Gadījuma klejošana

Elīna Kresse

06.02.2020

Latvijas Universitātes Fizikas, Matemātikas un Optometrijas fakultāte

Pamatjēdzieni

- **Notikums** - jebkurš fakts, kas eksperimenta rezultātā vai nu realizējas, vai nē.
  A - notikums, ka metot monētu uzkritīs cipars

- Par notikuma A **pretējo notikumu** sauc notikumu $\overline{A}$.
  A - notikums, ka metot monētu uzkritīs cipars, $\overline{A}$ - uzkrīt ģērbonis

- $A \cup B$ - notikumu **apvienojums**. Realizējas vismaz viens no notikumiem (A **vai** B)
- $A \cap B$ - notikumu **šķēlums**. Realizējas abi notikumi (A **un** B)

Pamatjēdzieni

- Divus notikumus sauc par **neatkarīgiem**, ja viena notikuma īstenošanās neietekmē otra notikuma īstenošanos.
  Ja notikumi ir neatkarīgi, tad
  $$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$
- Divus notikumus sauc par **nesavienojamiem**, ja katru reizi var iestāties tikai viens no viņiem.
  Ja notikumi ir nesavienojami, tad
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Par **nosacīto** varbūtību notikumam A, pie nosacījuma, ka ir realizējies notikums B, sauc $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$.

Vienkāršа gadījuma klejošana

Gadījuma klejošanas procesu veido $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, kur

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

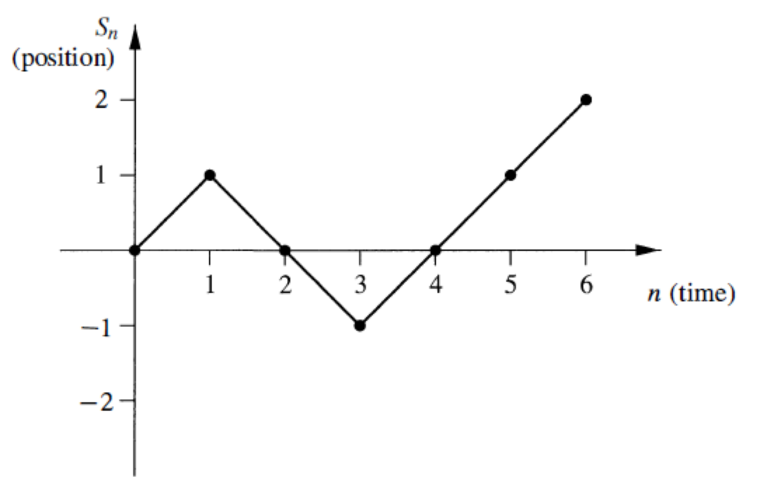
$P(X_i = 1) = p$

$P(X_i = -1) = q = 1 - p$

$S_0 = X_0 = 0$

$X_1, \dots X_n$ ir neatkarīgi, vienādi sadalīti gadījuma lielumi

Piezīme. Gadījuma klejošana ir simetriska, ja $p = q = \frac{1}{2}$.



S_n
(position)
2
1
−1
−2
1
2
3
4
5
6
n (time)

Vienkārša gadījuma klejošana

Vienkāršai gadījuma klejošanai ir spēkā:

- ja $k < -n$ vai $k > n$, tad $P(S_n = k) = 0$;
- ja $n + k$ ir nepāra, tad $P(S_n = k) = 0$;
- ja $n + k$ ir pāra, tad $P(S_n = k) = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$,

kur k - sasniedzamais punkts un n - kopējais soļu skaits.

Vienkārša gadījuma klejošana

k - sasniedzamais punkts, n - kopējais soļu skaits
i - soļu skaits un leju, j - soļu skaits uz augšu

$$\begin{cases} i + j = n \\ -i + j = k \end{cases}$$

$$j = \frac{n+k}{2}, i = \frac{n-k}{2}$$

$$P(S_n = k) = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^j q^i = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

Ja $p = q = \frac{1}{2}$, tad $P(S_n = k) = C_n^{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Vienkārša gadījuma klejošana

Piemērs. Kāda varbūtība, ka simetriskas gadījuma klejošanas process pēc 4 soļiem nonāks punktā 0?

1	2	3	4	k
+	-	+	-	0
+	+	-	-	0
-	-	+	+	0
-	+	-	+	0
-	+	+	-	0
+	-	-	+	0
+	+	+	+	4
-	-	-	-	-4
+	+	+	-	2
+	+	-	+	2
+	-	+	+	2
-	+	+	+	2
-	-	-	+	-2
-	-	+	-	-2
-	+	-	-	-2
+	-	-	-	-2

$$P(S_4 = 0) = C_4^{\frac{4+0}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

Vienkārša gadījuma klejošana

Piemēri. Simetriska gadījuma klejošana.

Kāda varbūtība, ka process pēc 4 soļiem nonāks punktā 4?

$P(S_4 = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

Kāda varbūtība, ka process pēc 5 soļiem nonāks punktā 2?

$P(S_5 = 2) = 0$

Spēlmaņa bankrots (Gambler's ruin)

Spēlmanis grib iegūt naudas summu N. Sākumā viņam ir k naudas vienības $0 < k < N$. Viņš met kapeiku un ja uzkrīt cipars, tad saņem vienu naudas vienību, bet ja ģerbonis, tad vienu naudas vienību atdod. Kāda ir varbūtība, ka spēlmanis bankrotēs?

Spēlmaņa bankrots (Gambler's ruin)

A - notikums, ka bankrotēs;
B - notikums, ka pirmo reizi uzkrīt cipars;
$P_k(A)$ - varbūtība, ka bankrotēs, ja sākotnēji spēlmanim būs k naudas vienības

$$P_k(A) = P_k(A|B)P(B) + P_k(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

Spēlmaņa bankrots (Gambler's ruin)

$$P_k(A) = P_k(A|B)P(B) + P_k(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

Apskatām varbūtību $P_k(A|B)$. Ja pirmais uzkrīt cipars, tad kopējā naudas summa pieaug līdz $k+1$, tātad $P_k(A|B) = P_{k+1}(A)$ un analoģiski $P_k(A|\overline{B}) = P_{k-1}(A)$. Apzīmējot $P_k(A)$ ar p_k, iegūstam

$$p_k = \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1}), 0 < k < N.$$

$p_0 = 1$ (varbūtība bankrotēt, ja spēlmanim ir 0 naudas vienības)
$p_N = 0$ (varbūtība bankrotēt, ja spēlmanim ir N naudas vienības)

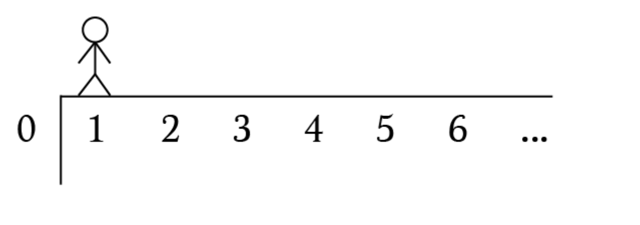
Spēlmaņa bankrots (Gambler's ruin)

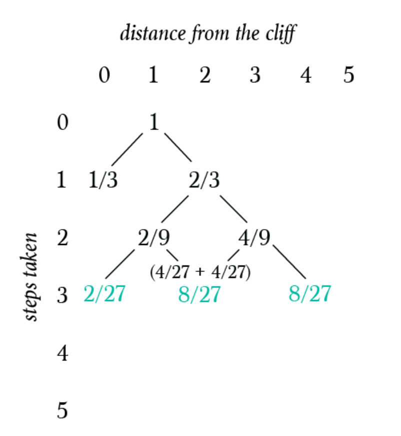
$$p_k = \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1}), 0 < k < N.$$

Apzīmēsim: $b_k := p_k - p_{k-1} => b_k = b_{k-1} = ... = b_1$, jo
$2p_k = p_{k+1} + p_{k-1}$
$p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k$

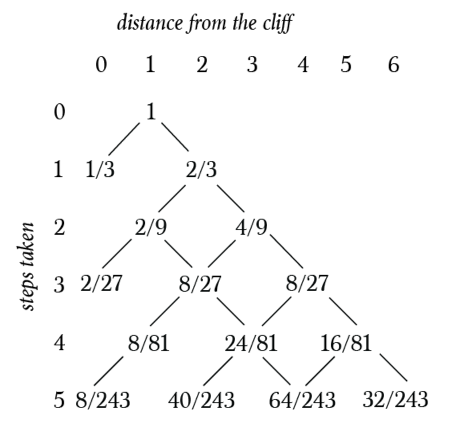
Tad $p_k = b_k + p_{k-1} = b_1 + p_{k-1} = 2b_1 + p_{k-2} = ... = kb_1 + p_0$
Aplūkojam $p_N = Nb_1 + 1 = 0 => b_1 = -\frac{1}{N} => P_k(A) = 1 - \frac{k}{N}$

Ja $N \to \infty$, tad varbūtība bankrotēt $P_k(A) \to 1$, Kāds vīrs stāvēja viena soļa attālumā no klints malas. Vīrs veica nejaušus soļus uz priekšu un atpakaļ. Katrā solī ar varbūtību $\frac{2}{3}$ vīrs veica soli atpakaļ un ar varbūtību $\frac{1}{3}$ soli uz priekšu. Kāda ir varbūtība, ka vīrs nepārkritīs pār klints malu?



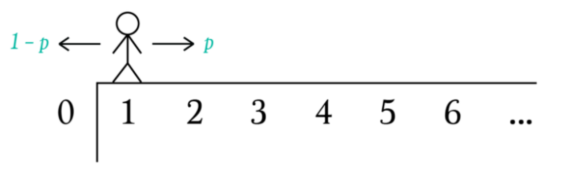


Pēc trim soļiem vīrs pārkritīs pār klints malu ar varbūtību $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{11}{27}$ (40.7%).



Pēc pieciem soļiem vīrs pārkritīs pār klints malu ar varbūtību $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{8}{243} = \frac{107}{243}$ (44%).

Pieņemsim, ka varbūtība doties pa labi ir p un pa kreisi $1-p$, kur $0 < p < 1$.



Apzīmēsim varbūtību pārkrist pār klinti ar P_1.
Varbūtība P_1 ir

- varbūtība pārkrist jau pirmajā solī pār klinti, kas ir $1-p$

vai

- varbūtība pirmajā solī doties prom no klints (p) un varbūtība P_2 - pārkrist pār klinti, ja vīrs atrodas vismaz divu soļu attālumā no klints

Apkopojot doto informāciju, iegūstam, ka

$$P_1 = (1 - p) + (pP_2)$$

P_2 ir varbūtība nokrist no klints, ja vīrs ir divu soļu attālumā no tās, tātad viņam būtu jāpārvietojas no $2 \to 1$ un no $1 \to 0$. Tā kā vīra soļi ir neatkarīgi, tad pārejai $2 \to 1$ ir tāda pati varbūtība kā pārejai $1 \to 0$, kas ir P_1. Kopējā varbūtība šiem diviem soļiem ir $P_1 * P_1 = P_1^2$. Aizstājot P_2 ar P_1^2, iegūstam

$$P_1 = (1 - p) + (pP_1^2)$$

Atrisinot kvadrātvienādojumu pēc P_1

$$P_1 = (1 - p) + (pP_1^2)$$

iegūstam, ka

$$P_1 = 1 \quad vai \quad P_1 = \frac{1 - p}{p}$$

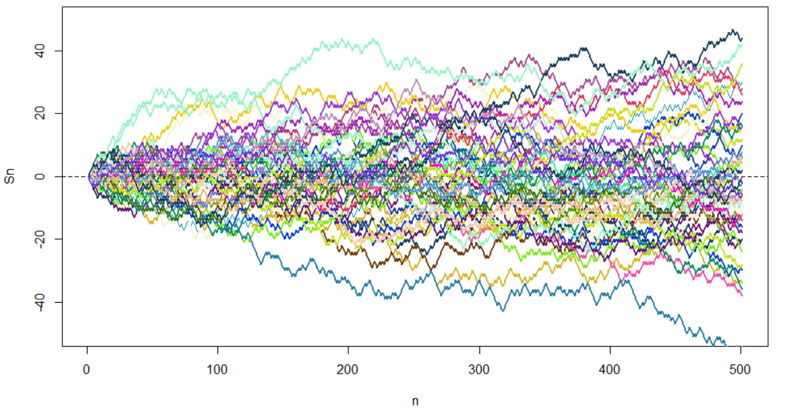
Jānosaka, kādām p vērtībām atbilsts katra no saknēm. Zinām, ka vērtība $P_1 \leq 1$, tātad

$P_1 = 1$, ja $p < \frac{1}{2}$

$P_1 = \frac{1-p}{p}$, ja $p \geq \frac{1}{2}$.

Atcerēsimies, ka vīrs spēra soli prom no klints ar varbūtību $\frac{2}{3}$. Ievietojot iegūtajā formulā šo vērtību, iegūstam, ka varbūtība pārkrist pār klinti ir

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$



Sn
40
20
0
-20
-40
0
100
200
300
400
500
n

Paldies par uzmanību!