KĀ DRAUDZĪBU ATTĒLOT AR NOGRIEZNI?

GRAFU TEORIJAS ELEMENTI

Guna Brenda Pogule

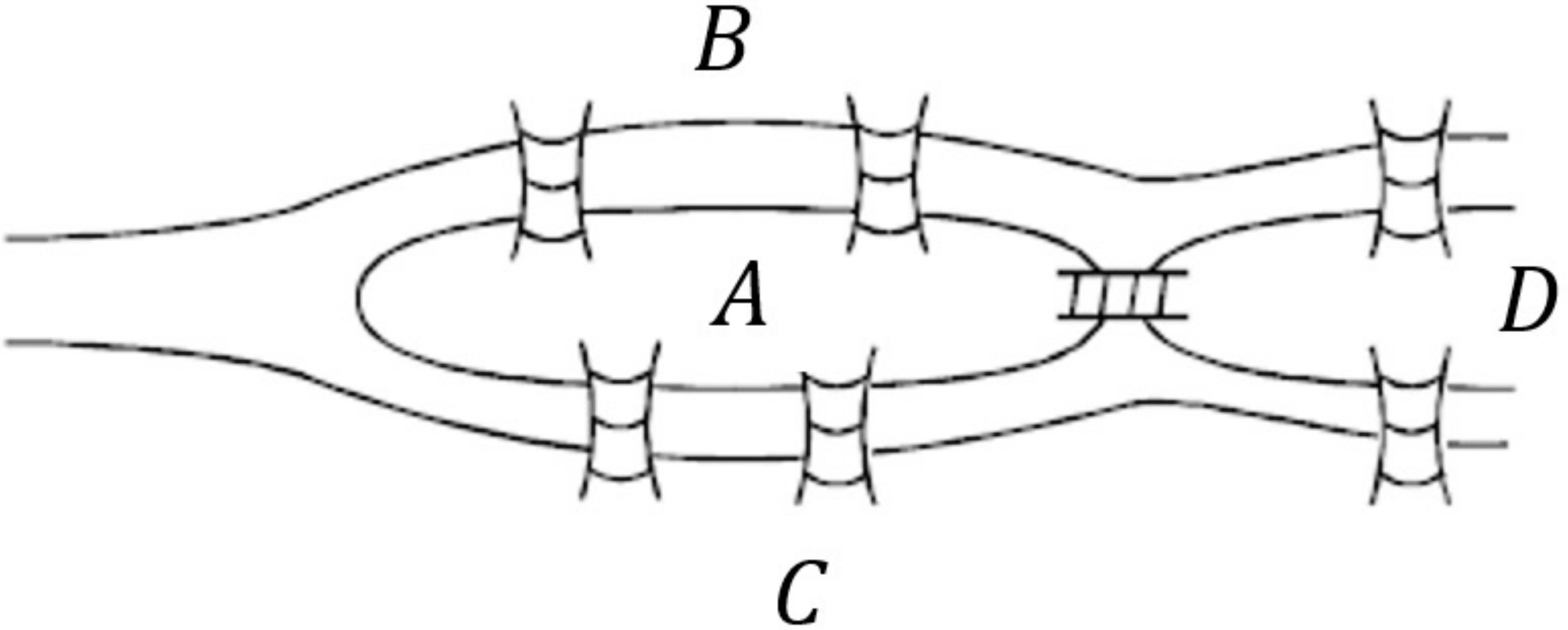
14.01.2023.

No vēstures

Matemātiķis Leonards **Eilers** (1707-1783):

Vai, staigājot pa Kēnigsbergas tiltiem, iespējams katru tiltu šķērsot tikai vienu reizi un atgriezties pastaigas sākumpunktā?

No vēstures



Jēdzieni

Grafs ir galīgs skaits **virsotņu** un **šķautņu**.

- ✓ virsotnes → punkti
- ✓ šķautnes → nogriežņi, līnijas

Maršrutu, kas iziet cauri katrai šķautnei tieši vienu reizi, sauc par **Eilera ceļu**.

Ja gadījumā Eilera ceļa sākuma un beigu virsotne sakrīt, tad to sauc par **Eilera ciklu**.

Visbiežāk grafus lieto, lai interpretētu un attēlotu:

- ✓ceļu satiksmes shēmas,
- ✓turnīru norisi,
- ✓draudzēšanos kādas grupas ietvaros.

1. uzdevums

Vai 2023 lampiņas ar vadiem var savienot savā starpā tā, lai katra no tām būtu savienota ar tieši 3 citām lampiņām?

2. uzdevums

Ciparu karaļvalstī ir deviņas pilsētas ar nosaukumiem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 un 9.

Kaimiņzemes princis ievēroja, ka divas pilsētas ir savienotas ar aviolīniju tad un tikai tad, ja no pilsētu nosaukumiem var izveidot divciparu skaitli, kas dalās ar 3. Vai no pilsētas 1 var nokļūt uz pilsētu 9, izmantojot aviolīniju tīklu?

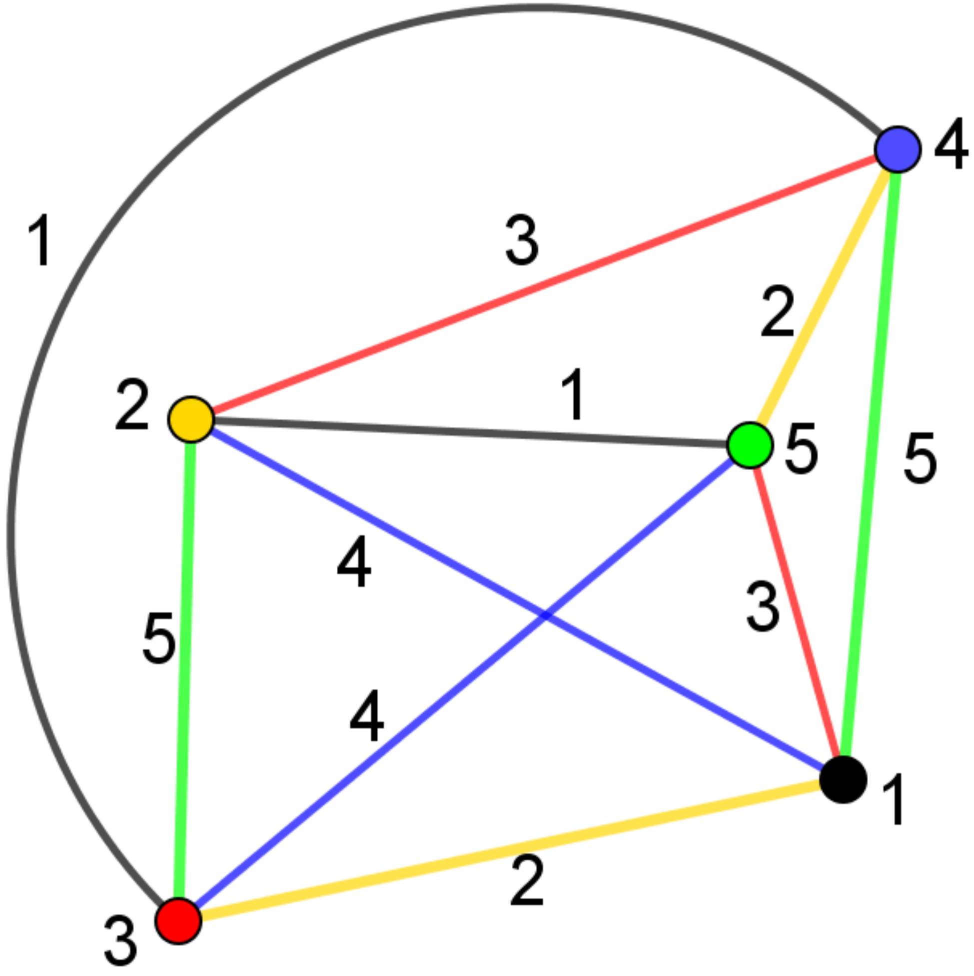
3. uzdevums

Karnevāla zālē ir 5 lampas; katras divas lampas savieno viena vītne. Lampu un vītņu krāsošanai kopā izmantotas n krāsas. Zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- ✓ nekādas divas vītnes, kas piestiprinātas vienai lampai, nav vienā krāsā,
- ✓ neviena vītne nav piestiprināta lampai ar tādu pašu krāsu.

Kāda ir mazākā n vērtība?

3. uzdevums



4. uzdevums

Tirgū satikās dažas vecmāmiņas. Zināms, ka katra no vecmāmiņām pazīst tieši piecas citas no šīm vecmāmiņām (visas pazīšanās ir abpusējas). Starp jebkurām trīs no šīm vecmāmiņām ir vismaz divas, kas savā starpā nav pazīstamas. Kāds ir mazākais skaits vecmāmiņu, kas varēja satikties tirgū?

5. uzdevums

Mežā dzīvo m rūķīši. Daži no tiem savā starpā draudzējas (ja A draudzējas ar B, tad B draudzējas ar A), pie tam katra rūķīša draugu skaits ir kāda naturāla skaitļa kubs. Kādām m vērtībām tas ir iespējams?

6. uzdevums

Desmit šahisti katrs ar katru izspēlēja vienu šaha partiju, dažas no tām beidzās neizšķirti. Ir zināms, ka bija tieši viens šahists, kas neizšķirti nospēlēja tieši vienu partiju, divi šahisti – kas nospēlēja divas, trīs šahisti – kas nospēlēja trīs, un četri šahisti, kas neizšķirti nospēlēja tieši četras partijas. Šos pēdējos četrus šahistus (kas katrs četras partijas nospēlēja neizšķirti) sauksim par *neizšķirtu karaļiem*, bet par *karalisku neizšķirtu* sauksim partiju, kurā neizšķirtu izcīnīja divi *neizšķirtu karaļi*. Vai var apgalvot, ka tika izspēlēts

a) vismaz viens *karaliskais neizšķirts*,
b) vismaz divi *karaliskie neizšķirti*?

7. uzdevums

Komisijā ir 7 cilvēki. Ierodoties uz sēdi, daži no viņiem sarokojas. Kāds ir mazākais iespējamais sarokošanos skaits, lai no katriem trim komisijas locekļiem varētu atrast divus, kas savā starpā sarokojušies?

Monohromatiski trijstūri

jeb **vienkrāsas trijstūri** – grafa daļa, kurā trīs virsotnes ir savienotas ar vienas krāsas šķautnēm.

8. uzdevums

Katri divi no 6 profesoriem savā starpā sarakstās vai nu angliski, vai latviski (tikai vienā no šīm valodām). Zināms, ka nav tādu trīs profesoru, kas visi savā starpā sarakstās angliski. Pierādīt, ka ir trīs tādi profesori, kas visi savā starpā sarakstās latviski!

9. uzdevums

Katras divas regulāra sešstūra virsotnes savieno vai nu ar sarkanu, vai zilu nogriezni. Aplūkosim visus trijstūrus, kuru virsotnes ir dotā sešstūra virsotnes.

a) Pierādīt, ka starp tiem ir vismaz viens vienkrāsas trijstūris!
b) Vai var gadīties, ka starp tiem ir tieši viens vienkrāsas trijstūris?

10. uzdevums

Vecmāmiņa pa otrā stāva istabas logu vēro, ko viņas mazbērni dara pagalmā – viņi uzbūvējuši sešus “štābiņus” un starp tiem dubļos ieminuši vairākas taciņas. Katra taciņa sākas un beidzas pie kāda “štābiņa”, taciņas var krustoties.

a) Vai iespējams, ka no katra “štābiņa” iziet attiecīgi 2, 2, 4, 4, 4, 4 taciņas?
b) Vai iespējams, ka no katra “štābiņa” iziet attiecīgi 1, 2, 2, 3, 4, 5 taciņas?
c) Vēlāk mazbērni “štābiņus” uzbūvēja arī otrā mājas pusē. Kāds ir lielākais iespējamais uzbūvēto “štābiņu” skaits, ja vecmāmiņa pa logu redz 11 taciņas (katra taciņa savieno divus šajā mājas pusē uzbūvētos “štābiņus”) un no katra “štābiņa” iziet vismaz 3 taciņas?

11. uzdevums

Valstī Šallindrijā ir vairākas pilsētas. Starp pilsētām ir izbūvēti vairāki ceļi tā, ka katrs ceļš savieno tieši divas pilsētas, starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk kā viens ceļš un ārpus pilsētām ceļi nekrustojas.
Zināms, ka no galvaspilsētas Šallijas iziet tieši 17 ceļi, no pilsētas Dallijas iziet tieši 3 ceļi, bet no visām pārējām valsts pilsētām iziet tieši 10 ceļi no katras. Pierādiet, ka noteikti iespējams aizbraukt no Dallijas un Šalliju, braucot tikai pa izbūvētajiem ceļiem (varbūt – caur citām pilsētām).

12. uzdevums

Lanlandē ir n pilsētas un vairāki ceļi. Katrs ceļš savieno tieši divas pilsētas, pie tam no katras pilsētas iziet vismaz viens ceļš un katras divas pilsētas savieno ne vairāk kā viens ceļš. Kāds var būt n, ja Lanlandē ir 7 ceļi?

13. uzdevums

Klasē ir 16 skolēni. Katram no viņiem šajā klasē ir tieši 3 draugi. Vai noteikti šos skolēnus var sasēdināt 8 solos pa diviem katrā solā tā, lai katrā solā sēdētu draugi?

Paldies par uzmanību!