MO uzdevumi,
to modifikācijas kā ZPD tēmas

MMU
andrejs.cibulis.@lu.lv
29.4.2023.

5. klase

LAMO-48, 9.11.2022.

Skolēnu skaits 1246

Skolēnu skaits, kas ieguvis attiecīgu skaitu punktu par 1. uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	37	661	75	105	165	68	31	21	25	25	14	18
Vidēji iegūtais punktu skaits	1,67											

Skolēnu skaits, kas ieguvis attiecīgu skaitu punktu par 2. uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	47	852	27	159	63	0	0	0	3	7	29	58
Vidēji iegūtais punktu skaits	1,21											

L = P
Pieļauj netriviālus vispārinājumus
852 maksimālais 0 skaits.

Skolēnu skaits, kas ieguvis attiecīgu skaitu punktu par 3. uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	51	755	282	36	19	19	44	9	10	6	3	11
Vidēji iegūtais punktu skaits	0,85											

Parastu teksta uzdevumu
nav atrisinājis pat 1 %.
Vai vainojama *komp. pieeja*?

Skolēnu skaits, kas ieguvis attiecīgu skaitu punktu par 4. uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	16	248	68	177	140	266	32	25	61	76	34	102
Vidēji iegūtais punktu skaits	3,72											

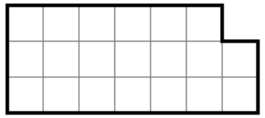
Bildes ar svariem.

Skolēnu skaits, kas ieguvis attiecīgu skaitu punktu par 5. uzdevumu

Punkti	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	33	663	173	13	187	32	21	16	14	15	21	57
Vidēji iegūtais punktu skaits	1,7											

5.2. Pa rūtiņu līnijām uzzīmē tādu sešstūri, kuram perimetra un laukuma vērtības sakrīt!
Piezīme. Laukums ir sešstūri veidojošo rūtiņu skaits un malas tiek mērītas rūtiņu vienībās.

Atrisinājums. Piemēram, der 1. att. redzamais sešstūris, kuram perimetrs ir 20 un arī laukums ir 20.



1. att.

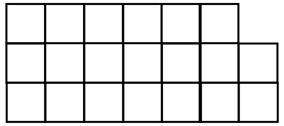
K. Uzdevumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, tas liecina, ka uzdevuma sastādītājs nav parūpējies par uzdevuma kvalitāti. Uzdevums ir visai vienkāršs, tomēr ir skolēni, kuri nav apguvuši pat lasītprasmi.

Atrast visas dažādās $L = P$ vērtības.

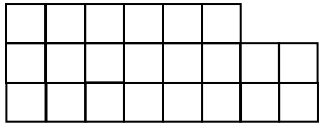
Kāpēc nevar iegūt nepārskaitļus?

Kāda ir minimālā vērtība?

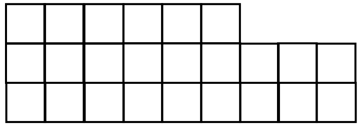
Vai protat pierādīt, ka **minimālā** vērtība ir **18** ?



$L = P = 20$



$L = P = 22$

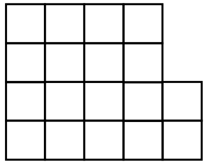


$L = P = 24$

Elegants pierādījums:

$$xy - ab = 2(x + y) \geq 4\sqrt{xy}$$

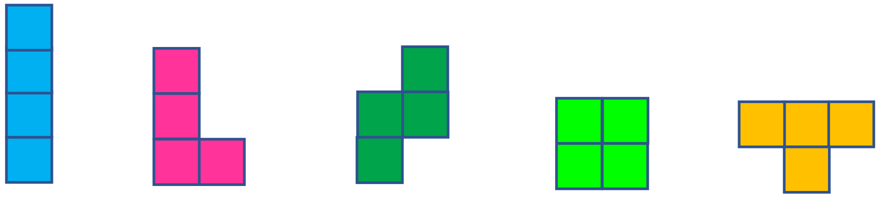
$$xy > 4\sqrt{xy} \Rightarrow xy > 16.$$



$L = P = 18$

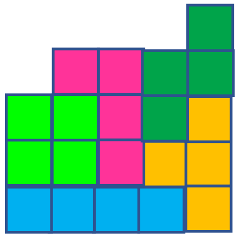
$L = P$

Salikt no zīmējumā parādītajām figūrām tādu daudzstūri, kuram laukums vienāds ar perimetru.

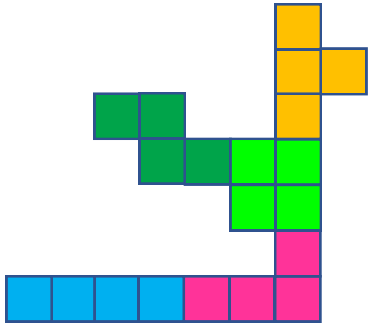


Tetramino komplekts

Vai var salikt tādu daudzstūri, kuram perimetrs ir divas reizes lielāks nekā laukums?



$P = 20$



$P = 40$

Vai var salikt tādu daudzstūri, kuram perimetrs ir trīs reizes lielāks nekā laukums?

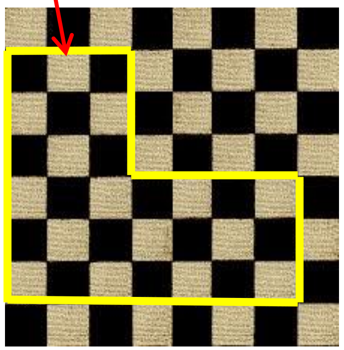
Nevar, jo visu perimetru summa ir mazāka nekā 60:
$10 + 10 + 10 + 10 + 8 = 48$.

Jauni, netriviāli uzdevumi

Pierādīt, ka no tetramino komplekta nevar salikt 6-stūri.

Pierādīt, ka jebkurš rūtiņu 6-stūris, kas sastāv no pārskaita rūtiņām, ir balansēts.

Plakne iekrāsota pēc šaha galdiņa principa. Tajā, velkot pa rūtiņu līnijām, uzzīmēts 6-stūris, kuram L = 2024. Vai var gadīties, ka tas satur vairāk melno nekā balto rūtiņu?



Summa vienāda ar reizinājumu

LAMO-48, 9.11.2022.

7.2. Vai var atrast **a**) 5; **b**) 15 naturālus skaitļus (ne obligāti dažādus), kuru summa ir vienāda ar to reizinājumu?

Atrisinājums. a) Jā, var, der, piemēram, skaitļi 1, 1, 2, 2, 2, jo $1+1+2+2+2=8$ un $1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot2=8$.

b) Jā, var, der, piemēram, skaitļi: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 15 (13 vieninieki, 2 un 15), jo $13\cdot1+2+15=30$ un $1\cdot2\cdot15=30$.

Piezīme. a) gadījumā der arī 1, 1, 1, 3, 3 vai 1, 1, 1, 2, 5.

Uzdevums nav jauns.

How to find the number(or numbers) that has 4 digits, the product of these digits equal to the sum of these digits ?.

There are 12 numbers with such digits.

Sum of the Numbers Equals Their Product.

Vai katram *n* eksistē *n*-ciparu skaitlis, kuram ciparu summa ir vienāda ar ciparu reizinājumu?

$$2\cdot2=2+2$$
$$1\cdot2\cdot3=1+2+3$$
$$1\cdot1\cdot2\cdot4=1+1+2+4$$
$$1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot5=1+1+1+2+5.$$

Pr. d. Cik daudziem k, $15\le 3k\le 24$, varat atrisināt šo uzdevumu?

Pr. d. (Studentiem) Cik daudziem n, $6\le n\le 50$, varat atrisināt šo uzdevumu.

Labākais rezultāts D. K. (17.11.2022.)
Netika atrasti tikai 24, 34, 35, 44 un 48.

Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu n, kuriem $S(n)=R(n)$, kur $S(n)$ un $R(n)$ ir attiecīgu n-ciparu skaitļa ciparu summa un reizinājums.

Tēma ZPD

n	***S*(*n*)**
2	22
3	123
4	1124
5	11125, 11133, 11222
6	111126
7	1111127, 1111134
8	11111128, 11111223
9	111111129, 111111135
10	1111111144
11	11111111224, 11111111136
12	111111112222
13	$1^{11}37$, $1^{10}233$, $1^{11}45$
14	$1^{11}225$
15	$1^{13}38$
16	$1^{14}46$
17	1^{14} 226, 1^{15} 39, $1^{15}55$
18	$1^{15}234$
19	$1^{15}2223$, $1^{17}47$
20	1^{17} 227
21	$1^{18}333$, $1^{19}56$
22	$1^{20}48$
23	$1^{20}235$, $1^{20}228$
24	?
25	$1^{22}244$, $1^{23}57$
26	$1^{23}229$, $1^{24}66$
27	$1^{22}22222$
28	$1^{26}49$, $1^{25}236$
29	$1^{27}58$, $1^{26}334$
30	$1^{26}2233$
31	$1^{29}67$
32	$1^{29}245$
33	$1^{29}2225$, $1^{30}237$, $1^{31}59$
34	?
35	?
36	$1^{34}68$
37	$1^{35}77$, $1^{34}335$
38	$1^{35}238$
39	$1^{36}246$
40	$1^{36}2226$, $1^{37}344$
41	$1^{39}69$, $1^{37}2234$, $1^{38}255$, $1^{37}2234$
42	$1^{37}22223$
43	$1^{41}78$, $1^{40}239$,
44	?
45	$1^{42}336$,
46	$1^{43}247$
47	$1^{43}2227$, $1^{43}2333$
48	?
49	$1^{47}79$
50	$1^{48}88$,

When the sum equals the product

Leo Kurlandchik and Andrzej Nowicki

Department of Mathematics and Computer Science,
Nicholaus Copernicus University, 87-100 Toruń, Poland

E-mail: (lekur @ mat.uni.torun.pl), (anow @ mat.uni.torun.pl)

10 November 1998

Let $n \geqslant 2$ be a natural number. We are interested in the sequences $(x_1, \ldots, x_n)$ of natural numbers such that

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \quad \text{and} \quad x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n.$$

We denote by $A(n)$ the set of all such sequences. Moreover, we denote by $a(n)$ the cardinality of the set $A(n)$, that is, $a(n)$ is the number of all elements of $A(n)$.

The sequence $(2, 2)$ is a unique element of $A(2)$. Thus $a(2) = 1$. The above examples deal with the cases when $n = 3, 4, 5$. Now we will prove that these are all the examples of such forms.

Rakstā ir 14 teorēmas par šādu virkņu īpašībām. Jautājums, vai katram *n* ir tāds *n*-ciparu skaitlis, nav pētīts?

Atsauce tikai uz vienu avotu

[1] W. Sierpi´nski, Number Theory, Part II, (in Polish), PWN, Warszawa 1959.

Digit-sum-not-product-sequence

24, 34, 35, 44, 48, 66, 67, 75, 76, 78, 80, 82, 91, 92, 97, 103, 104, 105, 106, 140, 141, 142, 143, 144,

```
n =    2: 22
n =    3: 123
n =    4: 1124
n =    5: 11125
          11133
          11222
n =    6: 111126
n =    7: 1111127
          1111134
n =    8: 11111128
          11111223
n =    9: 11...1129
          11...1135
n =   10: 11...1144
n =   11: 11...1136
          11...1224
n =   12: 11...12222
```

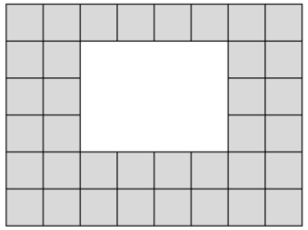
```
n =   13: 11...11137
          11...11145
          11...11233
n =   14: 11...11225
n =   15: 11...11138
n =   16: 11...11146
n =   17: 11...11139
          11...11155
          11...11226
n =   18: 11...11234
n =   19: 11...11147
          11...12223
n =   20: 11...11227
n =   21: 11...11156
          11...11333
n =   22: 11...11148
n =   23: 11...11228
          11...11235
n =   24: ---
n =   25: 11...11149
```

Walter Trump
Retired Director of Studies
(Physics / Mathematics),
Gymnasium Stein, Germany, Nürnberg.

```
n = 2020: ---
n = 2021: ---
n = 2022: ---
n = 2023: ---
n = 2024: 11...11111114888
n = 2025: 11...11111122888
n = 2026: ---
n = 2027: 11...11111124488
n = 2028: 11...11111222488
n = 2029: 11...11111144448
          11...11112222288
n = 2030: 11...11111224448
n = 2031: 11...11112222448
n = 2032: 11...11111244444
          11...11122222248
n = 2033: 11...11112224444
          11...11222222228
n = 2034: 11...11122222444
n = 2035: 11...11111116777
          11...11222222244
n = 2036: 11...12222222224
n = 2037: 11...111111123777
          11...122222222222
n = 2038: ---
n = 2039: ---
n = 2040: ---
```

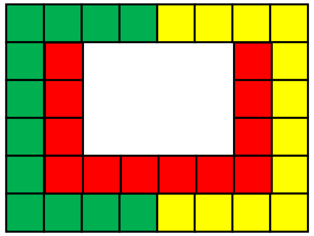
5.2. Figūru sagriezt trīs vienādās daļās.

Novada MO, 10.3.2023.



Ievērosim, ka divas vienādas figūras iekļauj tādu pašu trešo figūru. Šajā sadalījumā ir tukšums.

Vai varat izdomāt šādu trīs vienādu figūru konstrukciju bez tukšuma?

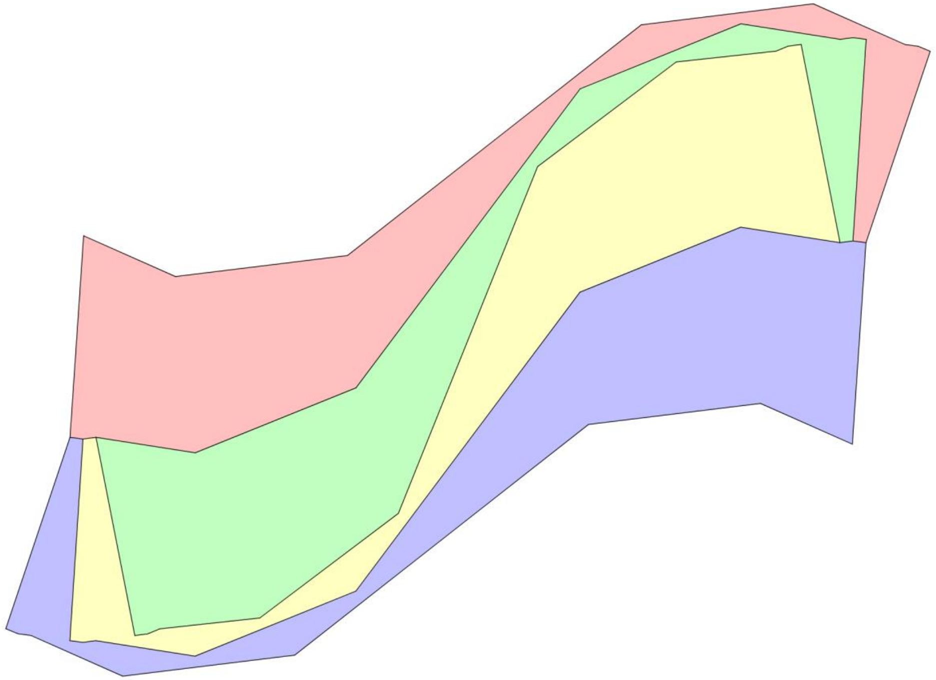


Kas šeit neparasts?

A surprising new tetrad

Walter Trump (born 1952 or 1953 [1]) [Wikipedia]

Here I present the first tetrads with no holes where two tiles completely surround the others. These also are the first centrally symmetric tetrads with no hole (as far as I know). This tetrad with 20-gon tiles was constructed on February 22th, 2020.



https://www.trump.de/tetrads/question-17/question-17.htm

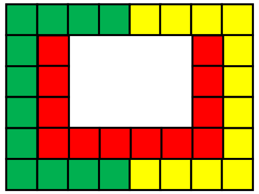
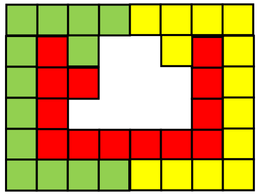
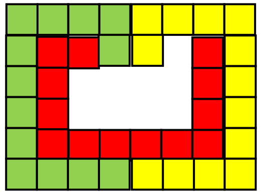
Vai divās vienādās kastēs var ielikt trešo tādu pašu kasti?

Ir trīs vienādi taisnstūra paralēlskaldņi. Vai var gadīties, ka vienu no šiem paralēlskadņiem var ievietot divos pārējos, ja no tiem ir izgriezti divi vienādi piemērota lieluma paralēlskaldņi?

Atbilde. Var. Der, piemēram, trīs paralēlskalņi 6 x 8 x 10.

Saliekot divus no tiem kopā pa skaldni 8 x 10, dabūsim paralēlskaldni 8 x 10 x 12.
Skaidrs, ka paralēlskaldnī 8 x 10 x 12 ietilpst 6 x 8 x 10.

ZPD. Minimizēt tukšās daļas laukumu (tilpumu).

12.5. Pierādīt, ka katram $n > 2$ var atrast tādus n atšķirīgus naturālus skaitļus $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq 3 \cdot 2^{n-2}$, ka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

[AMO, 2021/2022. m.g.]

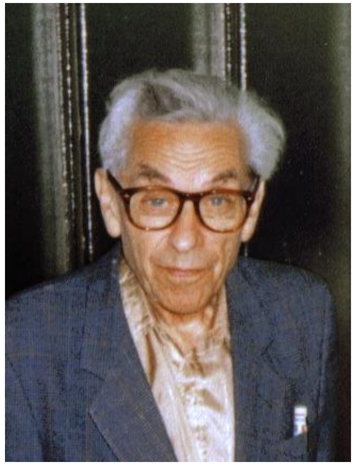
K. Kam vajadzīgs norādīt (teikt priekšā), ka skaitļi sakārtoti un cik liels drīkst būt pēdējais skaitlis?
Sen zināms uzdevums ar nosaukumu Ēģiptiešu daļas.
Uzdevums ir piemērots mazākām klasēm un nebūtu liekams kā grūtākais uzdevums komplektā.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = 1.$$

Paul Erdős is legendary for having posed hundreds, if not thousands, of mathematical problems, many of them profound.
Erdős often offered monetary rewards; the size of the reward depended on the perceived difficulty of the problem.



1913 – 1996

Never, mathematicians say, has there been an individual like Paul Erdős. He was one of the century's greatest mathematicians, who posed and solved thorny problems in number theory and other areas and founded the field of discrete mathematics, which is the foundation of computer science. He was also one of the most prolific mathematicians in history, with more than 1,500 *papers to his name. And, his friends say, he was also one of the most unusual.*

Erdős won many prizes including the Wolf Prize of 50 000 dollars in 1983. However he had a lifestyle that needed little money and he gave away:-.. *most of the money he earned from lecturing at mathematics conferences, donating it to help students or as prizes for solving problems he had posed.*

The **Erdős number** describes the "collaborative distance" ...

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_conjectures_by_Paul_Erd%C5%91s#Unsolved

Erdős-Straus conjecture

Unsolved problem in mathematics:

? *Does* $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ *have a positive integer solution for every integer* $n \geq 2$*?*

Atrisināt uzdevumu, ja n = 2022. ~ 3 min.

$$\frac{4}{2k} = \frac{2}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}.$$

Atrisināt uzdevumu, ja n = 2023. ~ 7 min.

Egyptian Fractions

https://r-knott.surrey.ac.uk/Fractions/egyptian.html#section6

This page explores some of the history and methods with puzzles and and gives you a summary of computer searches for such representations. There's lots of investigations to do in this area of maths suitable for 8-10 year olds as well as older students and it is also designed as a resource for teachers and educators. The Calculators embedded in the page provide helpful resources for your number searches.

$$2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17,$$

$$\frac{3}{2023} = \frac{1}{17 \cdot 40} + \frac{1}{2023 \cdot 40}.$$

$$\frac{4}{2023} = \frac{2024}{506 \cdot 2023} = \frac{1}{506} + \frac{1}{506 \cdot 2023} = \frac{1}{1012} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{506 \cdot 2023}.$$

Kādiem $n > 4$ daļu $\frac{4}{n}$ nevar izteikt kā $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. n = 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85

Vai virknē nekur nav divu secīgu nepārskaitļu?

Numbers of the form x^2 + y^2 where x is even, y is odd and gcd(x, y)=1. Essentially the same as A004613.
Numbers n for which there is no solution to 4/n = 2/x + 1/y for integers y > x > 0.
Related to A073101. - T. D. Noe, Sep 30 2002

Varēja īsāk un vienkāršāk...

LAMO-48, 9.11.2022.

11.1. Vai skaitli 2022 var izteikt kā divu veselu skaitļu kubu summu?

Atbilde, nevar, jo

$$2022 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = s^3 - 3sxy = 3k \Rightarrow s \vdots 3 \Rightarrow (s^3 - 3sxy) \vdots 9 \Rightarrow 2022 \vdots 9.$$

$$s = x + y$$

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ar ko var būt kongruenti veselu skaitļu kubi pēc moduļa 9:

- ja $n \equiv 0 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 0^3 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 1 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 2 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 3 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 4 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 5 \equiv -4 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-4)^3 \equiv -4^3 \equiv -1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 6 \equiv -3 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-3)^3 \equiv 0 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 7 \equiv -2 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-2)^3 \equiv 1 \pmod 9$;
- ja $n \equiv 8 \equiv -1 \pmod 9$, tad $n^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 9$.

Tātad veselu skaitļu kubi ir kongruenti ar 0 vai ± 1 pēc moduļa 9. Aplūkosim, ar ko var būt kongruenta divu veselu skaitļu kubu summa pēc moduļa 9.

$b^3 \pmod 9$ \ $a^3 \pmod 9$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

Esam ieguvuši, ka divu šādu skaitļu summa pēc moduļa 9 var pieņemt jebkuru no vērtībām $-2, -1, 0, 1, 2$, taču nekādas citas. Tā kā $2022 \equiv 6 \equiv -3 \pmod 9$ neparādās starp šīm vērtībām, tad divu veselu skaitļu kubu summa nevar būt 2022.

Vajadzēja īsāk un vienkāršāk...

LAMO-48, 9.11.2022.

12.4. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu 3 sin x + 4 cos x = 6

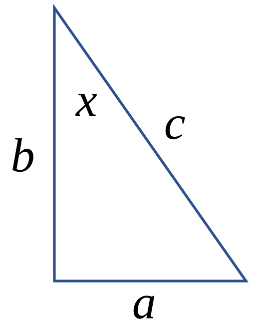
https://www.nms.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/nms.lu.lv/AMO/AMO_uzd_atr_2022_rudens.pdf

Doti četri risinājumi.

2. atrisinājums. Izmantojot divkāršā leņķa formulas un $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$, iegūstam, ka

$$3\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=6\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

4. atrisinājums. Pierādīsim, ka izpildās nevienādība $a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$.



$$\sin x := \frac{a}{c}$$

$$\cos x := \frac{b}{c}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

K. Kāpēc jārāda 4 risinājumi? Parasti MO uzdevumu risinājumus raksta, akcentējot nevis sīkus pārveidojumu soļus, bet idejas.

Vajadzēja rādīt šādu risinājumu.
Tādu reālu skaitļu nav, jo pēc Košī nevienādības

$$ax+by\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

vienādojuma kreisā puse nepārsniedz 5.

MO klasiskās nevienādības nevis no jauna jāpierāda, bet uzreiz jālieto.

Vidējie lielumi

Aritmētiskais	Ģeometriskais	Kvadrātiskais	Harmoniskais
$A=\dfrac{x+y}{2}$	$G=\sqrt{xy}$	$K=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$	$H=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
$A=\dfrac{x+y+z}{3}$	$G=\sqrt[3]{xyz}$	$K=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$	$H=\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$$\boxed{H \le G \le A \le K}$$

V. Pieņem, ka $x < y$. Pierādīt, ka $x < V < y$, kur V jebkurš no šiem vidējiem lielumiem. ~ 5 min

$$x<\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}<y \Leftrightarrow x<\frac{2xy}{x+y}<y \Leftrightarrow 1<\frac{2y}{x+y}, \frac{2x}{x+y}<1 \Leftrightarrow x+y<2y,\ 2x<x+y$$

$$A<y, \qquad x<A.$$

U. Pa apli uzrakstīti 2023 skaitļi. Zināms, ka katriem diviem skaitļiem x un y ir uzrakstīts arī to aritmētiskais vidējais. Pierādīt, ka visi skaitļi ir vienādi.

Pieņem, ka x un y ir divi atšķirīgi vismazākie skaitļi. Tad, tā kā $x < A < y$, iegūta pretruna, jo ...

Košī nevienādība

In **1821** Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) published
the following inequality that now bears his name [AN, 101]:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

Citi pieraksta veidi:

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \qquad \text{(KN)}$$

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \le |x| \cdot |y|,$$

Vektoru skalārais reizinājums nepārsniedz to garumu reizinājumu:

$$|\vec{x}\,\vec{y}| \le |x| \cdot |y|.$$

Koši nevienādības lietojumi

V. Pierādīt, ka visiem pozitīviem *a*, *b*, *c*, *d*: ~*x* min

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

LAMO42, 12.3. kl. (26.4.2015.)
Uzdevums paņemts, no
Olympiad Inequalities, Thomas J. Mildorf, 2006.

Multiplying through by $a + b + c + d$ and applying Cauchy, we have

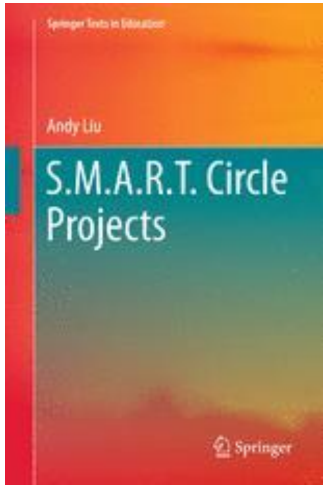
$$(a+b+c+d)\left(\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d}\right)\geq(1+1+2+4)^2=64$$

$$64=(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{2}{\sqrt{c}}+\sqrt{d}\cdot\frac{4}{\sqrt{d}})^2\leq\ (a+b+c+d)\cdot(\frac{1}{a}+\cdot\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d})$$

$$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2\ \leq\ (x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2).$$

Skolas un MO (IMO – International MO) līmeņi
Citos mācību priekšmetos atrāviens starp šiem līmeņiem (matemātiskais briedums, sagatavotība) nav tik milzīgs kā tas ir matemātikā.

Lai varētu cerēt uz zelta medaļu IMO, esot jātrenējas apm. 5000 stundas, turklāt pieredzējuša trenera vadībā.



This book describes projects in a Mathematical "Circle," i.e., an organization that discovers and nurtures young mathematical talents through meaningful extra-curricular activities. This is the second volume in a trilogy describing in particular the S.M.A.R.T. Circle project, which was founded in Edmonton, Canada in 1981.

Ko nozīmē saīsinājums S.M.A.R.T.?

The acronym stood for
Saturday Mathematical Activities, Recreations & Tutorials.

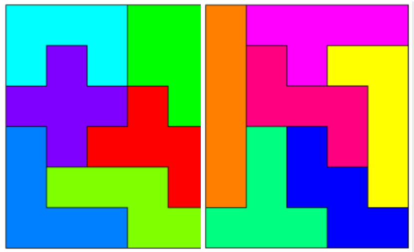
4. Mathematical Chess Problems
4.1. Adventures of an Apprentice Rook
4.2.Martin Gardner's Royal Problem,
4.3. Knight Tours.

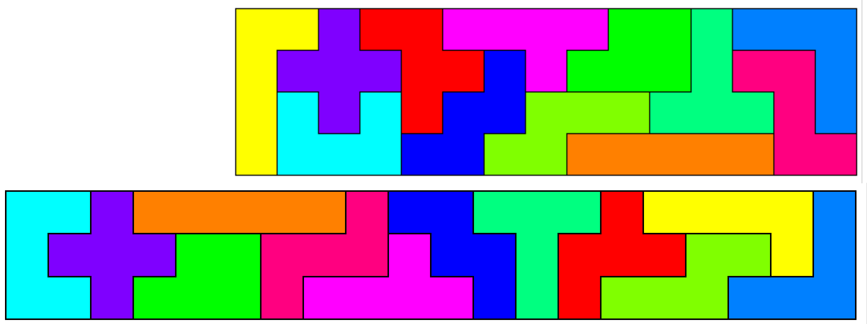
9.5. un 11.5. uzd. no LAMO-48 attiecas uz **4.1.**

ZPD. No pentamino saliekami polimino ar periodiskiem malu garumiem

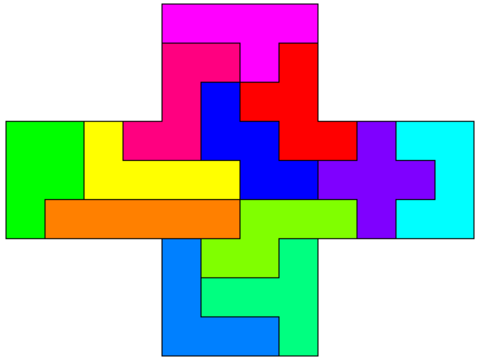
Visvienkāršākie piemēri ir taisnstūri.

(6-10), $S = 2339$
(5-12), $S = 1010$
(4-15), $S = 368$
(3-20), $S = 2$



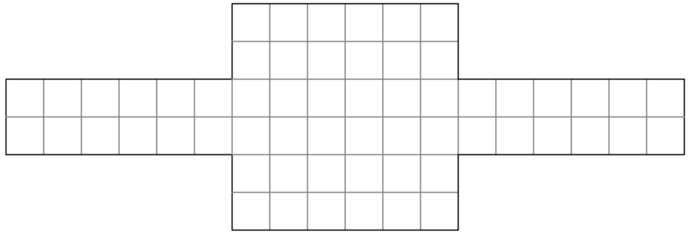


U. Salikt (3-4)-daudzstūri.



S = 24

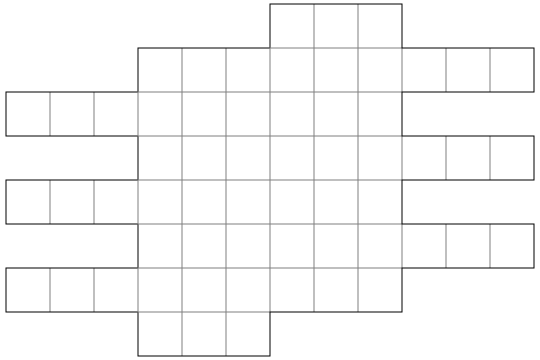
U. Vai var salikt (2-6)-daudzstūri?



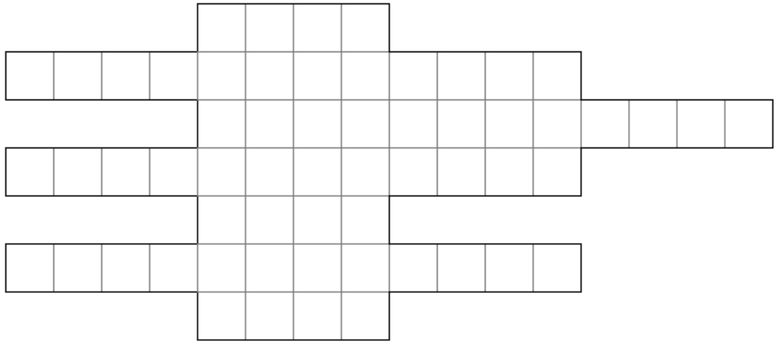
Atbilde. Nevar.

Polimino ar periodiskiem malu garumiem

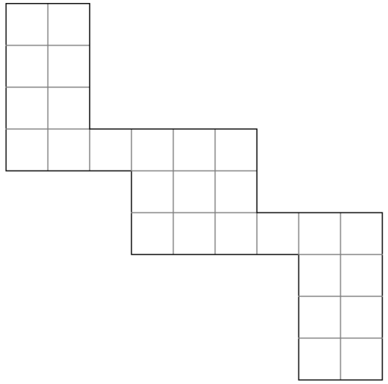
Uzzīmēt (1-3) tipa 60-mino.



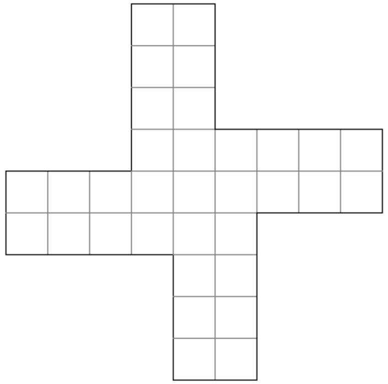
Uzzīmēt (1-4) tipa 60-mino.



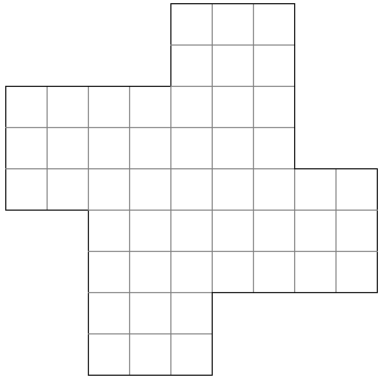
Uzzīmēt (2-3-4)-polimino. Kādas laukuma vērtības var iegūt?



(2-3-4)-27-mino



(2-3-4)-33-mino

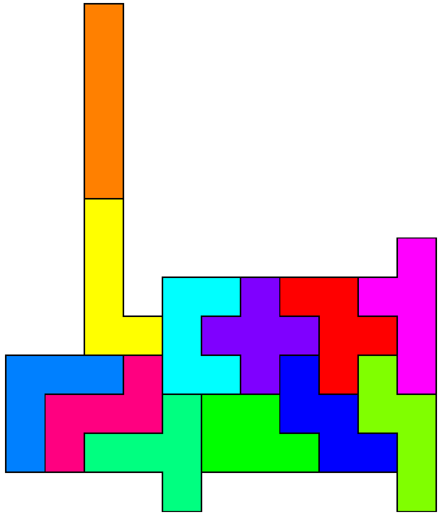


(2-3-4)-49-mino

Maksimālais dažādo garumu skaits

Vai no pentamino var salikt tādu polimino, kuram ir 11 dažādi malu garumi?

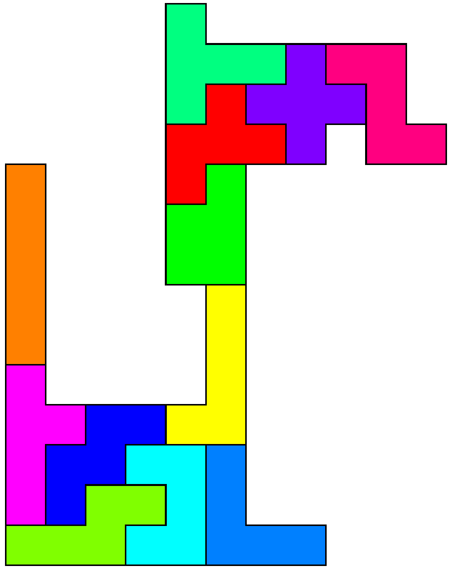
Uzzīmēt 60-mino, kuram ir 12 dažādi malu garumi



Cik dažāda garuma malu ir šim 18-stūrim?

9 dažādi garumi

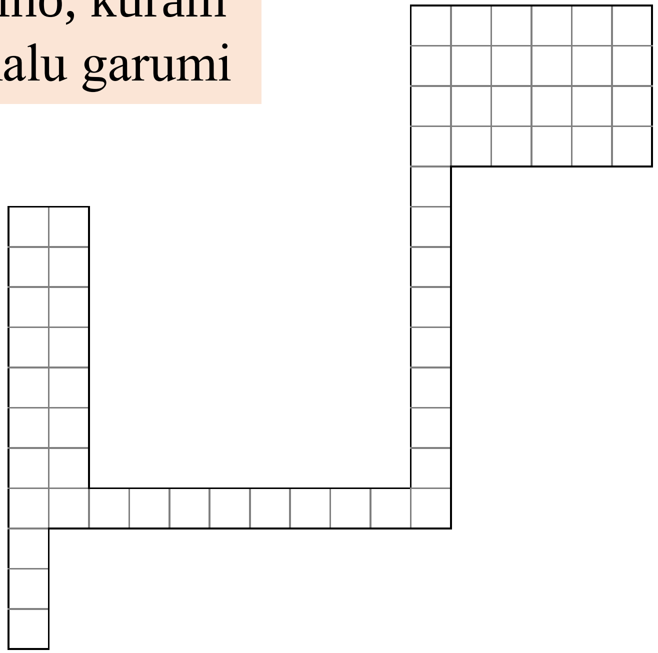
1-2-3-4-5-6-7-8-9



Cik dažāda garuma malu ir šim 22-stūrim?

10 dažādi garumi

1-2-3-4-5-6-7-8-9-10



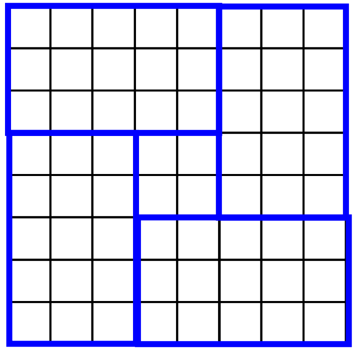
Maģisks 60-mino 12-stūris

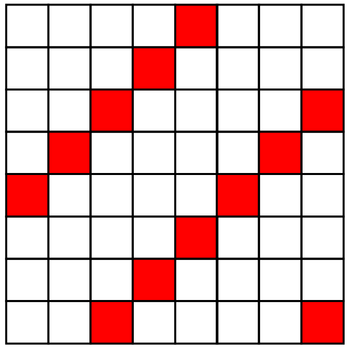
9.5. Kāds mazākais skaits rūtiņu jāaizkrāso taisnstūrī ar izmēriem 8×8 rūtiņas, lai nevarētu atrast nevienu taisnstūri ar izmēriem 1×5 rūtiņas (kurš var būt novietots gan horizontāli, gan vertikāli), kuram visas rūtiņas ir neaizkrāsotas? [AMO, 2022]

K. Sen zināms uzdevums. Sk., piemēram, par klasiku kļuvušo Solomona Golomba grāmatu Polyominoes (1965). Uzdevums attiecas uz vienkāršāko figūru izslēgšanas uzdevumu klasi.

Jāiekrāso vismaz tik rūtiņu, cik daudz 1×5 (I-pentamino) var izvietot kvadrātā 8×8.

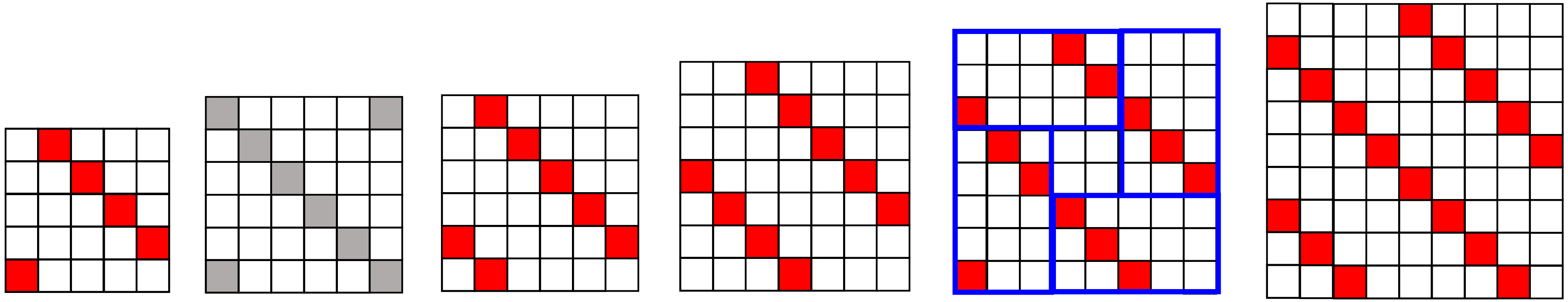
Jāiekrāso vismaz 12 rūtiņu, ar tādu skaitu arī pietiek.





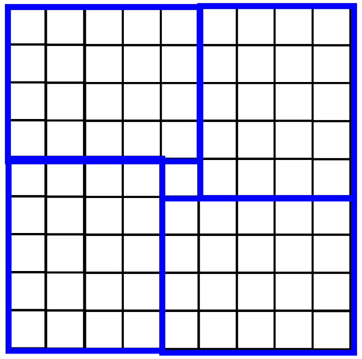
ZPD. Plašs uzdevumu loks dažādām figūrām, kuras nav taisnstūris $1 \times n$.

Taisnstūru izslēgšana



5 8 7 9 12 16

Formula: $I(n)=\left\lfloor \dfrac{n^2}{5} \right\rfloor$



5, 7, 9, 12, 16, 20, 24, 28, 33, 39, 45,

Pierādījums: $I(n)\geq \dfrac{n^2}{5}.$

The simplest necessity proof is for the I pentomino.

Vēsture, avoti

In the 1950s, Solomon W. Golomb investigated the question: how few cells can you remove from an 8 × 8 square to exclude the shape of a given polyomino? His book *Polyominoes* shows minimal exclusions for all polyominoes up through order 5.

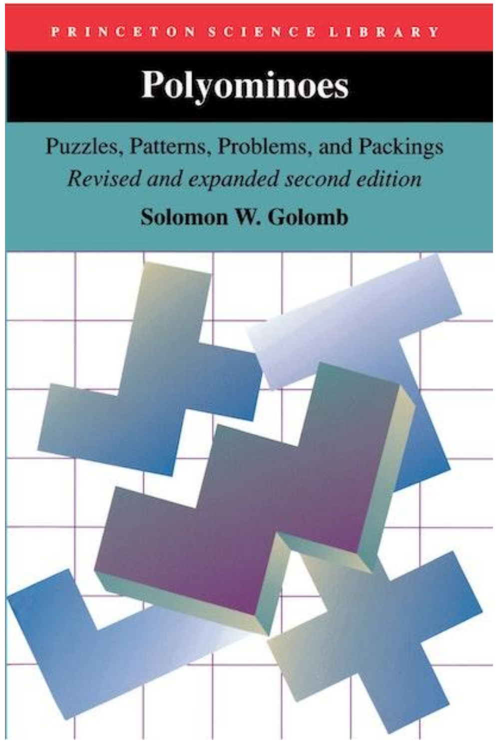
Here I show minimal exclusions of hexominoes from an 8 × 8 square. The solutions shown are not necessarily unique. If you find a smaller solution, please write.

http://www.recmath.org/PolyCur/nexcl/n6excl.html

George Sicherman is a retired computer programmer. He loves recreational mathematics and often studies it with the help of his programming skills.
George's best-known invention is Sicherman Dice.
http://www.gamepuzzles.com/sicherman.htm

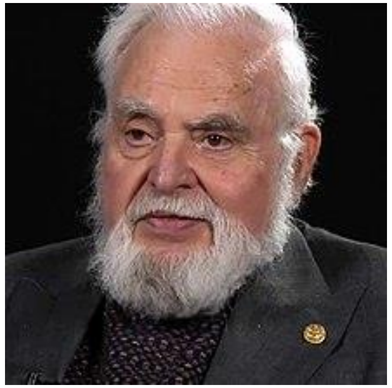
May, 1949

Col. Sicherman's Home Page https://sicherman.net/



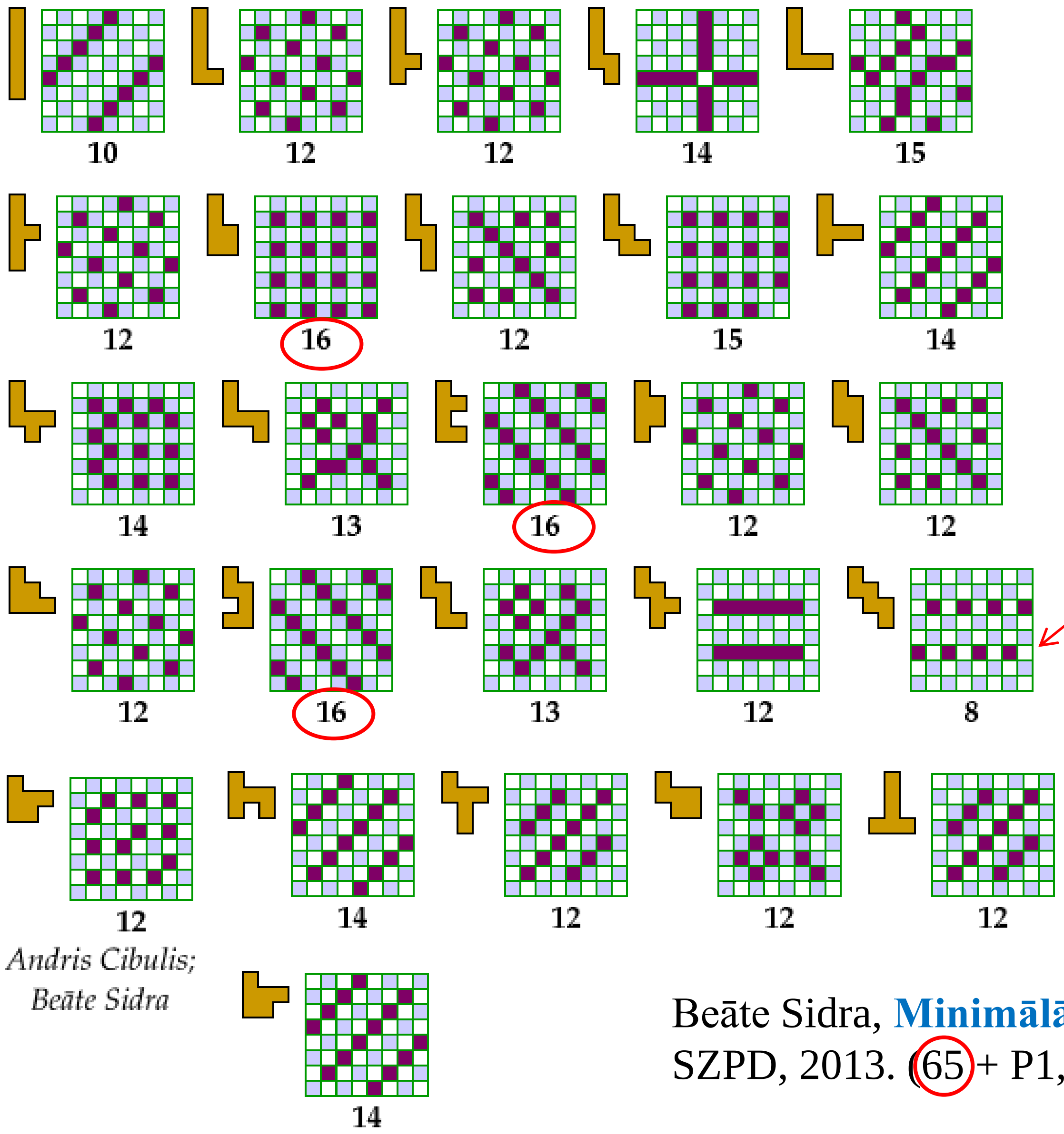
Revised and Expanded Second Edition, Princeton University Press, 1994.

Original edition, 1965.

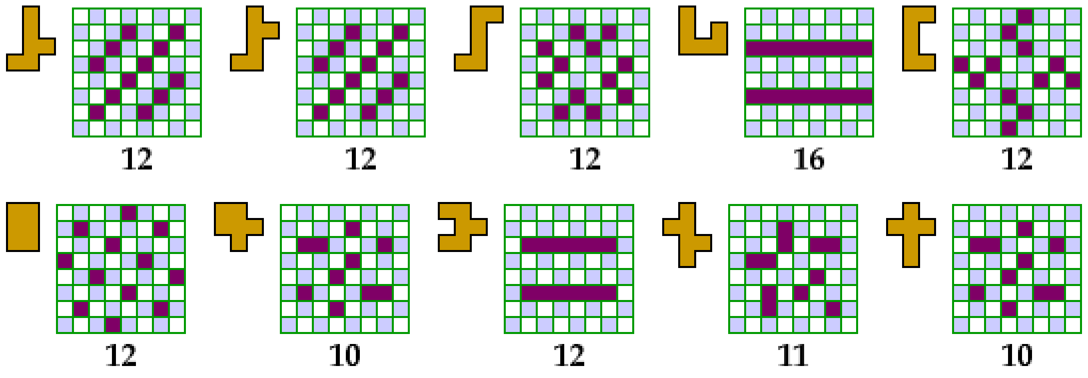


Solomon Wolf Golomb
Born: May 30, 1932
Died: May 1, 2016.

Hexomino Exclusion



Andris Cibulis; Beāte Sidra



Last revised 2013-04-07

Minimālais 8, maksimālais 16

9 nav

8 un 11 ir vienīgās unikālās minimālā skaita vērtības.

Beāte Sidra, **Minimālā mīnu skaita problēma heksamino bloķēšanai**, SZPD, 2013. (65 + P1, B4. 12. kl., Dundagas vsk.)