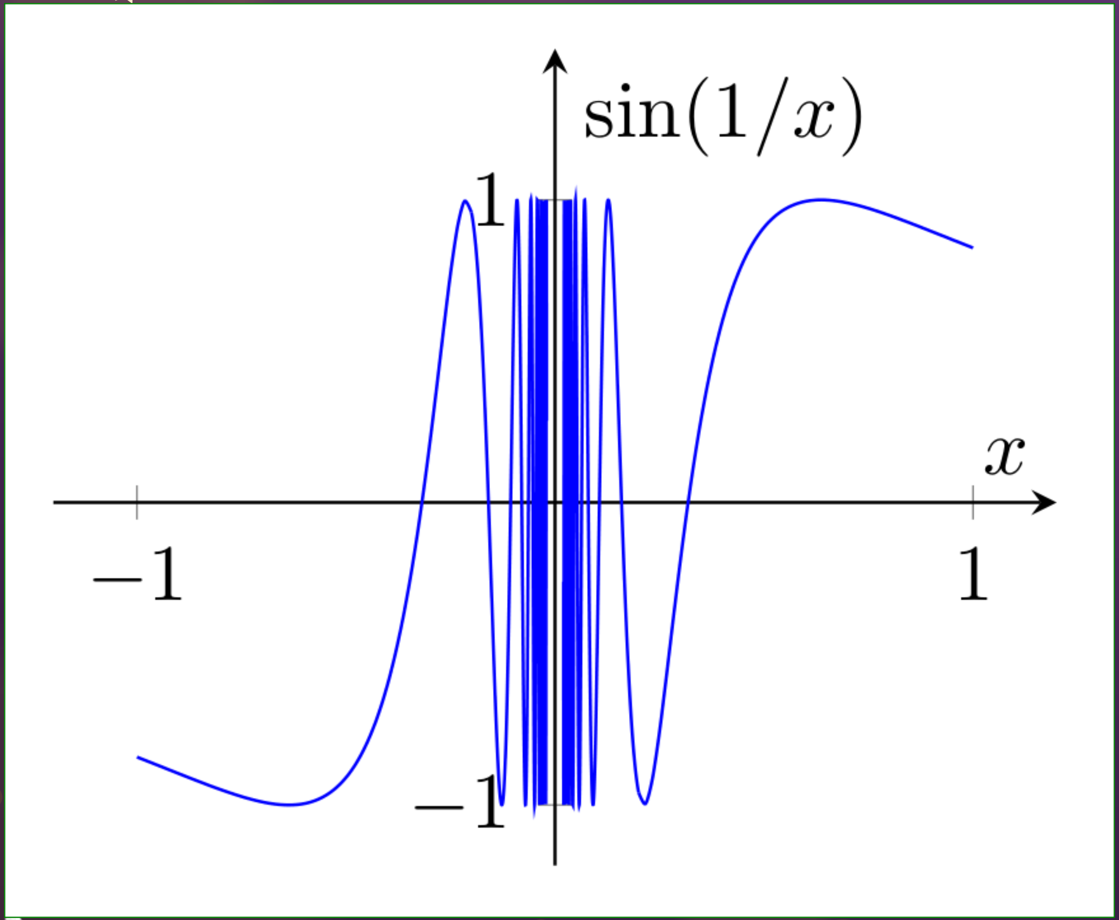
Vēlamies aprakstīt to, ka funkcijas argumentam x tuvojoties konkrētai vērtībai a, funkcijas vērtība $f(x)$, tuvojas kādai konkrētai vērtībai L.

Apkārtnes jēdziena iesaistīšana



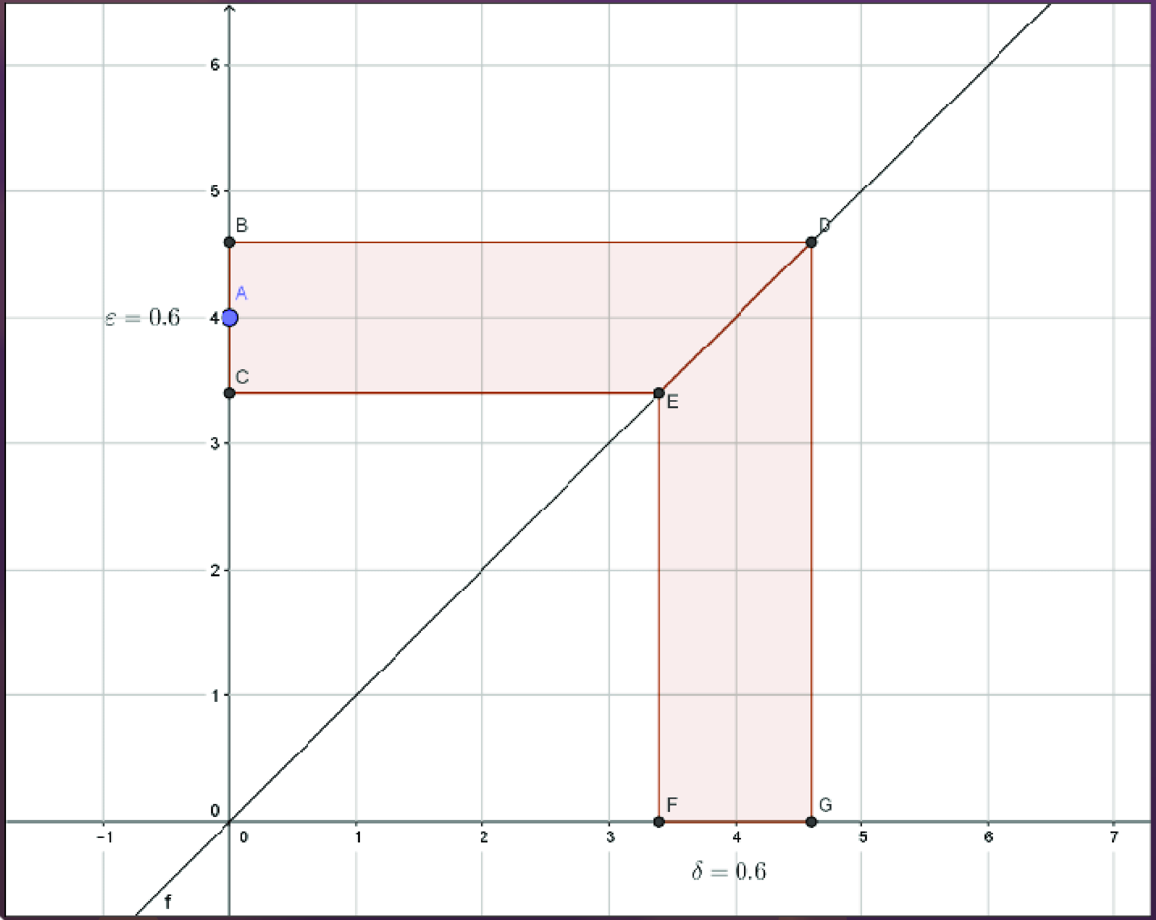
Varam aprakstīt tuvošanos izmantojot apkārtnes jēdzienu.
Tā vietā lai teiktu «x tuvojas a», «$f(x)$ tuvojas L»
Varam teikt «Samazinās punkta a delta apkārtne», «Samazinās punkta L epsilon apkārtne».
Šādi pārfrāzējot iegūstam:
«Ja x pieder punkta a delta apkārtnei, un tiek samazināta delta vērtība, tad $f(x)$ ir jāpieder punkta L epsilon apkārtnei»

Neliela nianse



Mēs gribam, lai robeža ir kāda konkrēta vērtība (vai arī ∞), bet šajā gadījumā redzam, ka x tiecoties uz 0, nevarēsim iegūt vienu konkrētu vērtību, neskatoties uz to, ka kādam x, kas pieder punkta 0 delta apkārtnei, $f(x)$ noteikti piederēs kāda punkta no intervāla $[-1; 1]$ epsilon apkārtnei. Tāpēc paņemsim extra nosacījumu, ka VISIEM x kas pieder kāda punkta delta apkārtnei, $f(x)$ ir jāpieder punkta L epsilon apkārtnei.

LABĀKA DEFINĪCIJA



Ņemot vērā iepriekšējā slaidā darīto, varētu teikt, ka mūsu robežas definīcija izskatītos apmēram šādi:
«Visiem x, kas pieder punkta a delta apkārtnei, eksistēs tāds epsilon, ka $f(x)$ pieder punkta L epsilon apkārtnei»
Šeit rodas nelielas problēmas, jo mums epsilon mainās atkarībā no delta. Iepriekšējā piemērā nospraužot $\varepsilon = 2$, šī definīcija būtu spēkā.

Robežas definīcija

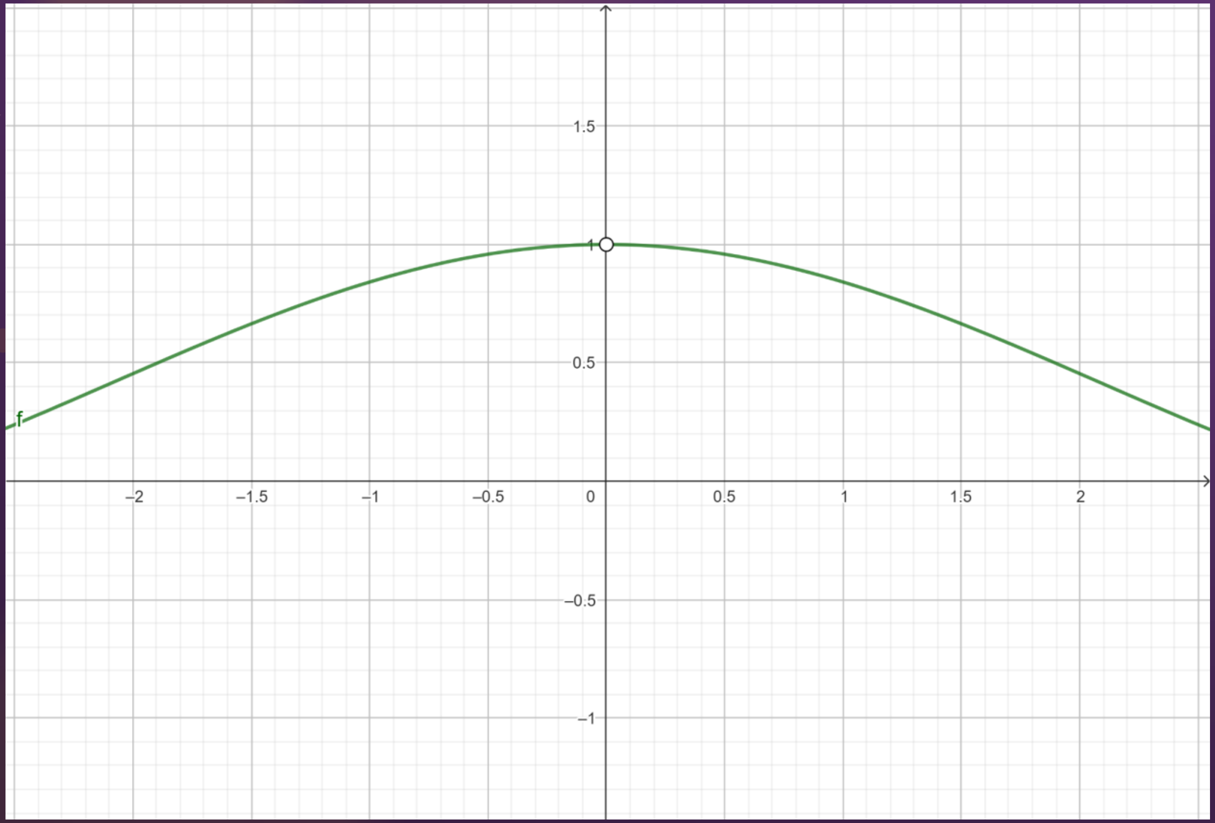
Reālu argumentu funkcijām ar reālām vērtībām.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \cap D_f \setminus \{a\} \Longrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(L)$$

Visiem epsilon lielākiem par 0 eksistē delta lielāka par 0, tāda, ka visiem x, kas pieder punkta a delta apkārtnes šķēlumam ar funkcijas f definīcijas kopu, izņemot pašu punktu a, $f(x)$ ir jāpieder punkta L epsilon apkārtnei.

M M

Piemērs



Apskata robežu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x}$

Acīmredzami, funkcija nav definēta punktā 0 (nenoteiktība $\frac{0}{0}$)

Bet, no funkcijas grafika ir redzams, ka, funkcijas argumentam tiecoties uz 0, funkcija tiecas uz 1.

Tātad $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

Šī ir īpaša robeža, to sauc par **pirmo ievērojamo robežu.**

Robežas pierādījums

- Kāpēc $\lim_{x \to 2} 3x = 6$?
- Vai $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(2) \cap D_f \setminus \{2\} \to f(x) \in U_\varepsilon(6)$?
- Šajā gadījumā: $U_\delta(2) = |x-2| < \delta$, $U_\varepsilon(6) = |3x-6| < \varepsilon$
- Jāatrod delta kā funkcija no epsilon $\delta(\varepsilon)$
- $|3x-6| < \varepsilon$
- $3|x-2| < \varepsilon$
- $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$
- Paņem $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$

tad: $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$

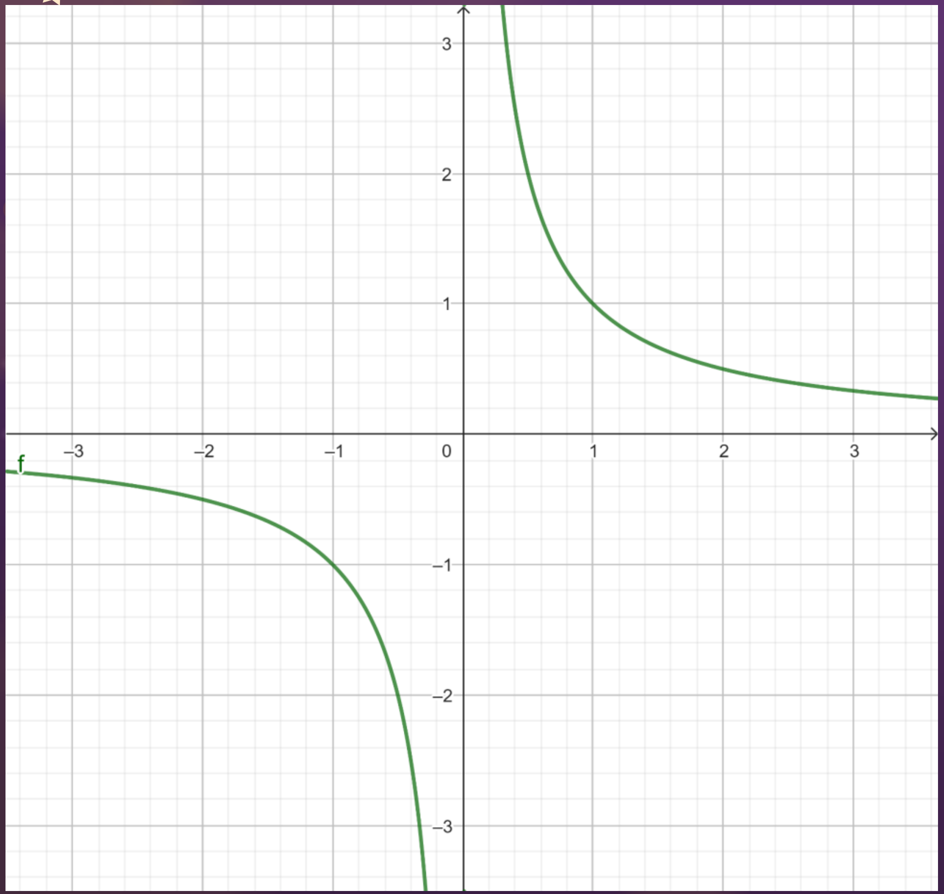
$|x-2| < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$

$3|x-2| < \varepsilon$

$|3x-6| < \varepsilon$ ■

MM

Vienpusējās robežas

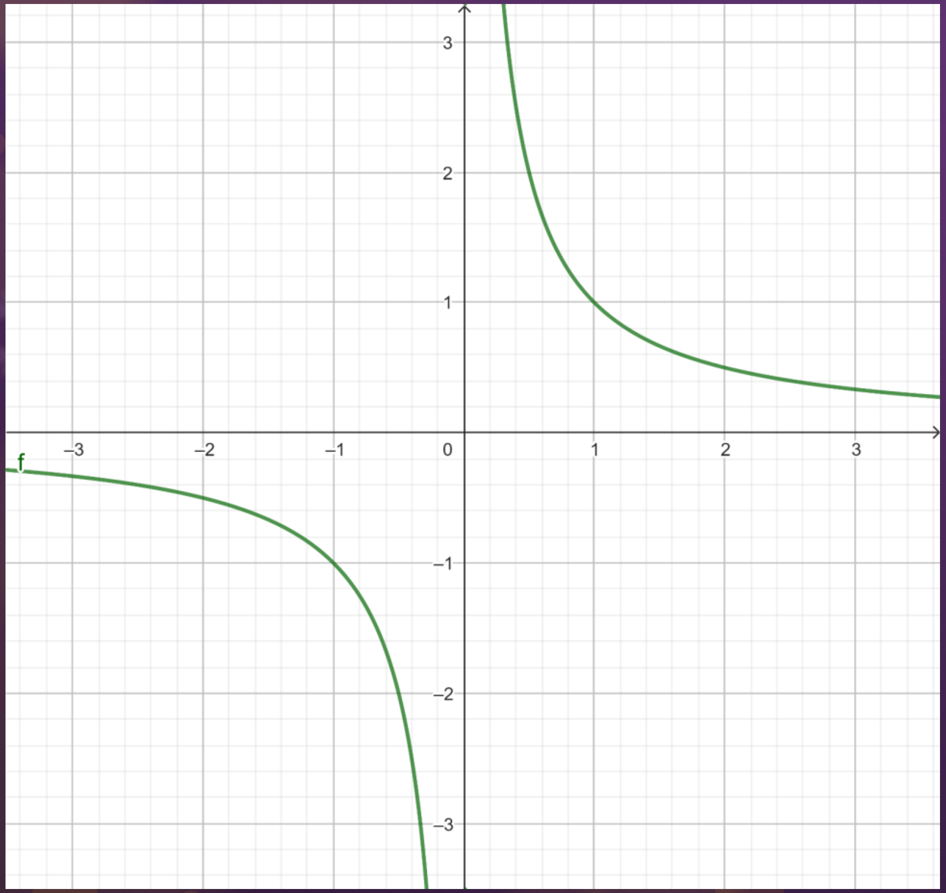


Kāda ir robeža funkcijai $\frac{1}{x}$ kad x tiecas uz 0?
Ja mēs skatamies no labās puses, ir acīmredzami, ka tuvinot x nullei, funkcija tiecas uz $+\infty$.
Bet, skatoties no kreisās puses, mēs redzam, ka funkcija tiecas uz $-\infty$.
Tad kura no šīm ir pareizā atbilde?

NEVIENA!

MM

VIENPUSĒJĀS ROBEŽAS



No robežas definīcijas izriet, ka funkcijai ir jātiecas uz vienu konkrētu vērtību, nevis divām. Tādēļ, šādos gadījumos saka, ka robeža neeksistē.

Bet šajā gadījumā mēs varam strādāt ar vienpusējām robežām. Tās ir tās pašas robežas, vienīgi mēs ierobežojam pusi no kuras funkcijas arguments var tiekties uz nepieciešamo vērtību Apzīmē šādi:

$$\lim_{x \to a-} f(x)$$

$$\lim_{x \to a+} f(x)$$

Tātad robeža eksistē tad un tikai tad kad:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$$

Tad $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$

Praktiskā daļa

Ievietošana

- Visvienkāršākās ir robežas, kuras var atrast, vienkārši ievietojot argumenta vērtību, uz kuru tas tiecas.
- Piemēri:
  - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3} = -\frac{2}{3}$,
  - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x} = 1$,
  - $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x\cos x}} = 1$,
  - $\lim\limits_{x\to e^2} \frac{e\ln x}{x} = \frac{2}{e}$.

Sadalīšana reizinātājos

- Ja, ievietojot x vietā vērtību, uz kuru tas tiecas iegūst nenoteiktību $\frac{0}{0}$, tad skaitītāju un saucēju sadala reizinātājos un saīsina.
- Piemēri:
  - $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-1}=3,$
  - $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{x-3}=-\frac{3}{2},$
  - $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-x^2-4x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x-1)}=3.$

Reizināšana ar saistīto

- Ja, ievietojot x vietā vērtību, uz kuru tas tiecas iegūst nenoteiktību $\frac{0}{0}$ un izteiksme zem robežas satur saknes, tad skaitītāju un saucēju pareizina ar saistīto reizinātāju, lai iegūtu kvadrātu starpību.
- Piemērs:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{7-x}-2}{x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{7-x}-2)(\sqrt{7-x}+2)}{(x-3)(\sqrt{7-x}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{7-x-4}{(x-3)(\sqrt{7-x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)(\sqrt{7-x}+2)} = -\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{7-x}+2} = -\frac{1}{4}.$$

MM

Dalīšana ar augstāko pakāpi

- Ja izteksme zem robežas satur divu polinomu dalījumu, un x tiecas uz bezgalību, tad, lai aprēķinātu robežas vērtību, skaitītājs un saucējs ir jāreizina ar $\frac{1}{x^k}$, kur k – polinoma kārta ar augstāko pakāpi.
- Piemēri:
  - $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+12x-4}{3x^3-12x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}*(x^3-4x^2+12x-4)}{\frac{1}{x^3}*(3x^3-12x+4)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{3-\frac{12}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\frac{1}{3},$$
  - $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x+2}{x^4+7x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^4}*(2x^3-3x+2)}{\frac{1}{x^4}*(x^4+7x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{1+\frac{7}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=0,$$
  - $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+9}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}*(x^2+9)}{\frac{1}{x^2}*(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{9}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=+\infty.$$

Pirmā ievērojamā robeža

- Robežu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ sauc par pirmo ievērojamo robežu.
- Piemēri:
  - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1,$
  - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 * \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 * 1 = 5,$
  - $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$
- Sekas: $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \ \ (x \to 0).$

MM

Otrā ievērojamā robeža

- Robežu $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ un $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ sauc par otro ievērojamo robežu.
- Piemēri:

  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=e^{3},$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$

MM

Paldies par uzmanību!