Dirihlē princips

Mazās matemātikas universitātes 4. nodarbība

Ilze Veinberga

Cik no jums noteikti ir piedzimuši vienā nedēļas dienā?

Dirihlē princips – 1. teorēma

Piemērs: Ilzei ir 3 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai starp šiem būriem ir tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši?

Ja vairāk nekā n truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens (tātad vismaz 2) truši.

Ja vairāk nekā n priekšmeti jāsadala n grupās, tad noteikti būs tāda grupa, kurā atradīsies vismaz 2 priekšmeti.

Dirihlē princips – 1. teorēmas pierādījums

Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk par vienu priekšmetu. Tā kā pavisam ir n *grupu, tad tajās nav izvietoti vairāk par* n *priekšmetiem. Bet mums jāsadala grupās vairāk ne kā* n *priekšmeti. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs. Tātad ir grupa, kurā ir vairāk nekā viens priekšmets, t.i., vismaz divi priekšmeti.*

1. uzdevums: Antropologi ir konstatējuši, ka cilvēka matu skaits nevar būt lielāks par 500 000. Pierādīt, ka Rīgā dzīvo vismaz 2 cilvēki ar vienādu matu skaitu! (Rīgā dzīvo ~ 630 000 cilvēku)

2. uzdevums: Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 8. Pierādīt, ka, izvēloties jebkurus piecus no tiem, varēs atrast tādus divus, kuru summa ir 9.

3. uzdevums: *Pierādīt, ka starp jebkuriem sešiem naturāliem skaitļiem, kas nedalās ar 10, var atrast divus tādus, kuru summa vai starpība dalās ar 10*

Dirihlē princips – 2. teorēma

<u>Piemērs</u>: Ilzei ir 5 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai starp šiem būriem ir tāds būris, kurā atrodas vismaz trīs truši?

Ja vairāk nekā $\mathrm{m} \cdot n$ truši jāizvieto n būros, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā $(m+1)$ truši.

Ja vairāk nekā $m \cdot n$ priekšmeti jāsadala n grupās, tad noteikti būs grupa, kurā atradīsies vismaz $m+1$ priekšmets.

Dirihlē princips – 2. teorēmas pierādījums

Pieņemsim pretējo, ka nevienā grupā nav vairāk kā m *objekti. Tā kā grupu pavisam ir* n*, tad kopā nav izvietoti vairāk kā* $m \cdot n$ *objekti, bet grupās ir jāsadala vairāk nekā* $m \cdot n$ *objekti. Tātad pieņēmums ir aplams un noteikti ir grupa, kurā ir vairāk nekā* m*, tas ir, vismaz* $(m+1)$ *objekts.*

4. uzdevums: Namā dzīvo 162 cilvēki. Nevienam no tiem nav vairāk kā 79 gadi.

a) Kāds ir lielākais skaits iedzīvotāju, kuriem noteikti ir vienāds gadu skaits (pilnos gados)?

4. uzdevums: Namā dzīvo 162 cilvēki. Nevienam no tiem nav vairāk kā 79 gadi.

b) Vai var apgalvot, ka šajā namā dzīvo vismaz viens cilvēks, kuram ir 12 gadi?

<u>4. uzdevums</u>: Namā dzīvo 162 cilvēki. Nevienam no tiem nav vairāk kā 79 gadi.

c) Vai var būt tā, ka šajā namā dzīvo tikai piecu dažādu vecumu cilvēki (pilnos gados)?

5. uzdevums: Skolā ir 36 klases un 1045 skolēni. Vai var gadīties, ka nevienā klasē nav ne 30, ne vairāk skolēnu?

<u>6. uzdevums</u>: Pierādīt, ka starp jebkuriem 35 divciparu skaitļiem var atrast trīs tādus skaitļus, kuru ciparu summas būtu vienādas!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

<u>7. uzdevums</u>: No pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem izvēlēts 51 skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus, no kuriem viens dalās ar otru!

8. uzdevums: Pierādīt, ka, izvēloties 52 no aritmētiskās progresijas 1, 4, 7, 10, … locekļiem, kas nepārsniedz 300, vienmēr starp šiem skaitļiem var atrast divus skaitļus, kuru summa ir 302.

9. uzdevums: Pierādīt, ka no septiņiem patvaļīgiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru kvadrātu starpība dalās ar 11.

$n \ (mod\ 11)$										
$n^2 \ (mod\ 11)$										

Paldies par šodien paveikto!