

# Viļņu matemātika

Vadošais pētnieks un docents Dr. Jānis Bajārs

Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte  
Matemātikas nodaļa

Mazā matemātikas universitāte  
18.02.2023.

- 1 Mehāniskās svārstības
- 2 Harmoniskās svārstības un to īpašības
- 3 Svārstību signāla analīze
- 4 10 min pārtraukums
- 5 Viļņi, to klasifikācija un raksturlielumi
- 6 Viļņu svārstību daudzveidība ar piemēriem
- 7 Papildmateriāls
- 8 10 min pārtraukums

# Vibrācijas, svārstības, viļņi, ...

Prieki



un bēdas...



Tradicionāli, izšķir trīs viļņu kategorijas:

- mehāniskos viļņus;
- elektromagnētiskos viļņus;
- matērijas jeb de Brojī viļņus.

**Piezīme:** Lielākā atšķirība starp mehāniskajiem un elektromagnētiskajiem viļņiem ir tāda, ka mehāniskie viļņi ir svārstības, kas izplatās elastīgā vidē, savukārt elektromagnētiskajiem viļņiem nav nepieciešama elastīga vide, lai tie varētu izplatīties (tie var izplatīties arī vakuumā).

# 1min tests



1. Apdegumu veicināja:

- A mehāniskie viļņi;
- B elektromagnētiskie viļņi.



2. Cunami ir:

- A mehānisks vilnis;
- B elektromagnētisks vilnis.



3. Skaņu rada:

- A mehāniskie viļņi;
- B elektromagnētiskie viļņi.

# 1min testa atbildes



1. Apdegumu veicināja:

- A mehāniskie viļņi;
- B elektromagnētiskie viļņi.



2. Cunami ir:

- A mehānisks vilnis;
- B elektromagnētisks vilnis.



3. Skaņu rada:

- A mehāniskie viļņi;
- B elektromagnētiskie viļņi.

## Definīcija

Par *mehāniskām svārstībām* sauc tādu kustību, kurā no stabila līdzsvara stāvokļa izvirzīts ķermenis periodiski atgriežas tajā.

Neskatoties uz dažādu ķermeņu svārstību atšķirībām, tām piemīt kopējas īpašības un to raksturlielumi ir:

- svārstību periods;
- frekvence;
- amplitūda;
- enerģija.

---

<sup>1</sup>**Avots:** <https://www.uzdevumi.lv/p/fizika/10-klase>

## Definīcija

Svārstību *periods*  $T$  ir laiks, kādā notiek viena pilna svārstība.

Svārstību perioda mērvienība SI sistēmā ir sekunde ( $s$ ).

Svārstību periodu aprēķina pēc formulas:

$$T = \frac{t}{n},$$

kur  $t$  ir svārstību laiks un  $n$  ir pilnu svārstību skaits.

Attiecīgi,

$$n = \frac{t}{T} \quad \text{un} \quad t = nT.$$



## Definīcija

Svārstību skaits laika vienībā ir *svārstību frekvence*  $f$ .

Svārstību frekvences mērvienība SI sistēmā ir herci ( $Hz$ ).

Svārstību periodu un frekvenci saista sakarība:

$$f = \frac{1}{T}.$$

Attiecīgi,

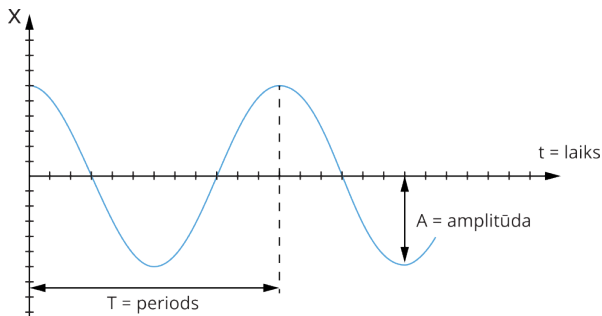
$$T = \frac{1}{f}.$$

# Svārstību amplitūda

## Definīcija

*Svārstību amplitūda*  $A$  ir ķermeņa maksimālā novirze no līdzsvara stāvokļa.

Svārstību amplitūdas mērvienība SI sistēmā ir metrs ( $m$ ).



**Attēla avots:** <https://www.uzdevumi.lv/p/fizika/10-klase/mehaniskas-svarstibas-un-vilni-6921/re-7fc97558-544b-4537-8fad-a26392eb63a2>

## Definīcija

Svārstību sistēmā notiek divu enerģijas veidu - **potenciālās** (stāvokļa) enerģijas  $E_p$  un **kinētiskās** (kustības) enerģijas  $E_k$  savstarpējās pārvērtības.

Svārstību enerģijas mērvienība SI sistēmā ir džouls ( $J$ ).

Ķermenim svārstoties, nepārtraukti notiek uzkrātās potenciālās enerģijas pāriešana kinētiskajā enerģijā un pēc tam pretēji - kinētiskā enerģija atkal pāriet potenciālajā enerģijā.

Nerimstošu svārstību gadījumā svārstību sistēmas pilnā mehāniskā enerģija ir kinētiskās un potenciālās enerģijas summa, un tā visu laiku paliek nemainīga, t.i.,

$$E = E_k + E_p = \text{const}, \quad \text{jeb} \quad \frac{dE}{dt} = 0,$$

kur  $E$  ir sistēmas kopējā enerģija.

## Definīcija

*Svārstības, kas norisinās pēc sinusa vai kosinusa likuma, sauc par **harmoniskām svārstībām**.*

Runājot par sinusa un kosinusa funkcijām, ...

# 1min tests

1.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$

A 1

B -1

C pasaules gals

2.  $\cos(\alpha + \beta) =$

A  $\cos \alpha + \cos \beta$

B  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

C  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

3.  $2 \sin \alpha \cos \alpha =$

A nevar vienkāršot

B  $\cos 2\alpha$

C  $\sin 2\alpha$

# 1min testa atbildes

1.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha =$

A 1

B -1

C pasaules gals

2.  $\cos(\alpha + \beta) =$

A  $\cos \alpha + \cos \beta$

B  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

C  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

3.  $2 \sin \alpha \cos \alpha =$

A nevar vienkāršot

B  $\cos 2\alpha$

C  $\sin 2\alpha$

# Harmoniskās svārstības

$$s_1(t) = A \sin(2\pi ft + \phi_1), \quad s_2(t) = A \cos(2\pi ft + \phi_2),$$

kur  $\phi_1$  un  $\phi_2$  ir svārstību fāzes.

Abas harmoniskās svārstības  $s_1$  un  $s_2$  sakrīt, ja izpildās sakarība:

$$\phi_1 = \phi_2 - \frac{\pi}{2},$$

jo, tad:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A \sin\left(2\pi ft + \phi_2 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A \sin\left((2\pi ft + \phi_2) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A \cos(2\pi ft + \phi_2) \\ &= s_2(t). \end{aligned}$$

## 2min tests

Harmonisko svārstību:

$$s(t) = -2 \sin \left( 2\pi t + \frac{\pi}{3} \right),$$

1. amplitūda  $A =$

- A -2       B 2       C 4

2. periods  $T =$

- A 1       B  $1/(2\pi)$        C  $\pi/3$

3. frekvence  $f =$

- A  $2\pi$        B 1       C  $\pi/3$

4. fāze  $\phi =$

- A  $-\pi/3$        B  $2\pi/3$        C  $\pi/3$



## 2min testa atbildes

Harmonisko svārstību:

$$s(t) = -2 \sin \left( 2\pi t + \frac{\pi}{3} \right),$$

1. amplitūda  $A =$

- A -2       B 2       C 4

2. periods  $T =$

- A 1       B  $1/(2\pi)$        C  $\pi/3$

3. frekvence  $f =$

- A  $2\pi$        B 1       C  $\pi/3$

4. fāze  $\phi =$

- A  $-\pi/3$        B  $2\pi/3$        C  $\pi/3$

# Harmonisko svārstību īpašības

1

$$A \sin(2\pi ft + \phi) = A_1 \sin(2\pi ft) + A_2 \cos(2\pi ft)$$

2

$$\sum_i A_i \sin(2\pi ft + \phi_i) = A \sin(2\pi ft + \phi)$$

3

$$\prod_i A_i \sin(2\pi ft + \phi_i) \neq A \sin(2\pi ft + \phi)$$

4 Ķermeņa svārstības, kā divu patvaļīgu harmonisko svārstību summa:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t),$$

ir periodiskas ar periodu  $T$ , t.i.,  $s(t + T) = s(t)$ , ja eksistē  $n, m \in \mathbb{N}$ , ka izpildās sakarība:

$$T = nT_1 = mT_2.$$

Pretējā gadījumā, svārstības  $s(t)$  nav periodiskas.

# Harmonisko svārstību enerģija

Patvaļīgai (ķermeņa) harmoniskai svārstībai:

$$s(t) = A \sin(2\pi ft + \phi),$$

potenciālā un kinētiskā enerģija ir formā:

$$E_p = \frac{1}{2}m(2\pi f)^2 s^2, \quad E_k = \frac{1}{2}m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2,$$

kur  $m$  ir ķermeņa masa.

---

Sinusa un kosinusa funkciju atvasinājumi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\alpha \sin(\beta t + \gamma)] &= \alpha \beta \cos(\beta t + \gamma), \\ \frac{d}{dt} [\alpha \cos(\beta t + \gamma)] &= -\alpha \beta \sin(\beta t + \gamma). \end{aligned}$$

# Harmonisko svārstību kopējā enerģija ir konstanta

Ja

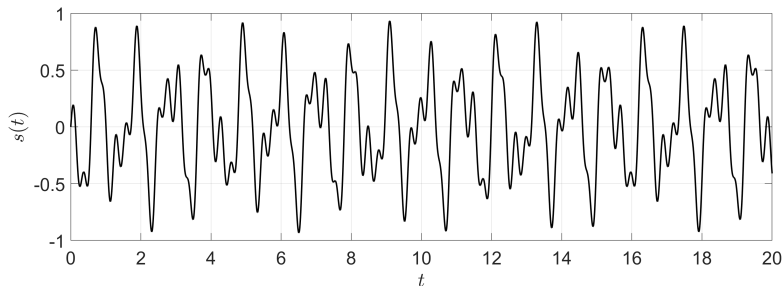
$$s(t) = A \sin(2\pi ft + \phi),$$

tad

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ &= \frac{1}{2}m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m(2\pi f)^2 s^2 \\ &= \frac{1}{2}m (2\pi f A \cos(2\pi ft + \phi))^2 + \frac{1}{2}m(2\pi f)^2 (A \sin(2\pi ft + \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2}m(2\pi f)^2 A^2 (\cos^2(2\pi ft + \phi) + \sin^2(2\pi ft + \phi)) \\ &= \frac{1}{2}m(2\pi f)^2 A^2 \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

**Piezīme:** Pierādījums ir identisks, ja  $s(t) = A \cos(2\pi ft + \phi)$ .

# Signāla jeb laikrindu analīze



$$s(t) = A \sin(2\pi f_1 t) + B \sin(2\pi f_2 t) + C \sin(2\pi f_3 t),$$

kur  $A = 0.3$ ,  $B = 0.2$  un  $C = -0.5$ , tai skaitā:

$$T_1 = 0.6, f_1 = 1.6667; \quad T_2 = 0.3, f_2 = 3.3333; \quad T_3 = 1.04, f_3 = 0.9615.$$

Signāla jeb svārstību periods  $T = 62.4$ .

# Signāla jeb laikrindu aproksimācija

Svārstību funkcijas aproksimācija ar Furjē rindām, t.i.,

$$s(t) \approx \bar{s}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right],$$

kur  $f_n = \frac{n}{T}$ ,  $\frac{f_n}{f_m} = \frac{n}{m}$  un

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) dt,$$

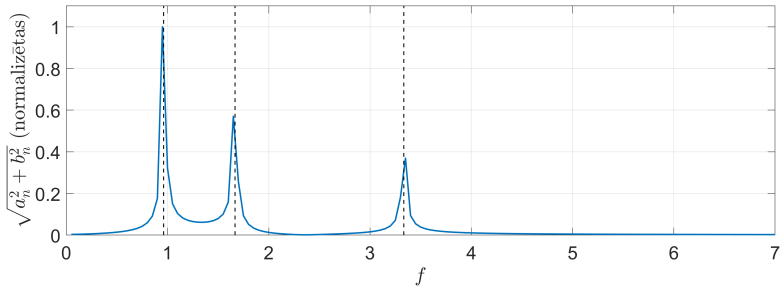
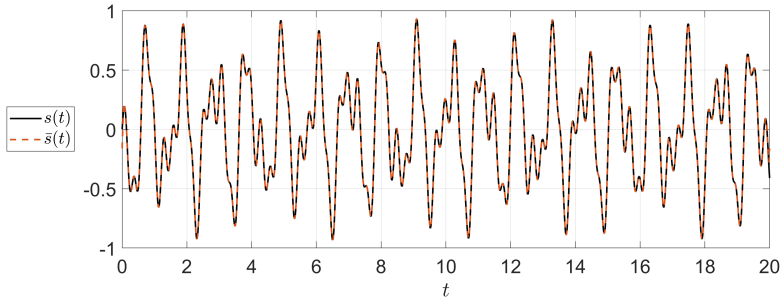
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt,$$

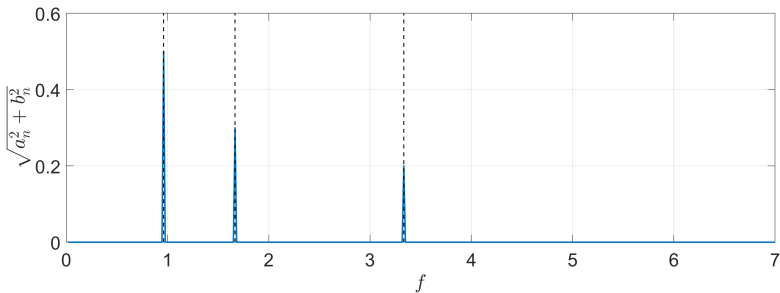
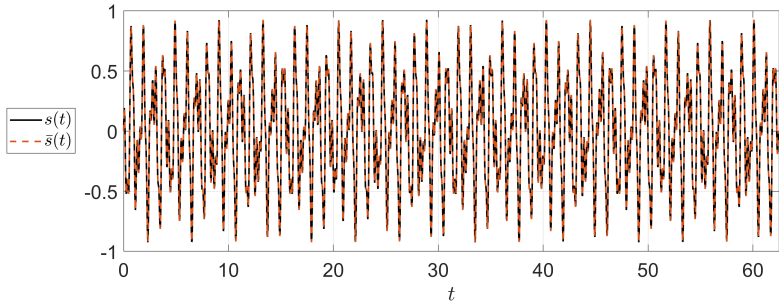
visiem  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Nedaudz par Furjē rindām:** <https://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

# Signāla jeb laikrindu analīze ar $T = 20$



# Signāla jeb laikrindu analīze ar $T = 62.4$





*10min pārtraukums*

## Definīcija

*Viļņi ir svārstības, kuras izplatās telpā.*

**Viena no vissvarīgākajām lietām**, kas jāatceras par viļņiem, ir tā, ka tie transportē enerģiju, nevis vielu.

Mēdz teikt, ka viļņi ir enerģijas transportēšanas fenomens.

Jau minēju par mums interesējošām divām viļņu kategorijām: mehāniskie un elektromagnētiskie viļņi.

## Definīcija

*Šķērsviļņos* daļiņu svārstību virziens ir perpendikulārs viļņa izplatīšanas virzienam.

---

Seismiskie S un Love viļņi, stīgas svārstības, tai skaitā arī elektromagnētiskie viļņi.

## Definīcija

*Garenviļņos* daļiņu svārstības sakrīt ar viļņa izplatīšanās virzienu.

---

Seismiskie P viļņi un skaņas jeb spiediena viļņi.

## Definīcija

*Virsmas viļņos* šķidrums daļiņas vienlaicīgi svārstās gan gareniski, gan šķērsvirzienā.

---

Ūdens virsmas viļņi un seismiskie Rayleigh viļņi.

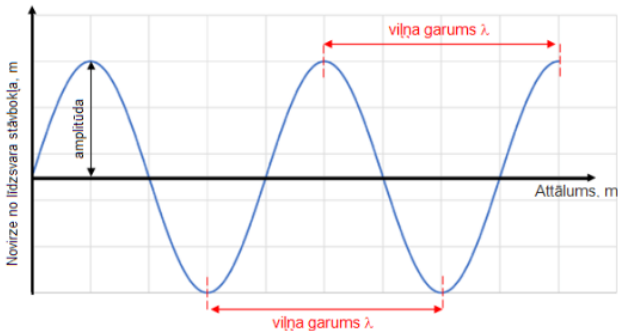
Neskatoties uz viļņu daudzveidību, periodiskiem viļņiem piemīt kopēji raksturlielumi:

- svārstību periods;
- frekvence;
- amplitūda;
- enerģija;
- viļņa garums;
- viļņa ātrums.

## Definīcija

Attālumu, kādā izplatās svārstības perioda laikā, sauc par **viļņa garumu**  $\lambda$ .

Viļņa garuma mērvienība SI sistēmā ir metrs ( $m$ ).



## Definīcija

*Viļņa ātrums*  $v$  raksturo, cik lielā attālumā noteiktā laikā vidē spēj izplatīties viļnis; tas ir atkarīgs no konkrētās vides, kurā viļnis izplatās.

---

Viļņa ātruma mērvienība SI sistēmā ir metrs pret sekundu ( $m/s$ ).

Viļņa ātrumu aprēķina šādi:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f.$$

Vienas telpas dimensijas  $x \in \mathbb{R}$  sinusoidālu viļņu svārstības apraksta funkcija:

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi),$$

kur

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ir viļņa numurs un

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ir cikliskā jeb leņķiskā frekvence.

Noteiksim viļņa ātrumu sinusoidālam vilnim:

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi).$$

Izskaitļojot, iegūstam, ka

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft + \phi\right) \\ &= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \lambda ft) + \phi\right) \\ &= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right). \end{aligned}$$



No tikko iegūtā rezultāta:

$$u(x, t) = A \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right),$$

ievērosim, ka visiem tādiem  $x$  un  $t$ , pie kuriem

$$x - vt = \text{const}, \quad \text{tad arī} \quad u(x, t) = \text{const}.$$

No tā izriet, ka:

- ja  $v = 0$ , tad vilnis ir stacionārs un nepārvietojas;
- ja  $v > 0$ , tad vilnis pārvietojas uz labo pusi;
- ja  $v < 0$ , tad vilnis pārvietojas uz kreiso pusi.

**Piezīme:** apgalvojums ir spēkā arī patvaļīgam vilnim formā:

$$u(x, t) = f(x - vt).$$

## 2min tests

Sinusoidāla viļņa:

$$u(x, t) = 3 \sin(2\pi x - t),$$

1. viļņa garums  $\lambda =$

- A  $2\pi$        B  $\frac{1}{2\pi}$        C 1

2. frekvence  $f =$

- A  $2\pi$        B  $1/(2\pi)$        C -1

3. ātrums  $v =$

- A  $1/(2\pi)$        B -1       C 0

4. pārvietošanās virziens ir

- A  $\leftarrow$        B  $\uparrow$        C  $\rightarrow$

## 2min testa atbildes

Sinusoidāla viļņa:

$$u(x, t) = 3 \sin(2\pi x - t),$$

1. viļņa garums  $\lambda =$

- A  $2\pi$        B  $\frac{1}{2\pi}$        C  $1$

2. frekvence  $f =$

- A  $2\pi$        B  $1/(2\pi)$        C  $-1$

3. ātrums  $v =$

- A  $1/(2\pi)$        B  $-1$        C  $0$

4. pārvietošanās virziens ir

- A  $\leftarrow$        B  $\uparrow$        C  $\rightarrow$

# Sinusoidālu viļņu mehāniskā enerģija

Sinusoidāla viļņa:

$$u(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi).$$

mehānisko potenciālo and kinētisko enerģiju attiecībā uz viļņa garumu  $\lambda$  izskaitļoto pēc dotajām formulām:

$$E_p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^\lambda u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \int_0^\lambda \sin^2(kx - \omega t + \phi) dx = \frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2 \lambda,$$

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda u_t^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t + \phi) dx = \frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2 \lambda.$$

Kopējā enerģija attiecībā uz viļņa garumu ir

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \lambda = \text{const},$$

kur  $\rho$  ir homogēnas elastīgās vides blīvums.

Mēs tikko aplūkojām sinusoidālus skrejviļņus. Stāvviļņi ir divu identisku skrejviļņu, kas pārvietojās pretējos virzienos, superpozīcija, t.i.,

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = 2A \sin(kx + \phi) \cos(\omega t),$$

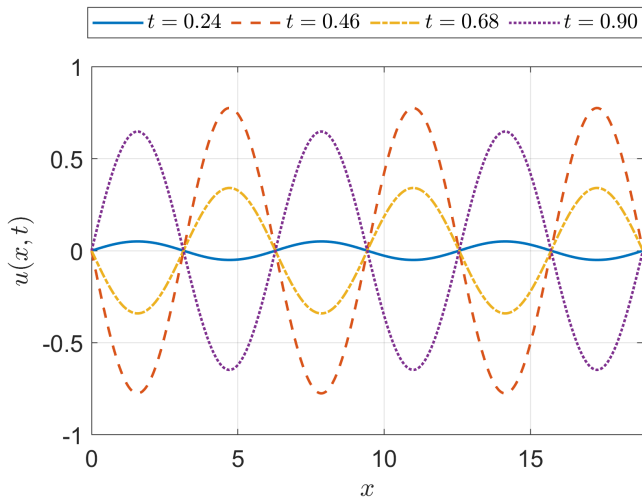
kur

$$u_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi),$$

$$u_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \phi).$$

Svarīgi ievērot, ka, neskatoties uz to, ka vilnis  $u(x, t)$  nepārvietojas, bet tas nav stacionārs, t.i., tas nav konstants katrā telpas punktā  $x$ .

# Stāvviļņa piemērs



$u(x, t) = 2A \sin(kx + \phi) \cos(\omega t)$ , kur  $A = 0.4$ ,  $\phi = 0$ ,  $k = 1$  un  $\omega = 2\pi$ .

# Sinusoidāla šķērsviļņa piemērs

$$u(x, t) = A \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right),$$

kur

$$A = 0.4,$$

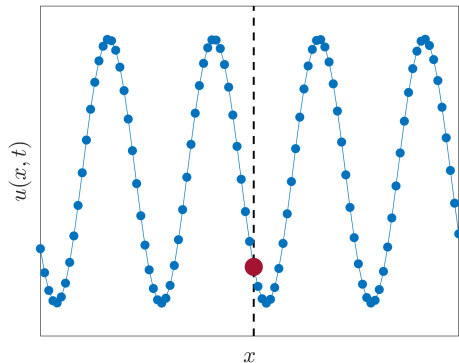
$$\phi = 0,$$

$$\lambda = 4\pi,$$

$$v = 4\pi,$$

$$f = 1,$$

$$T = 1.$$



# Sinusoidāla garenviļņa piemērs

$$u(x, t) = A \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right),$$

kur

$$A = 0.4,$$

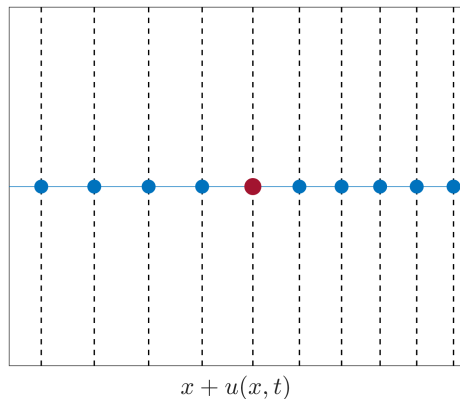
$$\phi = 0,$$

$$\lambda = 4\pi,$$

$$v = 4\pi,$$

$$f = 1,$$

$$T = 1.$$





# Periodiska virsmas viļņa piemērs

$$u(x, t) = A \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right),$$

$$v(x, t) = A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right),$$

kur

$$A = 1,$$

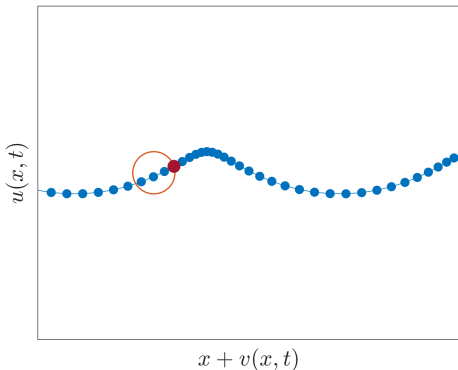
$$\phi = 0,$$

$$\lambda = 4\pi,$$

$$v = 4\pi,$$

$$f = 1,$$

$$T = 1.$$



*Papildmateriāls*

## Definīcija

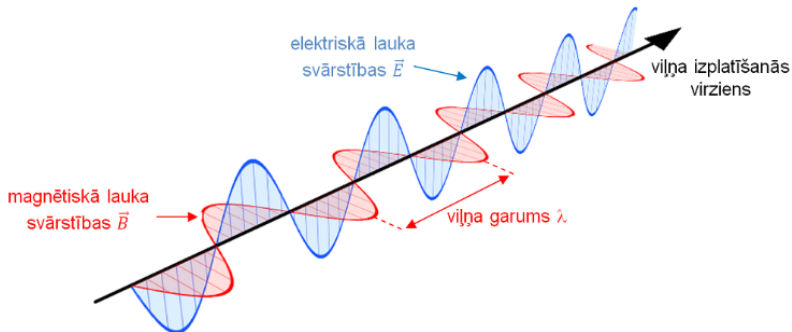
*Elektromagnētiskie viļņi ir viļņi, kuri rodas mainoties elektriskajam laukam noteiktā telpas punktā.*

Elektriskā lauka izmaiņas rodas, kad elektriskie lādiņi kustas telpā un rada elektriskā un magnētiskā lauka izmaiņas, kuras izplatās telpā kā elektromagnētiskie viļņi.

Elektromagnētisko viļņu ātrums vakuumā ir vienāds ar gaismas ātrumu  $c$ . No tā izriet, ka vakuumā viļņa garums

$$\lambda = \frac{c}{f}.$$

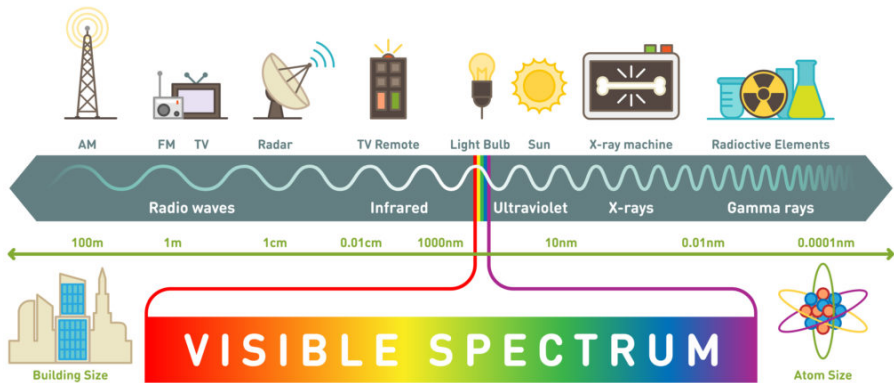
# Elektromagnētiskie viļņi ir šķērsviļņi



Elektromagnētiskos viļņus tāpat kā jebkurus citus viļņus raksturo tādi paši raksturlielumi: amplitūda, viļņa garums, frekvence, periods un viļņa izplatīšanās ātrums.

**Attēla avots:** <https://mape.skola2030.lv/resources/6053>

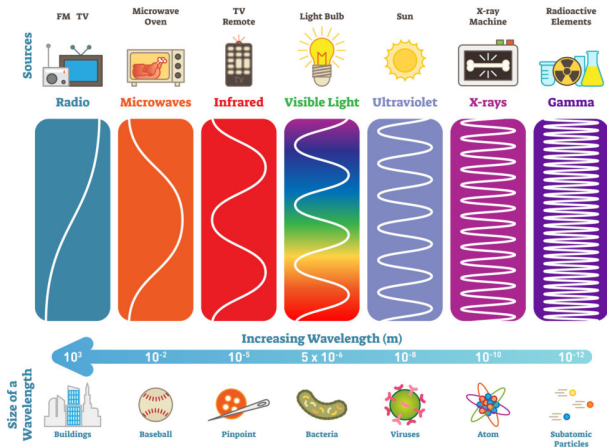
## Electromagnetic Spectrum



Attēla avots: <https://www.science-sparks.com/what-is-the-electromagnetic-spectrum/>

# Elektromagnētiskā starojuma klasifikācija pēc viļņa garuma

- 1 Gamma starojums
- 2 Rentgenstarojums
- 3 Ultravioletais starojums
- 4 Redzamā gaisma
- 5 Infrasarkanais starojums
- 6 Mikrovilņi
- 7 Radiovilņi



Attēla avots: <https://www.science-sparks.com/what-is-the-electromagnetic-spectrum/>

Patstāvīgi izpētīt viļņu parādības:

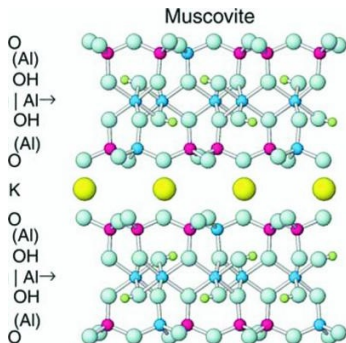
- viļņu interference;
- viļņu difrakcija;
- viļņu laušana;
- viļņu absorbcija;
- viļņu atstarošanās;
- elektromagnētisko viļņu polarizācija.

- Izglītības portāls uzdevumi.lv, <https://www.uzdevumi.lv/p/fizika/10-klase/mehaniskas-svarstibas-un-vilni-6921>
- Mācību resursu krātuve Skola2030, <https://mape.skola2030.lv/materials/72Rq9PvUYhvK46z9AF9e9Z>
- Physics of wave motion, [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University\\_Physics/Book%3A\\_University\\_Physics\\_\(OpenStax\)/Book%3A\\_University\\_Physics\\_I\\_-\\_Mechanics\\_Sound\\_Oscillations\\_and\\_Waves\\_\(OpenStax\)/16%3A\\_Waves](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Book%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_(OpenStax)/16%3A_Waves)
- Physics Classroom, <https://www.physicsclassroom.com/class/waves>
- Seismiskie viļņi, <https://www.britannica.com/science/seismic-wave>
- **Universitātes beigu bakalaura un maģistra līmeņa materiāls**, [http://www.scholarpedia.org/article/Linear\\_and\\_nonlinear\\_waves](http://www.scholarpedia.org/article/Linear_and_nonlinear_waves)



Nelineāru lokalizētu viļņu modelēšana kristāla režģa modeļos<sup>2</sup>, piemēram, muskovīta kālija jonu slānī.

$$\begin{aligned} H &= K_E + U + V_c \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_n|^2 + U(\mathbf{r}_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon \sum_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^N V_c(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}|) \end{aligned}$$



<sup>2</sup>J. Bajars, J.C. Eilbeck, and B. Leimkuhler. *Nonlinear propagating localized modes in a 2D hexagonal crystal lattice*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **301**:8–20, 2015.

# Lokalizēta viļņa piemērs

$$u(x, t) = A \sin(\beta x) \cos(\omega t) e^{-\alpha(x-vt)^2},$$

kur

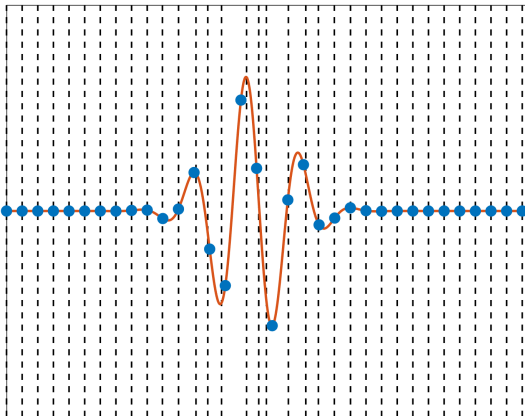
$$A = 0.9,$$

$$\beta = 6,$$

$$\omega = 2,$$

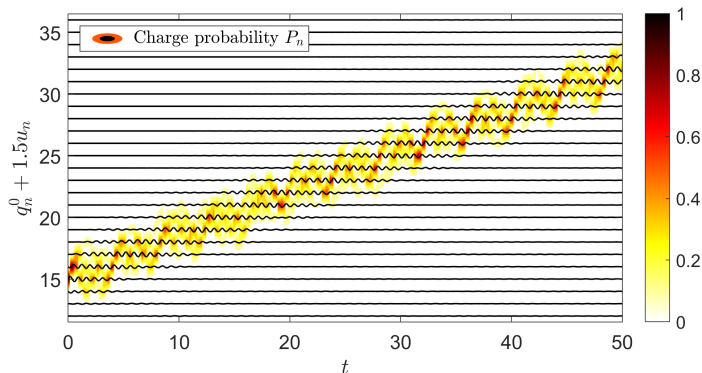
$$\alpha = 1,$$

$$v = \frac{\pi}{4}.$$



# Nelineāri viļņi kristālos transportē lādētu daļiņu<sup>3</sup>

Esam izstrādājuši algoritmus *hipervadītspējas* fenomena skaitliskai simulēšanai un analīzei.

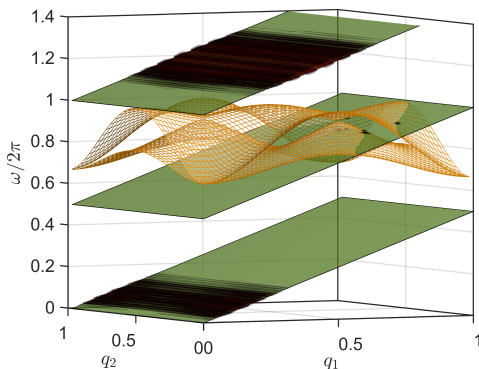


**Att.** Lādētas daļiņas pārnese ar diskrēto elpotāju vienas dimensijas kristāla režģa modelī.

<sup>3</sup>J. Bajārs and J.F.R. Archilla. *Splitting methods for semi-classical Hamiltonian dynamics of charge transfer in nonlinear lattices*, Mathematics **10**(19):3460, 2022.

# Nelineāro kristāla režģa viļņu reprezentācija<sup>4</sup>

Esam izstrādājuši divdimensiju elpotāju frekvences-impulsa reprezentāciju, kas ir aktuāla, lai varētu interpretēt iespējamās lokalizēto nelineāro viļņu pazīmes reālu kristālu spektrālnalīzē.

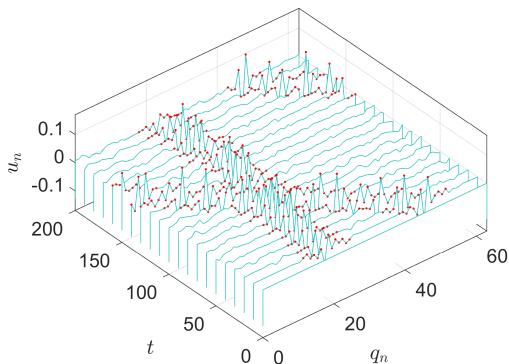


**Att.** Divdimensiju diskretā elpotāja frekvences-impulsa attēlojums, iekļaujot dispersijas attiecības.

<sup>4</sup>J. Bajārs and J.F.R. Archilla. *Frequency-momentum representation of moving breathers in a two dimensional hexagonal lattice*, Physica D **441**:133497, 2022.

# Lokalizācijas reģionu noteikšana un viļņu identifikācija<sup>5</sup>

Esam izstrādājuši uz datiem virzītus algoritmus lokalizācijas (lokalizētas enerģijas) reģionu noteikšanai jeb lokalizētu nelineāru viļņu identifikācijai vienas dimensijas kristāla režģa modeļos.



**Att.** Divu dažādu nelineāru viļņu sadursme, un viļņu lokalizācijas reģionu noteikšana, kas iezīmēta ar sarkaniem punktiem.

<sup>5</sup>J. Bajārs and F. Kozirevs. *Data-driven intrinsic localized mode detection and classification in one-dimensional crystal lattice model*, Phys. Lett. A **436**:128071, 2022.

This work was financially supported by the specific support objective activity 1.1.1.2. "Post-doctoral Research Aid" of the Republic of Latvia (Project No. 1.1.1.2/VIAA/4/20/617 "Data-Driven Nonlinear Wave Modelling"), funded by the European Regional Development Fund (project id. N. 1.1.1.2/16/I/001).



NACIONĀLAIS  
ATTĪSTĪBAS  
PLĀNS 2020



EIROPAS SAVIENĪBA  
Eiropas Reģionālās  
attīstības fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

*Paldies par uzmanību!*