Bezgalīgu skaitļu aritmētika

Par p-adiskajiem skaitļiem

Emīls Kalugins

Latvijas Universitātes Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte

MMU, 2022. gada 3. decembris

Reālie skaitļi

Vispirms atcerēsimies pāris reālo skaitļu īpāšības. Lai to izdarītu, papētīsim reālos skaitļus

$$7, \quad -2, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \pi.$$

Dažus no šiem skaitļiem var uzskatīt par veseliem, dažus par racionāliem, bet kas kopīgs visiem reāliem skaitļiem?

Reālie skaitļi

Jebkuru reālu skaitli var uzrakstīt kā bezgalīgu decimāldaļu. Mūsu izvēlētajiem skaitļiem tas būtu

$$7 = 7{,}0000000...$$

$$-2 = -2{,}0000000...$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}2500000...$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666666...$$

$$\pi = 3{,}1415926...$$

Skaitļu reprezentācija

Savā veidā šeit jau bezgalība parādās, jo mums būtu nepieciešams bezgalīgi daudz cipari aiz komata, lai uzrakstītu reālo skaitli π. Interesant situācija notiek tad, ja vēlamies saskaitīt $\frac{1}{3}$ ar $\frac{2}{3}$.

$$\begin{array}{r} 0{,}333333... \\ +\ 0{,}666666... \\ \hline 0{,}999999... \end{array}$$

Sanāk, ka $1 = 0{,}9999999...$. Tātad vienu un to pašu skaitli varam reprezentēt divos dažādos veidos. Protams, tas nav nekas jauns, jo tomēr $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, bet mūsu iegūtā situācija ir par decimālskaitļiem.

Skaitļu reprezentācija

Reāliem skaitļiem vienmēr aiz komata seko līdzi bezgalīga virkne ar cipariem, pat ja ikdienā to nerakstam. Tas pats attiecas arī uz naturāliem skaitļiem, jo tie arī ir reāli skaitļi. Tātad skaitli 7, kā jau iepriekš to darījām, varam izrakstīt kā

$$7 = 7{,}000000....$$

Kas notiktu, ja mēs izvērstu šo skaitli uz otru pusi? Tas ir, kas notiktu, ja šo bezgalīgu virkni ar nullēm nevis liktu pa labi aiz komata, bet gan pa kreisi no cipara 7? Vai derīgi rakstīt

$$...0000007\ ?$$

Skaitīšanas sistēmas

Ikdienā mēs darbojamies decimālajā skaitīšanas sistēmā. Tas nozīmē, ka katrs skaitļa cipars apzīmē, cik daudz ņemta kāda skaitļa 10 pakāpe. Vieninieku pozīcijā tas ir $10^0 = 1$, desmitu pozīcijā 10, simtu pozīcijā $10^2 = 100$ utt. Tas nozīmē, ka skaitļus 7, 19, 170, 2022 varam attēlot kā

$$\begin{aligned} 7 &= 7 \cdot 1 = 7 \cdot 10^0 \\ 19 &= 10 + 9 = 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \\ 170 &= 100 + 70 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 \\ 2022 &= 2000 + 20 + 2 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

Skaitīšanas sistēmas

Vispārīgi, ja apskatām k-ciparu naturālu skaitli $n = \overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_1a_0}$, tad tā reprezentācija skaitļa 10 skaitīšanas sistēmā ir

$$n = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + a_{k-1} \cdot 10^{k-1}.$$

Jau iepriekš ievērojām, ka, ja skaitļa pierakstā parādās cipars 0, tad, sākotnējo skaitli sadalot saskaitāmajos pēc 10-nieku pakāpēm, mums summā neparādās tā pakāpe, kuram atbilst cipars 0.

Skaitīšanas sistēmas

Tas nozīmē, ka, ja mēs skaitli 7 uztveram kā divciparu skaitli, tad

$$07 = 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 = 7 \cdot 10^0 = 7.$$

Tāpat varam spriest par to gadījumu, ja 7 uztveram kā trīsciparu skaitli

$$007 = 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 = 7 \cdot 10^0 = 7.$$

Līdzīgi spriežot iegūstam vēlamo, ka

$$...0000007 = 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + \cdots = 7 \cdot 10^0 = 7.$$

Skaitīšanas sistēmas

Šādā veidā jebkuru naturālu skaitli varam pielīdzināt skaitlim, kuram pa kreisi ir bezgalīgi daudz nulles. Protams, šajā gadījumā jau vairs nevar runāt par to, cik ciparu skaitlis kāds ir, jo visi skaitļi šajā reprezentācijā būs ar bezgalīgi daudz cipariem. Šobrīd apskatītajiem skaitļiem ir galīgs skaits nenulles ciparu.

Reālajos skaitļos mēs redzējām, ka var gadīties tādi skaitļi, kuru decimālskaitļa pierakstā ir bezgalīgi daudz nenulles skaitļu pa labi aiz komata, piemēram, $\frac{1}{3} = 0{,}33333...$.

Vai līdzīgi

$$...3333333333$$

ir kaut kā jēgpilni interpretējams?

Bezgalīgi skaitļi

Ja apskatām ...3333333 kā reālu skaitli, tas būs bezgalīgs, jo tas būs lieāks par jebkuru reālu skaitli. Tātad tiešā nozīmē ...33333333 nav reāls skaitlis. Savā ziņā mēs varam pielīdzināt, ka reālos skaitļos šis objekts spēlē līdzīgu lomu kā bezgalība jeb

$$...33333333 \cong \infty.$$

Bet tas mums neliedz manipulēt ar šo objektu. Varam ...3333333 pareizināt ar 3, iegūstot

$$\begin{array}{lr} & ...333333 \\ \times & 3 \\ \hline & ...999999 \end{array}$$

Bezgalīgi skaitļi

Šobrīd neko pārsteidzošu neesam ieguvuši, jo bezgalīgi lielu skaitli pareizinot ar 3 joprojām iegūstam bezgalīgi lielu skaitli. Varam apkopot darbības ar "bezgalību" sekojoši:

- $\infty + a = \infty$,
- $\infty - a = \infty$,
- $\infty + \infty = \infty$,
- $k \cdot \infty = \infty$,
- $(-k) \cdot \infty = -\infty$,
- $-\infty + a = -\infty$,
- $-\infty - a = -\infty$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,
- $k \cdot (-\infty) = -\infty$,
- $(-k) \cdot (-\infty) = \infty$,

jebkuram reālam skaitlim a un pozitīvam reālam skaitlim k.
Izteiksmes $\infty - \infty$ un $0 \cdot \infty$ nav definētas!

Bezgalīgi skaitļi?

Ja mēs domājam par ...9999999 kā bezgalības reprezentāciju, tad pieskaitot jebkuru skaitli vajadzētu būt vēl joprojām bezgalībai. Apskatīsimies, kas notiek, ja ...9999999 pieskaitam 1.

$$
\begin{array}{lr}
 & \ldots 9999999 \\
+ & 1 \\
\hline
 & \ldots 0000000
\end{array}
$$

Tātad, ja ...999999 reprezentētu bezgalību, mēs iegūtu, ka $\infty + 1 \overset{!}{=} 0$ jeb $\infty \overset{!}{=} -1$. Iegūstam aplamus rezultātus! Vienīgais secinājums, ko varam iegūt, ka šādi rakstīti skaitļi nevar būt saistīti pa tiešo ar reālu skaitļu jēdzieniem, kā mēs to naivi saigaidām.

10-adiskie veselie skaitļi

Tā vietā, lai šādus skaitļus, kuru pierakstā izmantojam bezgalīgi daudz ciparus, pielīdzinātu reāliem skaitļiem, apskatīsim tos kā neatkarīgus objektus.

10-adisks vesels skaitlis

Skaitli $x = ...a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$ sauc par **10-adisku veselu skaitli**, ja katram nenegatīvam veselam skaitlim i vērtībā a_i ir kāds cipars no 0 līdz 9 un

$$x = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \cdots + a_k \cdot 10^k + \dots .$$

Visu 10-adisko veselo skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{Z}_{10}$.

10-adiskie veselie skaitļi

Iepriekš jau nospriedām, ka 10-adiskie veselie skaitļi satur naturālos skaitļus. Pēc nosaukuma jau sagaidāms, ka šī kopa saturēs arī negatīvos veselos skaitļus. Tagad mūsu interpretācija, ka $...9999999 + ...0000001 = ...0000000$ ir derīga kā 10-adisku veselu skaitļu summa. Ieguvām, ka $...9999999 = -1$.

Šeit nevajadzētu uztraukties. Objekts "-1" vienkārši nozīmē, ka tas ir kaut kas, kam, pieskaitkot 1, rezultātā iegūst 0 jeb 10-adiskajos skaitļos ...00000000.

10-adiskie veselie skaitļi

Šādi mēs varam iegūt jebkuru negatīvu veselu skaitli. Piemēram, $-7 = ...999993$, jo $...000007 + ...999993 = ...000000$. Vai arī pēc līdzīga principa iegūstam, ka $-103 = ...9999897$.

Tātatd 10-adiskajos veselajos skaitļos varam reprezentēt visus veselos skaitļus. Interesantākais ir tas, ka 10-adiskos veselos skaitļus nevar iedalīt pozitīvajos un negatīvajos skaitļos, kaut arī tie tos satur kā veselus skaitļus.

10-adisko veselo skaitļu operācijas

Veselus skaitļus mēs varam saskaitīt, atņemt un reizināt. Tieši tāpat var darīt ar 10-adiskajiem skaitļiem. Piemēram,

$$\begin{array}{r} ...251628 \\ +\ ...366789 \\ \hline ...618417 \end{array}$$

Līdzīgi ir ar atņemšani tik jāatceras, ka, ja atņem lielāku skaitli no mazāka, tad pārejam atpakaļ pie negatīvu skaitļu reprezentācijas, kas ir pilna ar devītniekiem.

$$\begin{array}{r} ...000000 \\ -\ ...000001 \\ \hline ...999999 \end{array}$$

10-adisko veselo skaitļu operācijas

Reizināšana notiek pēc līdzīga principa, tāpēc īpaši tam netiks veltīts piemērs. Jebkurš, kas ir kādreiz mūžā reizinājis stabiņā, to spētu izdarīt.

Varētu rasties jautājums, vai šādi vispār drīkst skaitīt, atņemt un reizināt, ja mums tas ir jādara ar skaitļiem, kas ir bezgalīgi gari. Šeit nekādas problēmas nerodas. Pie tam ikdienā tas tiek darīts ar reāliem skaitļiem, jo, kā jau apspriedām, tiem ir bezgalīgi daudz ciparu pa labi no komata.

10-adisku veselu skaitļu dalīšana

Kaut arī divus veselus skaitļu savā starpā ne vienmēr ir iespējams dalīt, 10-adiskajos veselajos skaitļos pastāv tādi daļskaitļi, ko varbūt nesagaidām.

Apskatīsim skaitli $x = ...33333333$. Jau tagad labi zināms, ka $3x = ...9999999 = -1$. Tātad $x = -\frac{1}{3}$. Esam ieguvuši racionālu skaitli, ko var reprezentēt 10-adiskajos veselajos skaitļos. Vai varam 10-adiskajos veselajos skaitļos izteikt $\frac{1}{3}$? Lai iegūtu $\frac{1}{3}$ varam apskatīt $0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ jeb

$$\begin{array}{r} ...000000 \\ -\ ...333333 \\ \hline ...666667 \end{array}$$

Iegūstam, ka $\frac{1}{3} = ...6666667$.

10-adisku veselu skaitļu dalīšana

Sāk jau rasties jautājums, kādus tad skaitļus nevar attēlot 10-adiskajos veselos skaitļos. Pirmās problēmas rodas jau ar skaitli $\frac{1}{300}$. Mēs jau redzējām, kā izskatās $\frac{1}{3}$. Pēc idejas šis skaitlis vēl būtu jāreizina ar $\frac{1}{100}$. Tātad

$$\begin{aligned}
\frac{1}{300} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} &= \ldots 66666667 \cdot \frac{1}{100} \\
&= (\cdots + 6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7) \cdot \frac{1}{10^2} \\
&= \cdots + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 6 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} \\
&= \cdots + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

10-adiskie skaitļi

Lai izteiktu $\frac{1}{300}$, nepieciešami saskaitāmie, kuru desmitnieku pakāpes ir negatīvas. Tātad mums jāievieš komats aiz šiem 10-adiskajiem veselajiem skaitļiem, iegūstot **10-adiskus skaitļus**.

Līdzīgi kā reāliem skaitļiem pa kreisi no komata var būt galīgs skaits ciparu un pa labi bezgalīgs skaits ciparu, tad 10-adiskajiem skaitļiem pa kreisi no komata var būt bezgalīgs skaits ciparu, bet pa labi galīgs skaits ciparu.

10-adiskie skaitļi

10-adisks skaitlis

Skaitli $x = ...a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0 \ , \ a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k}$ sauc par **10-adisku skaitli**, ja katram veselam skaitlim $i \geq -k$ vērtībā a_i ir kāds cipars no 0 līdz 9 un

$$x = a_{-k} 10^{-k} + a_{-k+1} 10^{-k+1} + \dots + a_{-1} 10^{-1} + a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \dots$$

Visu 10-adisko skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{Q}_{10}$.

Tas nozīmē, ka $\frac{1}{300}$ kā

$$\frac{1}{300} = \ldots 6666666{,}67.$$

Bet vai paplašinot šos 10-adiskos veselos skaitļus līdz 10-adiskajiem skaitļiem vienmēr varēs dalīt ar nenulles skaitļiem, kā tas ir racionālos skaitļos? Diemžēl atbilde šajā gadījumā būs noliedzoša.

10-adiskie skaitļi

Iespējams atrast tādu 10-adisku skaitli $x = ...1787109376$, lai $x^2 = x$ jeb

$$\begin{array}{r} ...1787109376 \\ \times\ ...1787109376 \\ \hline ...1787109376 \end{array}$$

Turpretīm iegūstam, ka $x^2 - x = x(x-1) = 0$ jeb

$$\begin{array}{r} ...1787109376 \\ \times\ ...1787109375 \\ \hline ...0000000000 \end{array}$$

10-adiskie skaitļi

Pieņemsim, ka ar x drīkst dalīt. Apskatīsim $\frac{x}{x} = 1$. Preizinot abas puses ar $x - 1$, iegūstam, ka $0 = \frac{0}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x - 1$ jeb $x = 1$, kas ir aplami, jo $x = ...1787109376$. Secinām, ka pieņēmums, ka ar x drīkst dalīt, ir aplams.

Tātad 10-adiskajos skaitļos esam atraduši tādu skaitli, kas nav 0, un ar kuru nedrīkst dalīt. Vai esam lieki centušies, pētot 10-adiskos skaitļus?

Tāpat kā reālajos skaitļos varam pētīt citas skaitīšanas sistēmas, kuras bāzē netiek ņemts skaitlis 10, tad varam arī pētīt vispārīgākus p-adiskus skaitļus, kur p ir kāds naturāls skaitlis, kas lielāks par 1. Gluži līdzīgi, kā tas tiek darīt ar reāliem skaitļiem.

p-adiskie skaitļi

p-adisks skaitlis

Skaitli $x = ...a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0 \, , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k}$ sauc par **p-adisku skaitli**, ja katram veselam skaitlim $i \geq -k$ vērtībā a_i ir kāds cipars no 0 līdz $p-1$, kur $p \geq 2$ un

$$x = a_{-k} p^{-k} + a_{-k+1} p^{-k+1} + \cdots + a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 + \ldots$$

Visu p-adisko skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{Q}_p$.

p-adiskie skaitļi

Konkrētām p izvēlēm ar visiem nenulles p-adiskajiem skaitļiem drīkst dalīt. Interesentākais ir tas, ka šī izvēle tieši sakrīt ar to, kad p ir pirmskaitlis. Tieši šī iemesla dēļ tiek izmantots burts p, lai apzīmētu p-adiskos skaitļus.

Šobrīd nofiksēsim $p = 2$ un pētīsim 2-adiskos skaitļus. To pierakstā mēs drīkstam izmantot tikai ciparus 0 un 1 gluži kā tas ir binārajā skaitīšanas sistēmā. Piemēram, $...00001101_2$ (ar 2 tiek apzīmēts, ka darbojamies bāzē 2) ir vienāds ar naturālo skaitli 13_{10} (bāzē 10), jo $...000001101_2 = 1 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 1 + 4 + 8 = 13_{10}$.

p-adiskie skaitļi

Varam arī atrast, kā izskatās skaitlis -1 2-adiskajos skaitļos. Nav grūti saprast, kāpēc

$$...111111111_2 = -1.$$

Bet, ja apskatām p-adiska skaitļa definīciju, iegūstam ļoti interesantu rezultātu

$$\begin{aligned} ...11111111_2 &= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \cdots \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots =_2 -1. \end{aligned}$$

Protams, šāds rezultāts ir aplams reālos skaitļos, bet tomēr ir patiess 2-adisko skaitļu kopā $\mathbb{Q}_2$.

Ģeometriskās progresijas

Vidusskolā tiek pētītas tādas lietas, ko sauc par ģeometriskajām progresijām. Pietam tiek arī apskatītas bezgalīgi dilstošas ģeometriskas progresijas locekļu summa, ko sauc par ģeometriskās progresijas rindu. Ja apzīmējam kvocientu ar p, tad šī rinda ir izskatā

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + \ldots .$$

Pie tam, ja $|p| < 1$ (dota dilstoša ģeometriska progresija), tad šai rindai var aprēķināt summu, kas ir vienāda ar

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + \cdots = \frac{1}{1 - p}.$$

Ģeometriskās progresijas

Ja mēs nepaklausām, ko gudri cilvēki mums saka, un p vietā ievietojam 2, kuram $|2| \nless 1$, iegūstam, ka

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = -1,$$

kas ir arī tas, ko mēs ieguvām pēc 2-adiskajiem skaitļiem. Šeit jāsaprot atšķirība starp summu kā reāliem skaitļiem un reprezentāciju caur 2-adiskajiem skaitļiem. Reālos skaitļos šāda vienādība nav patiesa, bet redzam, ka p-adiskajos skaitļos varētu būt patiesa. Izrādās, ka šī summa p-adiskajos skaitļos sakrīt ar ģeometriskās progressijas locekļu summu formulu vienmēr.

Ģeometriskās progresijas

Teorēma

Ja $p \in \mathbb{N}$ un $p \geq 2$, tad

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 + p^6 + \cdots = \frac{1}{1-p}.$$

kā skaitlis kopā $\mathbb{Q}_p$.

Ģeometriskās progresijas

Apskatīsimies, kā šī teorēma izpildās 6-adiskajos skaitļos. Teorēma saka, ka jāpēta skaitlis $x = ...111111111_6$.

Ja skaitli x pareizināsim ar 5, iegūsim, ka $5x = ...55555555_6$. Pie tam viegli ievērot, ka $...55555555_6 = -1$, tāpēc $5x + 1 = 0$.

Šo vienādību varam pārkārtot, lai iegūtu $x = -\frac{1}{5}$, kas arī sakrīt ar teorēmā piedāvāto skaitli $\frac{1}{1-6}$.

Šeit mēs apskatījām tikai vienu vērtību, bet pēc šī principa nevajadzētu būt grūi pierādīt šo vispārīgajam gadījumam.

5-adiski skaitļi

Dažās p-adisko skaitļu kopās atrodas interesanti skaitļi. Piemēram, 5-adiskajos skaitļos eksistē tāds skaitlis $x = ...3032431212_5$, kuram

$$\begin{array}{r} ...3032431212_5 \\ \times\ ...3032431212_5 \\ \hline ...4444444444_5 \end{array}$$

Mums zināms, ka $...44444444_5 = -1$, tāpēc esam ieguvuši, ka $x^2 = -1$ jeb $x = \sqrt{-1}$. Vai esam ieguvuši imagināros skaitļus 5-adiskajos skaitļos? Arī šajā gadījumā, tāpat kā tas bija ar -1, nevajag pārlieku domāt, jo šeit esam ieguvuši skaitli, kuru kāpinot kvadrātā, un kuram pieskaitot 1, iegūst 0. Savā ziņā tas nekas īpašs nav. Vienīgi tas, ka reālos skaitļos tāds skaitlis neeksistē.

Skaitlis $\sqrt{-1}$

Ne visās p-adiskajās kopās eksistē skaitlis $\sqrt{-1}$. Šis skaitlis atrodas kopā $\mathbb{Q}_p$ tikai tad, ja $p \equiv 1 \pmod 4$ un p ir pirmskaitlis. Pie tam var būt citas interesantas sekas no šī.

Piemēram, 2-adiskajos skaitļos eksistē skaitlis $\sqrt{-7}$, bet tā kā $2 \not\equiv 1 \pmod 4$, tad $\sqrt{-1}$ neeksistē šajā kopā. Kā sekas šim ir tas, ka $\sqrt{7}$ neeksistē šajā kopā, jo pretējā gadījumā drīkstētu dalīt $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{7}} = \sqrt{-1}$, jo 2 ir pirmskaitlis, un varētu iegūt skaitli, kas neeksistē.

Reālajos skaitļos tieši pretēji eksistē skaitlis $\sqrt{7}$, bet neeksistē $\sqrt{-7}$. Redzam, ka p-adiskie skaitļi var būt ļoti neintuitīvi, tāpēc rodas jautājums, vai vispār ar viņiem var iesākt kaut ko jēgpilnu?

Augsti dalāmi skaitļi

Pieņemsim, ka mums ir dots olimpiāžu tipa jautājums.

> Vai eksistē tāds n, lai $n^2 - 7$ dalītos ar 2^{50}?

Zinot mazliet teoriju par kongruenču vienādojumiem, varam spriest, ka $n^2 - 7 \not\equiv 0 \pmod 4$, ja apskatām visus iespējamos atlikumus izteiksmei $n^2 - 7$.

Tā kā $4 = 2^2$, tād varam secināt, ka $n^2 - 7$ nekad nedalīsies ar 2^{50}, jo tā nedalās ar 2^2.

Augsti dalāmi skaitļi

Apskatīsim līdzīgu tagad līdzīgu problēmu.

> Vai eksistē tāds n, lai $n^2 + 7$ dalītos ar 2^{50}?

Lai kā mēs arī necenstos, šoreiz nevarēsim atrast pretrunas moduli, lai atspēkotu šo apgalvojumu. Kaut arī tas, ka nesanāk, nav pamatojums, ka nevar, dāsni tagad tiks pateikts priekšā, ka var atrast tādu skaitli.

Vienmēr olimpiādēs uz šādiem grūtiem jautājumiem jāatbild, ka neeksistē, jo savādāk būtu jāmeklē sarežģīti skaitļi. Tad jautājums ir tāds: Ko iesākt šajā uzdevumā?

Mums nāks palīgā p-adiskie skaitļi.

Augsti dalāmi skaitļi

Tā kā mums jāpēta dalāmība ar 2, tad apskatīsim 2-adiskos skaitļus. Mūsu mērķis ir atrast tādu skaitli x, lai $x^2 + 7$ dalītos pēc iespējas augstāku 2-nieka pakāpi.

Interesanti ir tas, ka 2-adiskajos skaitļos ir tāds skaitlis, kas dalās ar patvaļīgu skaitu 2 pakāpēm un tas ir skaitlis $...0000000_2$. Ja mēs varētu dabūt $x^2 + 7$ pēc iespējas tuvāk $...000000_2$, tad rezultātā būtu 2-adisks skaitlis, no kura varētu nolasīt vēlamo atbildi.

Šis meklētais x būs 2-adiskais skaitlis $\sqrt{-7}$, jo, ja dots $x^2 + 7 =_2 0$, tad $x = \sqrt{-7}$ ir atrisinājums šim vienādojumam.

Augsti dalāmi skaitļi

Iepriekš tika pieminēts, ka $\sqrt{7}$ neeksistē un $\sqrt{-7}$ eksistē 2-adiskajos skaitļos. Pie tam ievērojam, ka šis sakrīt ar to, kādas ir atbildes uz sākotnēji uzdotajiem olimpiāžu tipa uzdevumiem. Šī, protams, nav sakritība.

Tātad tagad tikai jāatrod metode, kas palīdzēs atrast skaitli $\sqrt{-7}$ 2-adiskajos skaitļos. Protams, eksistē vairākas metodes, bet viena no tām ir pakāpeniski šo skaitli veidot no kongruenču vienādojumiem. Mērķis ir atrast tādu 2-adisku skaitli x, kas apmierina

$$x^2 \equiv -7 \pmod{2^n} \qquad \text{katram } n \in \mathbb{N}.$$

Augsti dalāmi skaitļi

Šī kongruenču sistēma izriet no tā, ka 2-adiskus skaitļus var izrakstīt kā divnieku pakāpju summu, t.i., $x = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + \dots$. Tātad, lai noskaidortu ciparus a_i, varam pakāpeniski skatīties uz kongruenču vienādojumiem, kas sākotnēji izolē ciparu a_0, jo skatoties pēc moduļa 2, visi augstākas kārtas saskaitāmie pazudīs. Skatoties pēc tam moduli pēc 4, iegūsim, ka paliks pāri saskaitāmie $a_0 + 2a_1$ utt. Pakāpeniski pievieno jaunus ciparus pa vienam, kurus noskaidrojam caur kongruenču vienādojumiem.

Augsti dalāmi skaitļi

Šī metode, saprotams, ir gana lēna, ja ar roku to dara. Mūsdienās eksistē augstas veiktspējas algoritmi, kas spēj ātri atrast p-adisku skaitļu reprezentācijas. Tur jau nepieciešamas papildus nodarbības, lai runātu par funkciju atvasinājumiem un to izvirzījumiem. Tā kā šī meklēšana aizņemtu pārāk daudz laika, tad atļaušos šeit priekšā uzrakstīt 2-adisko skaitli.

$$\sqrt{-7} = ...001011101101100011100111001001100011000000010110101_2.$$

Kā tad no šī iegūt beigās atbildi?

Augsti dalāmi skaitļi

Iegūtais 2-adiskais skaitlis ir ar bezgalīgi daudz cipariem, bet mēs vēlamies iegūt kaut kādu naturālu skaitli, ko ievietot interesējošajā jautājumā. Tāpat kā reālajos skaitļos mēs varam izvēlēties precizitāti aiz komata, tad arī 2-adiskos skaitļus vienā brīdī varam "nogriezt", lai iegūtu pietiekoši tuvu atbildi vēlamajam. Ja 2-adiskajam skaitlim

$$\sqrt{-7} = ...0010111011011000111001110010011000110000001011010 1_2$$

no labās puses izvēlamies pāris pirmos ciparus, tad iegūsim kaut kādu naturālu skaitli. Piemēram, izvēloties pirmos 5 ciparus no skaitļa $\sqrt{-7}$ 2-adiskās reprezentācijas, iegūstam

$$10101_2 = 21_{10}.$$

Augsti dalāmi skaitļi

$$\sqrt{-7} = ...0010111011011000111001110010011000110000001011010 1_2$$

Apskatīsimies, ko dod izteiksme $n^2 + 7$, ja $n = 10101_2 = 21_{10}$.

$$21^2 + 7 = 448 = 2^6 \cdot 7.$$

Ieguvām skaitli, kas dalās ar augstu 2-nieka pakāpi!
Tagad pamēģināsim no 2-adiskā skaitļa iegūt vēl kādu skaitli.
Paņemsim pirmos 8 ciparus jeb

$$n = 10110101_2 = 181.$$

Ievietojot formulā, iegūstam

$$181^2 + 7 = 32768 = 2^{15}.$$

Augsti dalāmi skaitļi

$$\sqrt{-7} = \ldots 0010111011011000111001110010011000110000001011010 1_2$$

Izrādās, ka šādi vienmēr varēs iegūt skaitli, kura kvadrātam pieskaitot 7, tas dalīsies ar "augstu" 2-nieka pakāpi. Ja paņemam pirmos k ciparus, tad izveidotais naturālais skaitlis pretī dos skaitlis, kas dalīsies ar vismaz 2^k. Lai iegūtu skaitli n, kuram $n^2 + 7$ dalītos ar 2^{50}, jāpaņem pirmie 50 cipari, bet šajā gadījumā pietieks ar 48 cipariem jeb

$$\begin{aligned} n &= 101110110110001110011100100110001100000010110101_2 \\ &= 206036503412917_{10}. \end{aligned}$$

Augsti dalāmi skaitļi

Pārbaudīsim šo vērtību

$$\begin{aligned} 206036503412917^2 + 7 &= 42451040738620958589002448896 \\ &= 2^{51} \cdot 18852049138927. \end{aligned}$$

Esam atraduši meklēto vērtību. Interesanti ir tas, ka ar šādu metodi var atrast visus šāda veida skaitļus, pat arī tādu n, lai $n^2 + 7$ dalītos ar 2^{2022}. Ar pilno pārlasi šādu skaitli būtu bezcerīgi atrast, bet, pateicoties p-adisku skaitļu īpašībām, to mūsdienās jau diezgan veikli var izdarīt.

PALDIES PAR UZMANĪBU!