Mazā matemātikas universitāte

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Uz ģeometriskām īpašībām balstīta skaitliskā modelēšana

Dabaszinātnes nozare: Matemātika; Apakšnozares: Lietišķā matemātika un matemātiskā modelēšana, Skaitliskā analīze

Dr. Jānis Bajārs

Latvijas Universitāte
Rīga, 06.03.2021

Rezumē

- Docents un vadošais pētnieks Diferenciālvienādojumu un tuvināto metožu katedrā, Matemātikas nodaļā, LU.
- Lekciju kursi:
  - Skaitliskās Metodes III (skaitliskās metodes diferenciālvienādojumu risināšanai);
  - Parastie diferenciālvienādojumi un modelēšana;
  - Izvēlētas nodaļas diferenču shēmu skaitliskā analīze ar datorprogrammu MATLAB un MAPLE lietošanu;
  - Seminārs programmu paketēs un nepārtraukto procesu datu apstrādē.
- Projekti:
  - Dinamisko sistēmu struktūru saglabājošie neironu tīkli;
  - Uz datiem balstīta nelineāru viļņu modelēšana.

Pateicība

Latvijas Zinātnes padome

FLPP

FUNDAMENTĀLO UN LIETIŠĶO PĒTĪJUMU PROJEKTI

PostDoc Latvia

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA

Eiropas Reģionālās attīstības fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Saturs

Keplera likumi

1. Visas planētas riņķo ap Sauli pa elipsi, kuras vienā fokusā atrodas Saule.
2. Taisne, kas savieno Sauli un planētu, vienādos laika sprīžos apraksta vienādus laukumus.
3. Jebkuru divu planētu apriņķošanas periodu kvadrāti attiecas tāpat kā to orbītu lielo pusasu kubi.

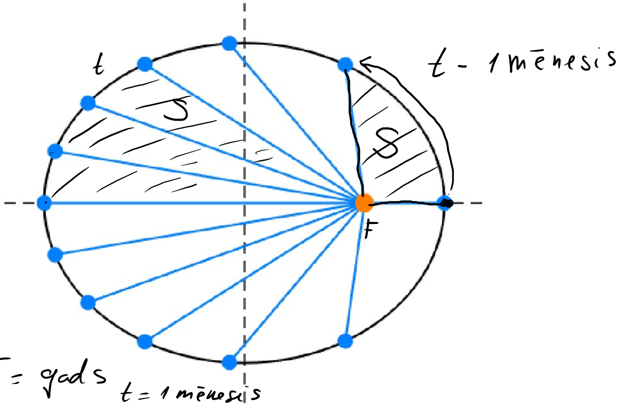
1571. - 1630.

Fizika, 10. klase: https://www.uzdevumi.lv/p/fizika/10-klase/kustiba-gravitacijas-lauka-20201/planetu-un-pavadonu-kustiba-20910/re-87dc30a7-8d5f-423c-9908-15e71d3b4c02

Keplera pirmo divu likumu ģeometriskā interpretācija

1) Visas planētas riņķo ap Sauli pa elipsi, kuras vienā fokusā atrodas Saule.

2) Taisne, kas savieno Sauli un planētu, vienādos laika sprīžos apraksta vienādus laukumus.

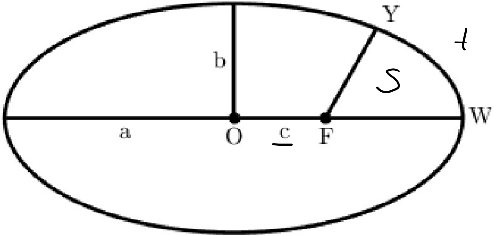


T = gads

t = 1 mēnesis

$$M = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi \frac{t}{12} = 2\pi$$

Planētas kustības modelēšana

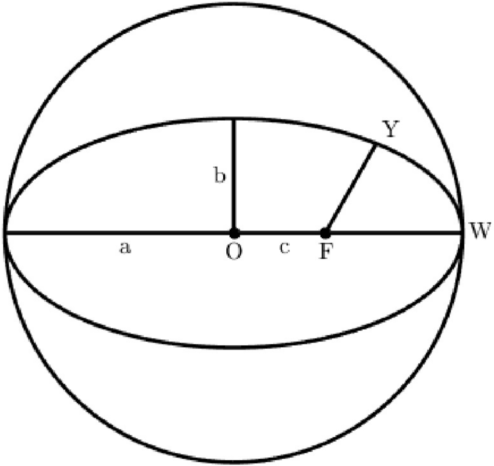


$$M = 2\pi\frac{t}{T} = 2\pi\frac{S}{S_e}$$

$$S_e = \pi ab$$

$$M = \frac{2S}{ab}$$

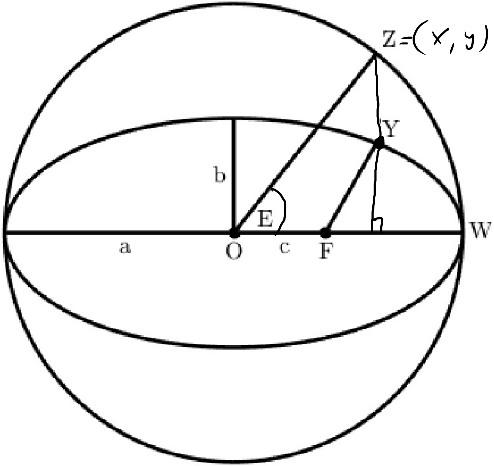
Planētas kustības modelēšana



$$M = \frac{2S}{ab}$$

$R = a$

Planētas kustības modelēšana



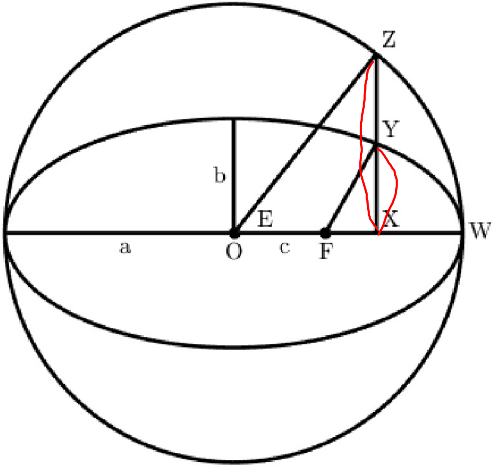
$$M = \frac{2S}{ab}$$

$x = a\cos(E)$

$y = a\sin(E)$

$0 \le E \le 2\pi$

Planētas kustības modelēšana



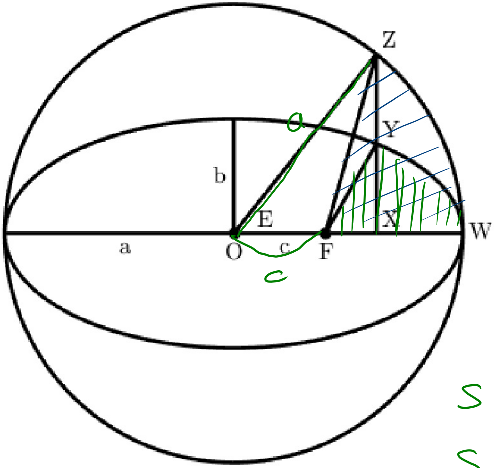
$$M = \frac{2S}{ab}$$

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{b}{a}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Planētas kustības modelēšana



$$M = \frac{2S}{ab}$$

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{b}{a}$$

Y

$$\frac{S(FW\cancel{Z})}{S(FWZ)} = \frac{S}{S(FWZ)} = \frac{b}{a}$$

$$S = \frac{b}{a} S(FWZ)$$

$$S(FWZ) = S(OWZ) - S(OFZ)$$

$$S(OWZ) = \frac{1}{2} a^2 E$$

$$S(OFZ) = \frac{1}{2} a c \sin(E)$$

Planētas kustības modelēšana

$$M = \frac{2S}{ab}$$

$$S = \frac{b}{a} S(FWZ)$$

$$S(FWZ) = S(OWZ) - S(OFZ) = \underline{\frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}ac\sin(E)}$$

$$S = \frac{1}{2}abE - \frac{1}{2}bc\sin(E)$$

$$M = E - \frac{c}{a}\sin(E)$$

$$M = E - e\sin(E), \qquad 0 \leq E \leq 2\pi$$

kur $e = \frac{c}{a}$ ir orbītas ekscentricitāte.

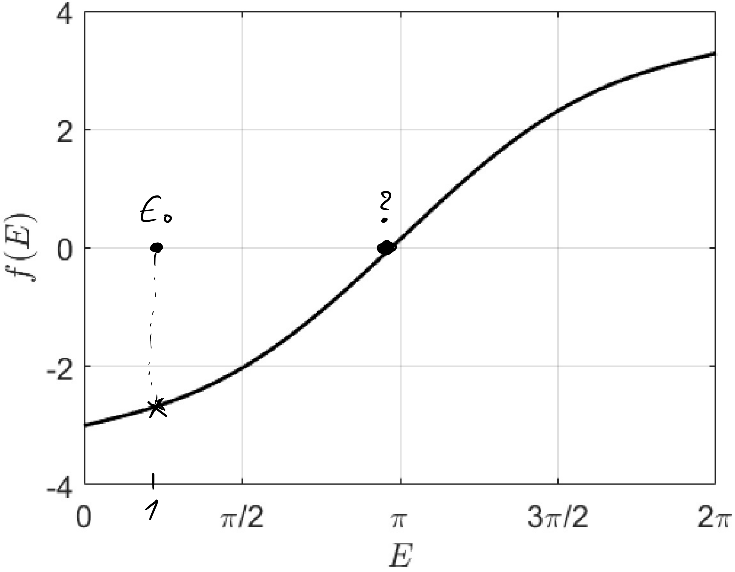
Uzdosim funkciju f, un atradīsim tās atvasinājumu:

$$f(E) = E - e\sin(E) - M$$

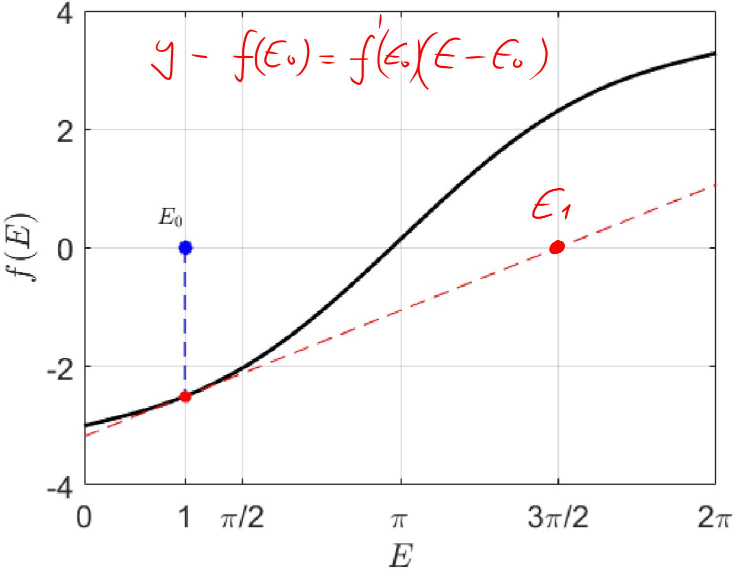
$$f(E) = 0$$

$$f'(E) = 1 - e\cos(E)$$

Funkcijas f attēlojums, ja $M = 3$ un $e = 0.6$



Ņūtona metode



$$y - f(\varepsilon_0) = f'(\varepsilon_0)(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

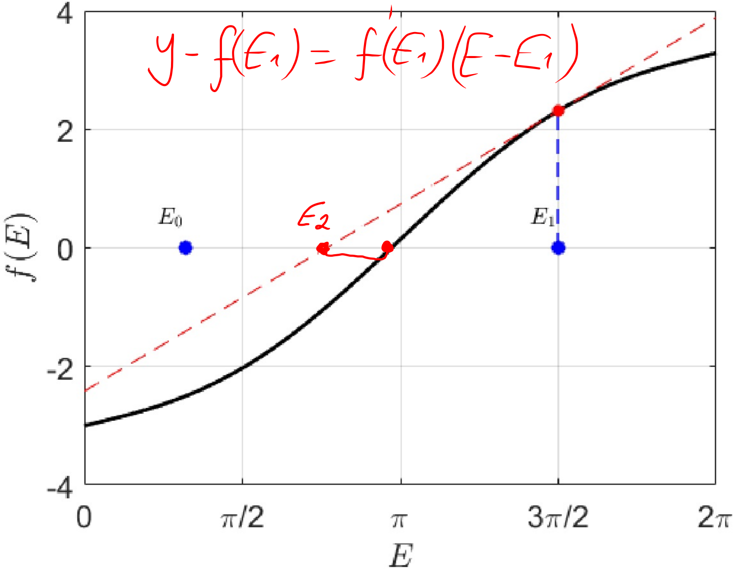
$$y = f'(\varepsilon_0)(\varepsilon - \varepsilon_0) + f(\varepsilon_0) = 0$$

$$f'(\varepsilon_0)(\varepsilon - \varepsilon_0) = -f(\varepsilon_0) \qquad f'(\varepsilon_0) \neq 0$$

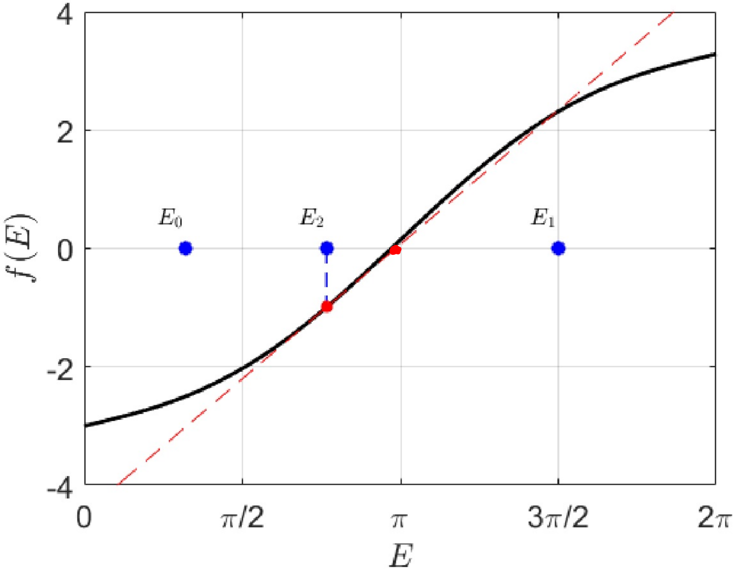
$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{f(\varepsilon_0)}{f'(\varepsilon_0)}$$

$$\varepsilon_1 := \varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{f(\varepsilon_0)}{f'(\varepsilon_0)}$$

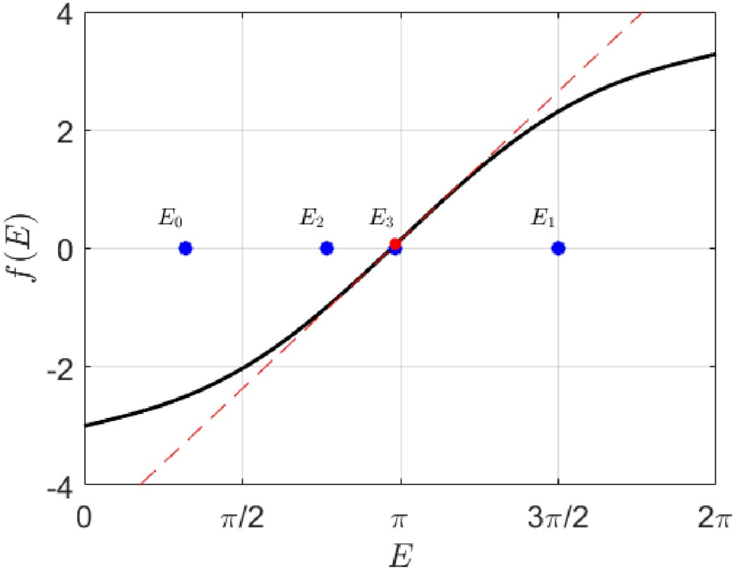
Ņūtona metode



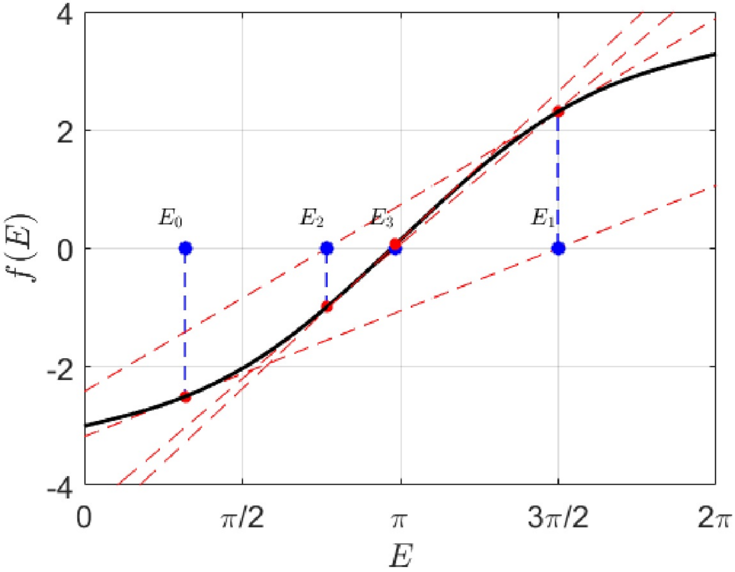
Ņūtona metode



Ņūtona metode



Ņūtona metode



Ņūtona metodes algoritms

Brīvi izvēloties E_0 vērtību, no vienādojuma:

$$f'(E_0)(E_1 - E_0) + f(E_0) = 0,$$

atrodam E_1 vērtību:

$$E_1 = E_0 - \frac{f(E_0)}{f'(E_0)}.$$

Ņūtona metodes algoritms

Tālāk atrodam E_2 vērtību no vienādojuma:

$$f'(E_1)(E_2 - E_1) + f(E_1) = 0,$$

$$E_2 = E_1 - \frac{f(E_1)}{f'(E_1)}.$$

Ņūtona metodes algoritms

Šādi mēs iegūstam iteratīvu algoritmu, t.i., Ņūtona metodi:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

kur E_0 ir patvaļīgi izvēlēts.

Veicam aprēķinus, līdz esam sasnieguši atrisinājumu ar noteiktu precizitāti, piemēram,

$$|f(E_n)| = |E_n - e\sin(E_n) - M| \leq Tol,$$

kur Tol ir uzdota tolerances (precizitātes) vērtība.

Programmas un programmu paketes

julia Maple Wolfram Mathematica

R Scilab SciPy

MATLAB GNU Octave

...

https://www.gnu.org/software/octave/index

Ņūtona metode ar Octave https://octave-online.net/

```
M = 3;
e = 0.6;
f = @(E) E - e*sin(E) - M;
df = @(E) 1 - e*cos(E);
iter = 0;
E = 1;
F = f(E);
dF = df(E);
Tol = 1e-6;
kluda = abs(F);
while kluda > Tol
    E = E - F/dF;
    F = f(E);
    dF = df(E);
    kluda = abs(F);
    iter = iter + 1;
end
display(iter)
display(E)
```

$f(E)$

$f'(E)$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$E_0 = 1$

10^{-6}

Patstāvīgais darbs mājās

Lai pārliecinātos par metodes izpratni, ieteiktu atrast saknes, izmantojot Ņūtona metodi, šādām divām funkcijām:

1. $f(x) = x + e^x$;
2. $f(x) = x^2 - 2x$.

t.i., visas tās x vērtības, kuras apmierina vienādojumu: $f(x) = 0$.

Piezīme: ieteikums būtu vispirms uzskicēt funkciju grafikus, lai gūtu priekšstatu par sakņu skaitu un to aptuvenām vērtībām.

Sadalīsim planētas vienas rotācijas periodu K daļās, ar to iegūstot laika vērtības radiānos:

$$M_k = k\frac{2\pi}{K}, \quad k = 0, 1, 2, ..., K.$$

Katram k ar Ņūtona metodi mēs atrisinām vienādojumu:

$$M_k = E - e\sin(E),$$

lai atrastu leņķa vērtību E, kas savukārt dod mums planētas koordinātes:

$$x_k = a\cos(E),$$
$$y_k = a\underbrace{\sqrt{1-e^2}}\sin(E).$$

MD

video: $a = 2$, $e = 0.6$, $K = 100$.

Planētu kustība Saules sistēmā

Saules sistēmas planētu kustību var modelēt ar Hamiltona sistēmu:

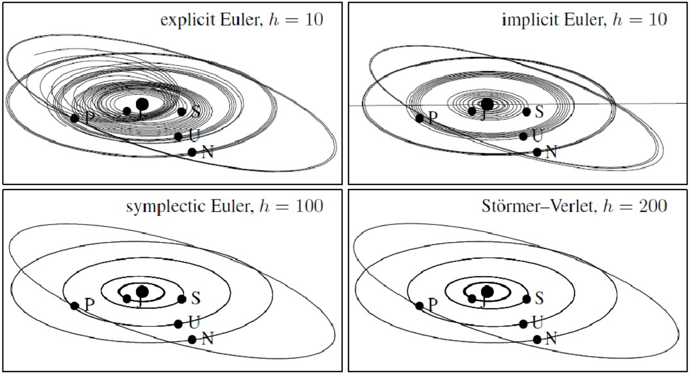
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\nabla_{\boldsymbol{q}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}),$$

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{m_i}\boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{p}_i - G\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{i-1} \frac{m_i m_j}{\|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j\|_2},$$

kur N ir planētu skaits, $\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{p_i} \in \mathbb{R}^3$ ir i-tās planētas pozīcija (koordinātes) un impulss, respektīvi, m_i ir i-tās planētas masa, G ir gravitācijas konstante un $\boldsymbol{p}$ ar $\boldsymbol{q}$ satur visu $\boldsymbol{p}_i$ un $\boldsymbol{q}_i$ vērtības.

Šādu sistēmu spēsiet risināt, apgūstot lekciju kursus: Diferenciālvienādojumi I, Diferenciālvienādojumi II, Skaitliskās metodes III, utml..

Prātīga skaitliskā algoritma izvēle



Attēls ņemts no grāmatas: E. Hairer, C. Lubich & G. Wanner, *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer 2006.

Paldies par uzmanību!

Dr. Jānis Bajārs: *janis.bajars@lu.lv*