

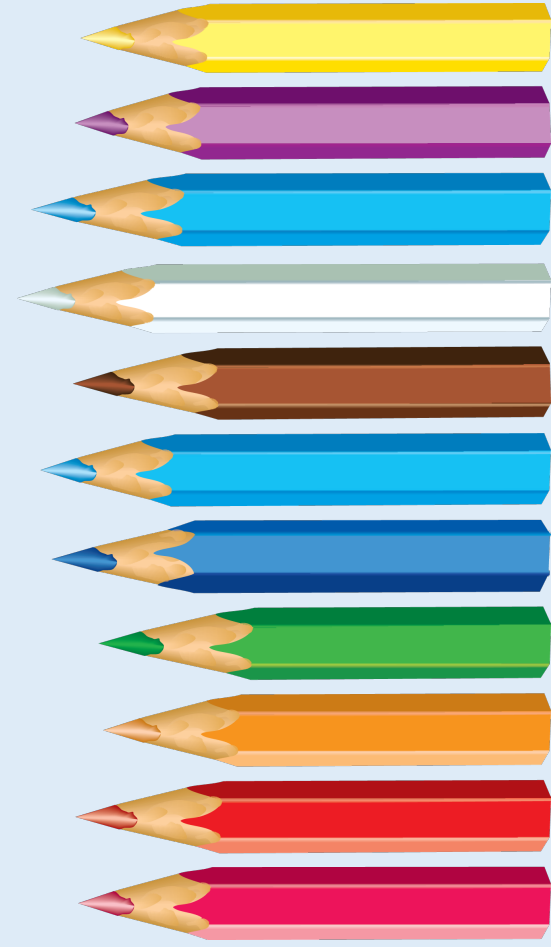
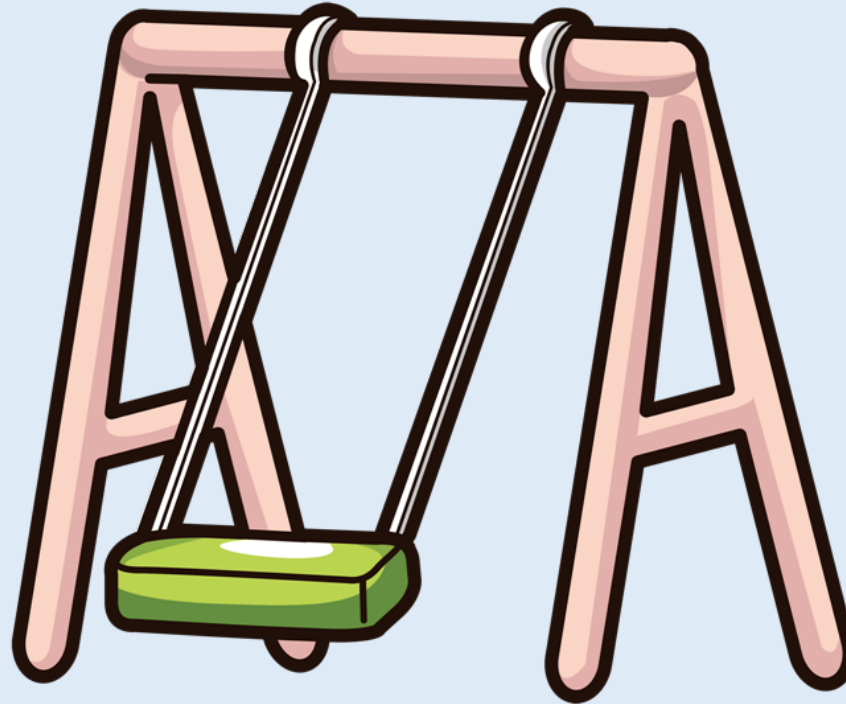
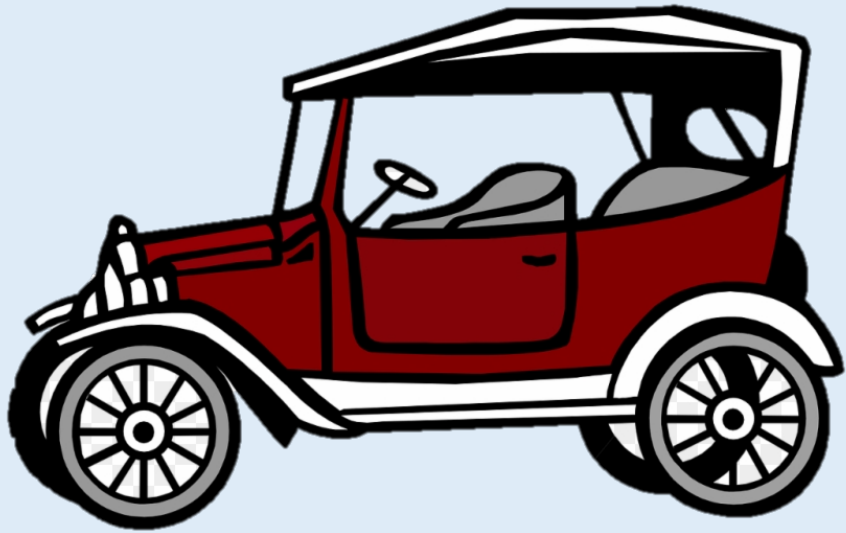
Invariantu metode

LU doktorante

Elīna Buliņa

Invarianta lieluma jēdziens

Par invariantu lielumu sauc tādu lielumu, kurš kādā procesā ir nemainīgs.



Invariantu metodes būtība

Invariantu metode bieži ir lietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu darbību izpilde ar dotajiem lielumiem, un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu **NAV** iespējams iegūt. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties pēc tālāk aprakstītā plāna.

Atrast piemērotu īpašību, kura

1. piemīt sākumā dotajiem lielumiem;
2. ir invarianta, tas ir, saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;
3. nepiemīt tam lielumam, kas būtu jāiegūst galarezultātā.

Invariants atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, paritāte (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmība ar 3, dalāmība ar 4, periodiskums.

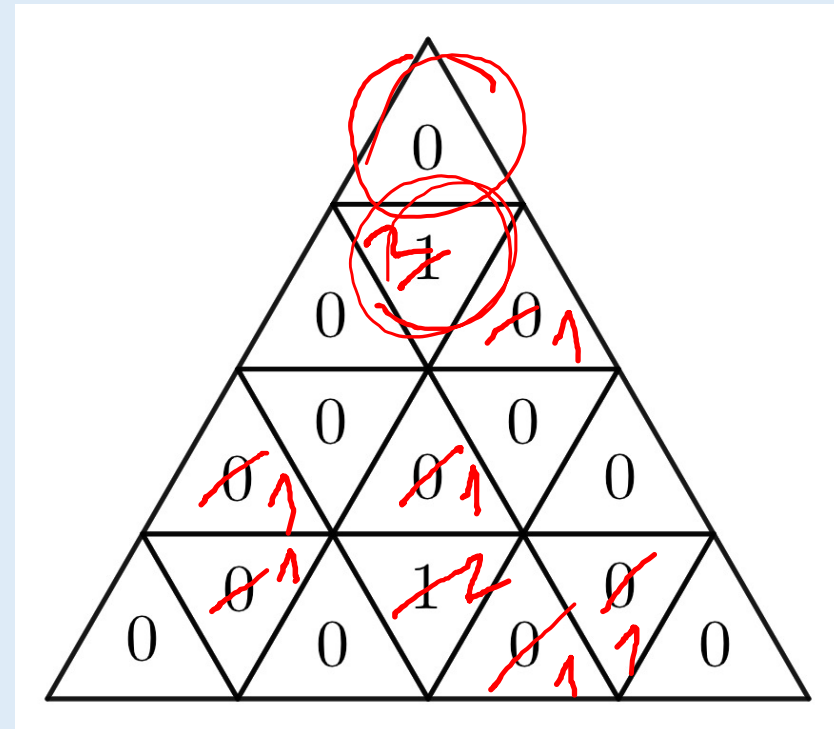
Algebriskie invarianti

UZDEVUMS

Ar vienu gājienu atļauts diviem mazajiem trijstūriem, kam kopīga mala, pieskaitīt katram 1 (skat. attēlu).

Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienu, var panākt, lai visos trijstūrīšos būtu ierakstīti vienādi skaitļi?

16 Δ

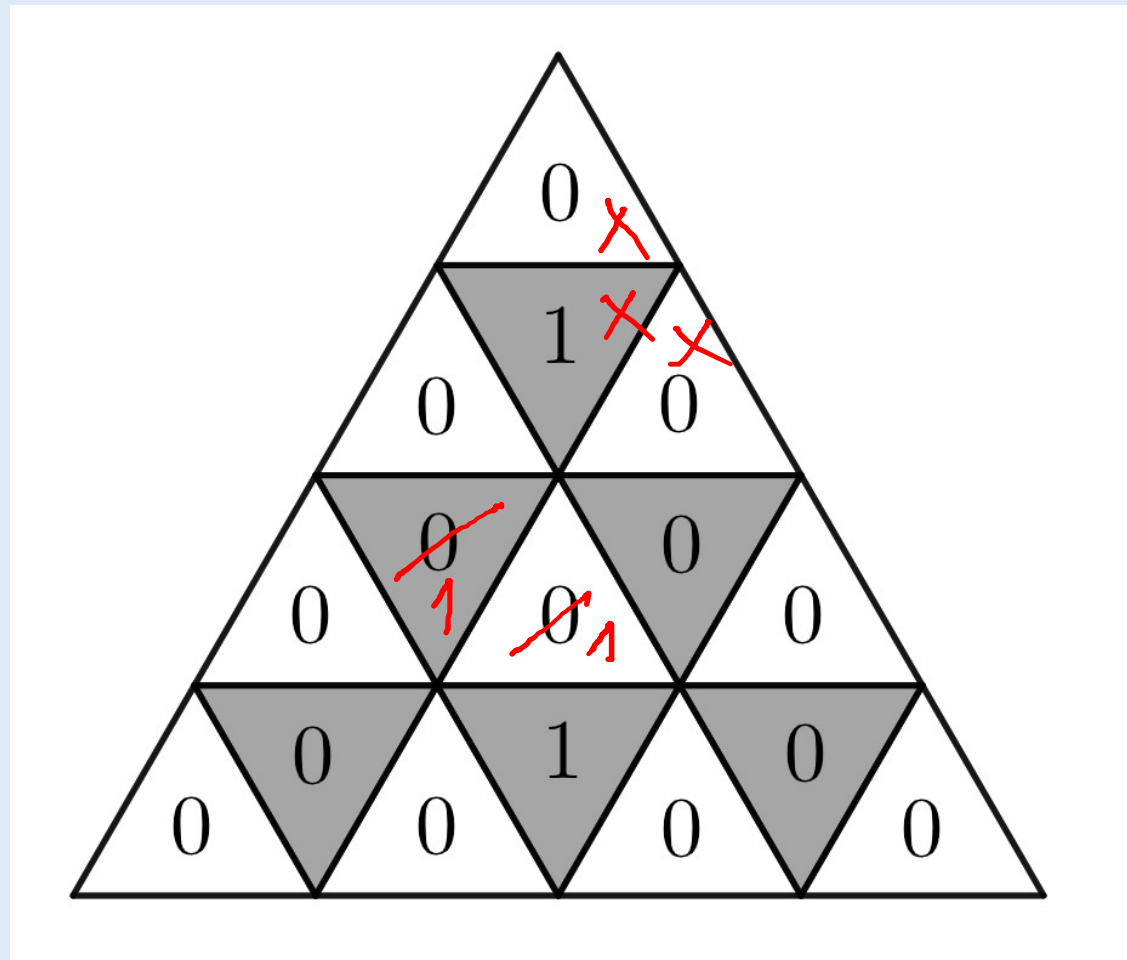


Algebriskie invarianti

RISINĀJUMS

Invariants – starpība starp melnajos un baltajos trijstūros ierakstīto skaitļu summu ir 2.

$\triangle 0$ starpība $\textcircled{2}$
 $\triangle 2$
 $\triangle +1$ $\triangle 10x$
 $\triangle +1$ $\triangle 6x$
 $10x - 6x = 4x$

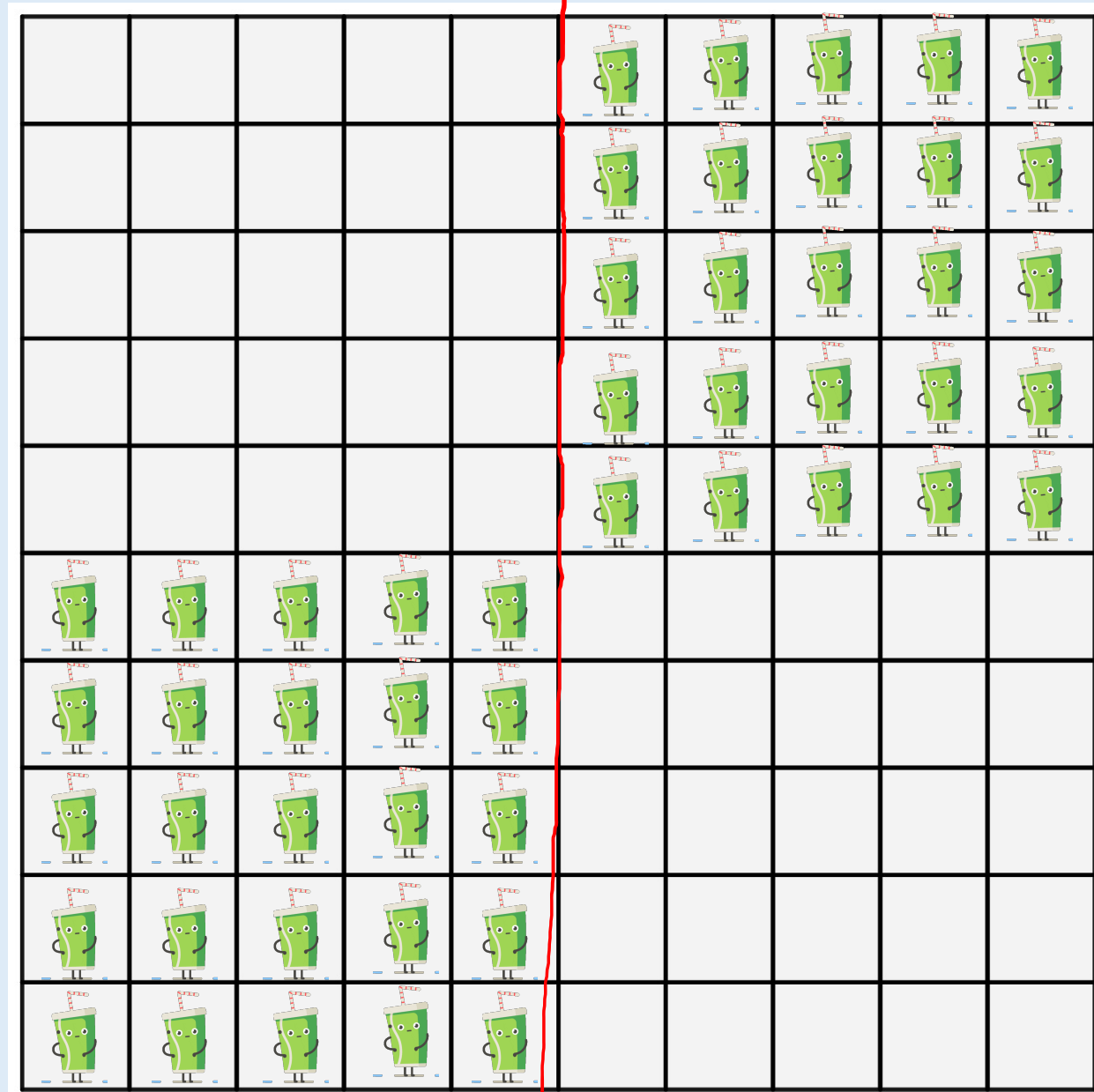


Algebriskie invarianti

Uz galdiņa, kura izmēri ir 10×10 rūtiņas, *Pifs* izvietoja 50 glāzītes, kā tas redzams attēlā. Vienā gājienā viņš var glāzīti pārlikt pāri blakus esošai glāzītei uz lauciņa (gan horizontāli, gan vertikāli, gan pa diagonāli), ja šis lauciņš brīvs.

Vai pēc vairākiem gājieniem visas glāzītes varēs atrasties vienā galdiņa pusē?





UZDEVUMS

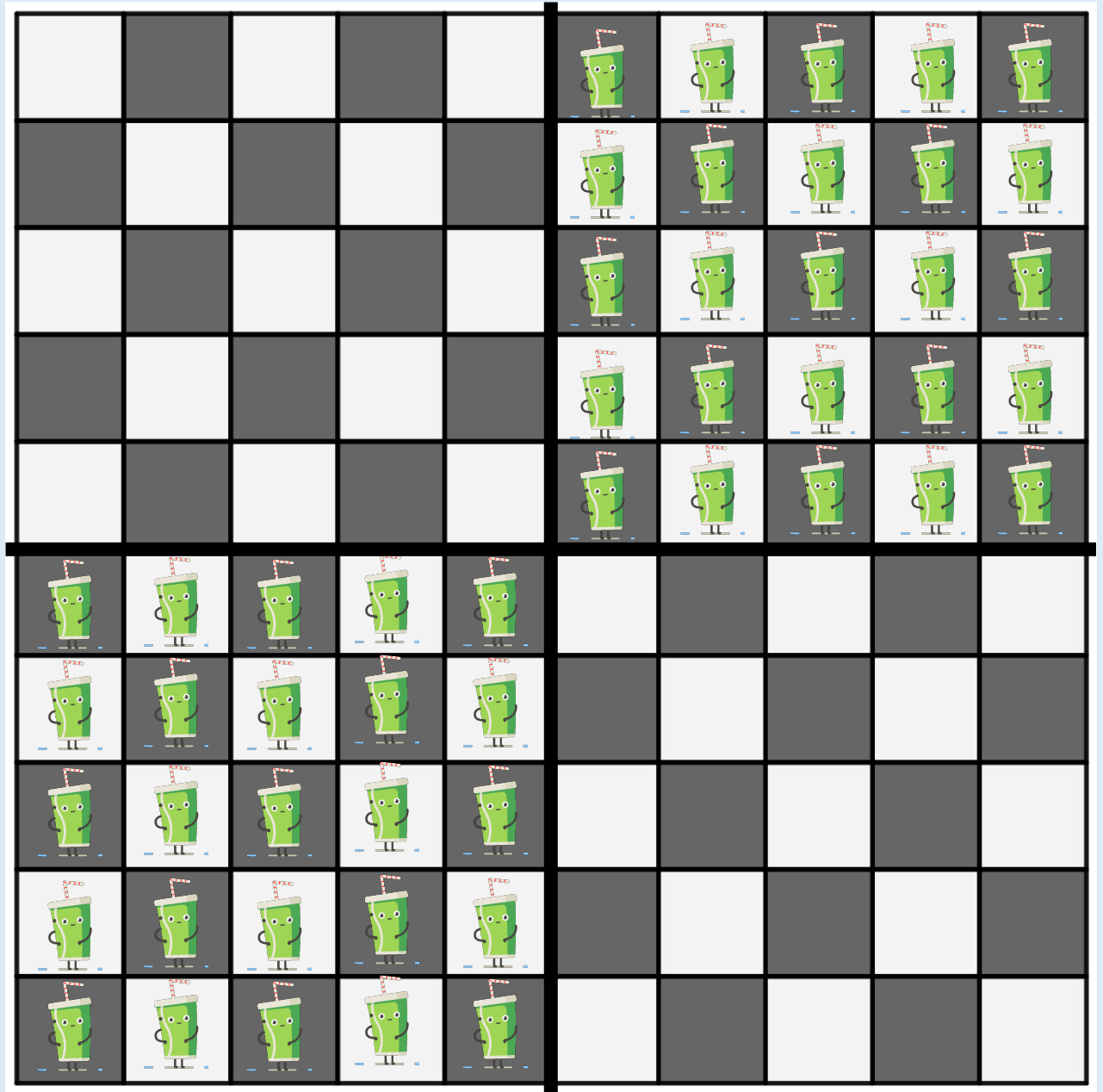


Algebriskie invarianti

Invariants – glāziņu skaits vienas krāsas rūtiņās ir nemainīgs.

RISINĀJUMS

uz  26 glāzītes
uz  24 glāzītes
Vajag lai uz  in 25
 in 25

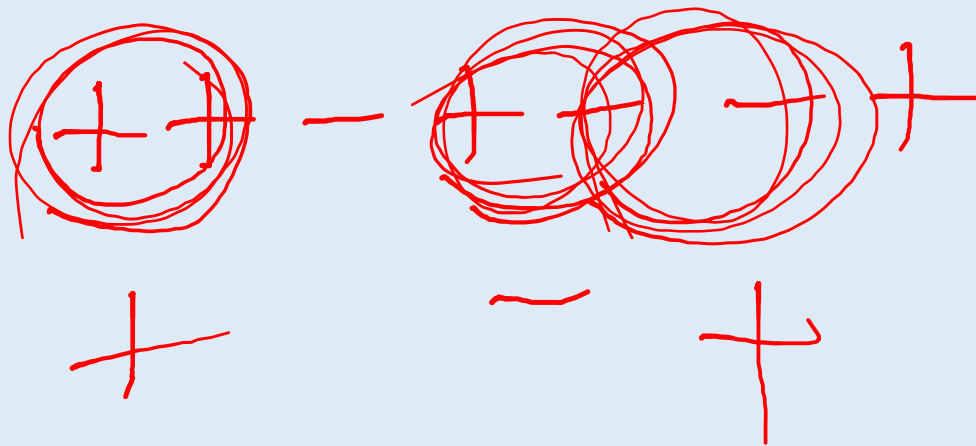


Algebriskie invarianti

UZDEVUMS

Uz tāfeles uzrakstītas vairākas «+» un «-» zīmes. Atļauts nodzēst jebkuras divas zīmes un to vietā uzrakstīt «+» zīmi, ja nodzēstās zīmes bijušas vienādas, un «-» zīmi, ja nodzēstās zīmes bijušas dažādas.

Pierādīt, ka pēdējā palikusī zīme nav atkarīga no tā, kādā secībā nodzēs zīmes.



Algebriskie invarianti

RISINĀJUMS

Invariants – visu skaitļu reizinājums nemainās

« + » \rightarrow « + 1 »

Piemēram,

+++--- - +

« - » \rightarrow « - 1 »

\Downarrow

+1; +1; +1; -1; -1; -1; -1

Algebriskie invarianti

UZDEVUMS

Trollītis *Mumins* uzrakstīja smiltīs skaitļus: 9; 11; 13; 15; 17; 19. Vienā gājienā var nodzēst jebkurus divus skaitļus un to vietā ierakstīt vienu skaitli, kas iegūts no nodzēsto skaitļu summas, pamazinot to par 1 (piemēram, ja nodzēš 11 un 19, tad ieraksta 29). Pēc vairākiem tādiem soļiem smiltīs paliks viens skaitlis.

Vai tas var būt 78?

$$9; 11; 13; 15; 17; 19$$
$$84 - 5 = 79$$

Algebriskie invarianti

Kā izmainās uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa pēc katra gājiena?

RISINĀJUMS

Algebriskie invarianti

UZDEVUMS

Uz tāfeles rindā uzrakstīti skaitļi $1, 2, 3, \dots, 2022$. Vienā gājienā atļauts nodzēst jebkurus divus blakus esošus skaitļus un to vietā uzrakstīt šo skaitļu starpību.

Vai iespējams, ka veicot atļautos gājienu, uz tāfeles paliek tikai viens vienīgs skaitlis 0?

Algebriskie invarianti

RISINĀJUMS

Invariants – skaitļu summa ir nepāra skaitlis.

$$1+2+3+\dots+2020 = \frac{(1+2022) \cdot 2022}{2} = \frac{2023 \cdot 1011}{1}$$

nepāra

$a, b, a > b$

$$(a+b) - (a-b) = a+b-a+b = 2b \text{ pāra}$$

Nepāra – pāra = nepāra

Vai kaut 0? Nē, jo 0 ir pāra

Algebriskie invarianti

UZDEVUMS

Bezgalīgu skaitļu virkni 1; 2; 3; 5; 8; 3; 1; 4; 5; 9; 4; 3; 7; 0; 7; 7; ... veido pēc šāda likuma: pirmie divi skaitļi ir 1 un 2, bet katrs nākošais skaitlis, sākot ar trešo, ir divu iepriekšējo skaitļu summas pēdējais cipars. Vai šādā skaitļu virknē kaut kur blakus atrodas skaitļi 2 un 4?

Algebriskie invarianti

RISINĀJUMS

Invariants – virknē periodiski atkārtojas grupa (n,p,n) .

1, 2, 3, 5, 8, 3 ; 1, 4, 5 ; 9, 4 ; 3 ; 7, 0 ; 7, 7, 4 ; ...
n p n p n n p n n p

n, p, n
Invarianti

2, 2, 4
p p p
Naw
Hespejans

Algebriskie invarianti

UZDEVUMS

Ar naturālu skaitli drīkst izdarīt šādas operācijas:

- a) reizināt ar 2;
- b) dalīt ar 2, ja skaitlis ir pāra skaitlis;
- c) pierakstīt galā to pašu skaitli (piemēram, ar šo operāciju no skaitļa 2021 var iegūt skaitli 20212021).

Vai ar šīm operācijām, izdarot tās vairākas reizes, no skaitļa 24 var iegūt skaitli 2021?

Algebriskie invarianti

RISINĀJUMS

Invariants – dalāmība ar 3.

$$3k \cdot 2 = 6k$$

$$3k : 2$$

pare

3k

12 12

2021 medaļos
ar 3

Nīvar

Algebriskie invarianti

UZDEVUMS

Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2016. Ar vienu gājienu tam var vai nu pieskaitīt 12, vai atņemt 18. Vai, daudzkārt izdarot šādus gājienus, var iegūt skaitli 1000?

Algebriskie invarianti



Sākumā dotais skaitlis ir pāra skaitlis. Gan 12, gan 18 arī ir pāra skaitļi. Pāra skaitlim pieskaitot vai no tā atņēmot pāra skaitli, iegūst pāra skaitli. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai pāra skaitļi. Arī beigās iegūstamais skaitlis 1000 ir pāra skaitlis. Tātad to **var** iegūt ar norādītajām darbībām.

Bieži sastopama kļūda!!!

Ja izdodas atrast īpašību, kas

- **piemīt** sākumā dotajiem lielumiem,
- ir invarianta, t. i., **saglabājas**, veicot pieļaujamās operācijas,
- **piemīt** tiem lielumiem, kuri jāiegūst galarezultātā,

tad no tā vien **nevar secināt**, ka galarezultātā vajadzīgos lielumus tiešām var iegūt.

Šādos gadījumos uzdevuma risināšanai jāmeklē citi ceļi - varbūt citi invarianti, varbūt veids, kā iegūt vajadzīgo galarezultātu utt.

Algebriskie invarianti



Sākumā dotais skaitlis dalās ar 3. Gan 12, gan 18 arī dalās ar 3. Ja skaitlim, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, tad atkal iegūst skaitli, kas dalās ar 3. Tātad uz tāfeles visu laiku parādīsies tikai tādi skaitļi, kas dalās ar trīs. Bet beigās iegūstamais skaitlis 1000 ar 3 nedalās. Tātad to **nevar** iegūt ar norādītajām darbībām.

Invariantu metode

LU doktorante

Elīna Buliņa