Funkcijas matemātikas olimpiādēs

16.01.2021.

Maruta Avotiņa

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

Novada olimpiādes tēma 7.-12. klasei

Lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas

http://nms.lu.lv/olimpiades/valsts/

Valsts olimpiādes 2. posms (Novada olimpiāde)	5.-8. klasei **26.02.2021.** (*tiešsaistē*)			Tēma: 5.-6. klasei "**Eilera diagrammas**", 7.-12. klasei "**Lineāras funkcijas un kvadrātfunkcijas**". Olimpiādes kārtība 9.-12. klasei [pdf] Informācija par olimpiādi 5.-8. klasei [pdf]
	9.-12. klasei **29.01.2021.** (*tiešsaistē*)			

Kvadrātfunkcija $y = ax^2 + bx + c$

Zari vērsti uz augšu, ja $a > 0$, zari vērsti uz leju, ja $a < 0$

Grafiks krusto ordinātu asi punktā $(0; c)$

Parabolas virsotne ir punktā $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Ja $D > 0$, tad grafiks krusto x asi divos punktos

Ja $D < 0$, tad grafiks nekrusto x asi

Ja $D = 0$, tad grafiks pieskaras x asij

Sasniedzamie rezultāti

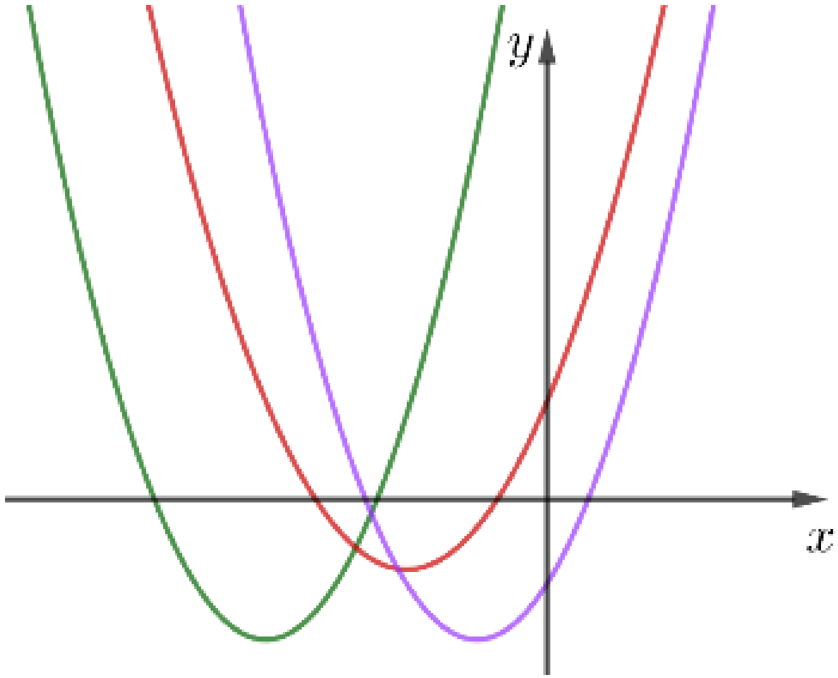
- Pēta un raksturo funkcijas grafika novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no koeficientu vērtībām.
- No funkcijas grafika nolasa dažādu informāciju par funkciju.
- No funkcijas grafika nolasa vienādojuma atrisinājumu un izmanto iegūto informāciju tālākos spriedumos.
- Izmanto dažādas funkciju īpašības (tai skaitā, nepārtrauktību) uzdevumu risināšanā.

Funkcijas

- Informācijas nolasīšana no funkcijas grafika
- Funkciju grafiku krustpunkti
- Funkcijas nulles jeb funkcijas saknes
- Funkcijas īpašību izmantošana

Informācijas nolasīšana no funkcijas grafika

1. Vai var gadīties, ka attēlā doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki? Grafiki nav doti mērogā.



Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde

„Vai var...?”; „Vai iespējams...?”; „Vai eksistē...?”

Ja atbilde ir

- **„jā”**, tad pietiek uzrādīt vienu piemēru, kurā visas uzdevuma prasības ir izpildītas;
- **„nē”**, tad nepieciešams pierādījums, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

Uzdevumu veidi

Kāds var būt? Cik var būt?

- *Visas iespējamās vērtības*
- *Pamatojums, ka citu nav*

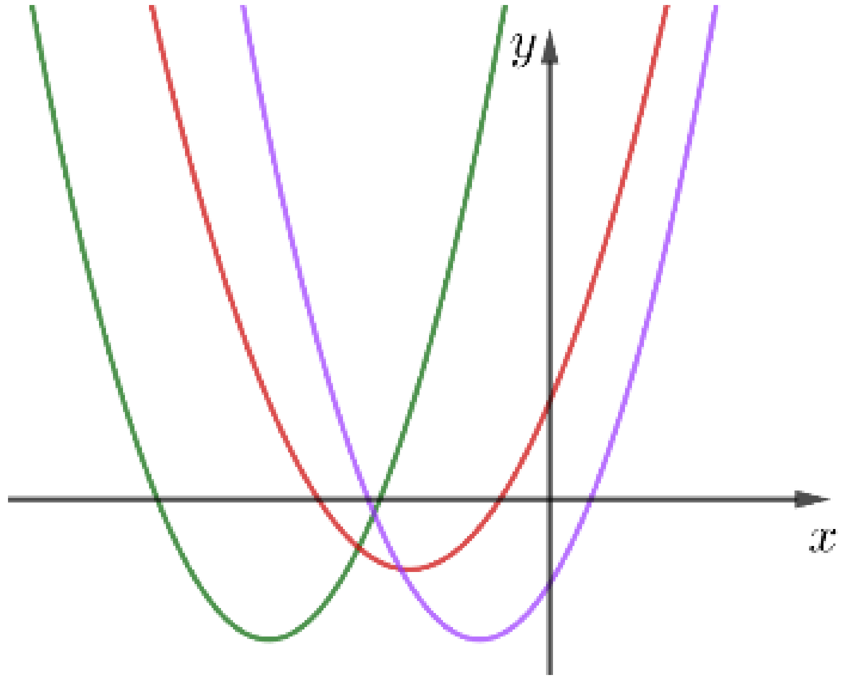
Vai... ?

- **Vai iespējams? Vai eksistē?**
  - *Jā + piemērs*
  - *Nē + pierādījums, kāpēc nē*
- **Vai vienmēr? Vai katram? Vai noteikti?**
  - *Jā + pierādījums*
  - *Nē + pretpiemērs*

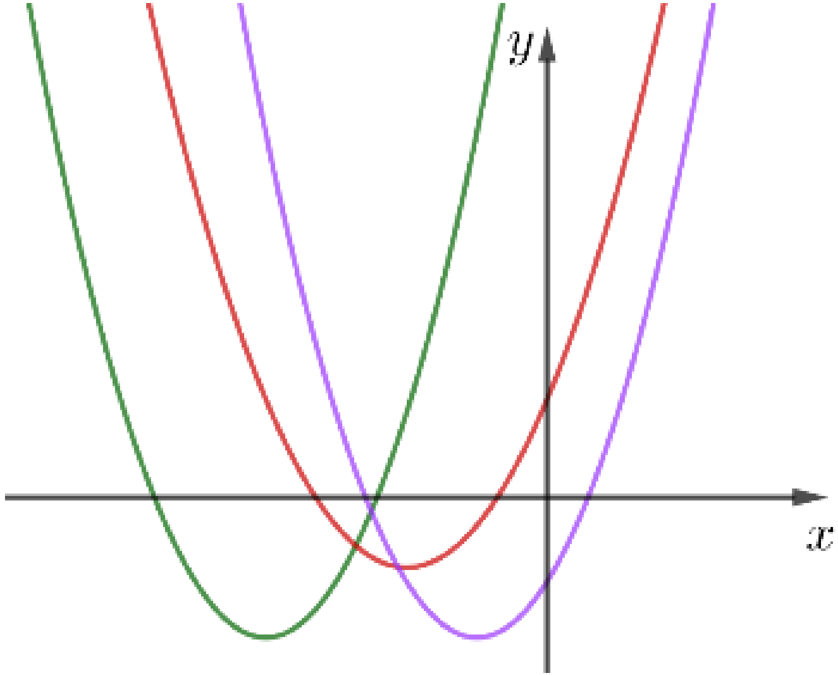
Kāds ir lielākais? Kāds ir mazākais?

- *Lielākā/mazākā vērtība*
- *Pierādījums, ka vēl lielāka/mazāka vērtība nevar būt*

1. Vai var gadīties, ka attēlā doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki? Grafiki nav doti mērogā.



1. Vai var gadīties, ka attēlā doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki? Grafiki nav doti mērogā.

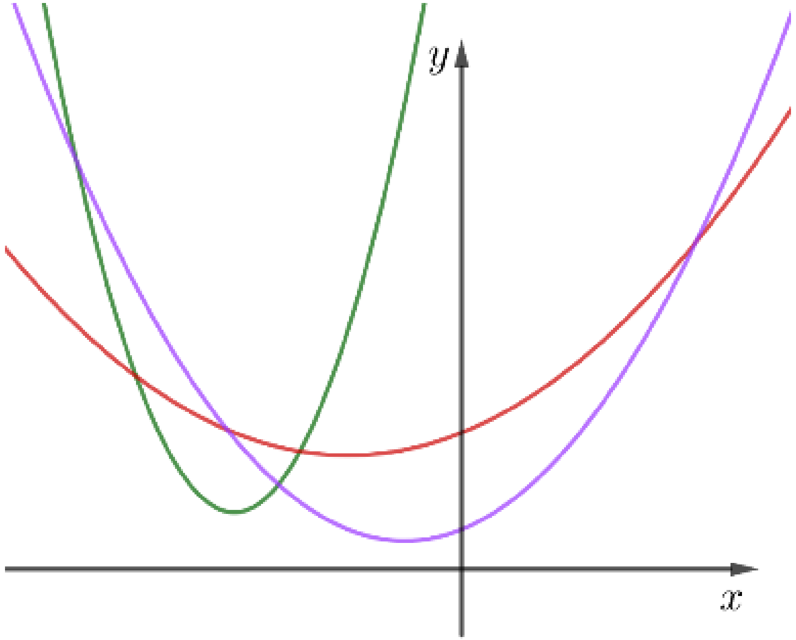


Atrisinājums

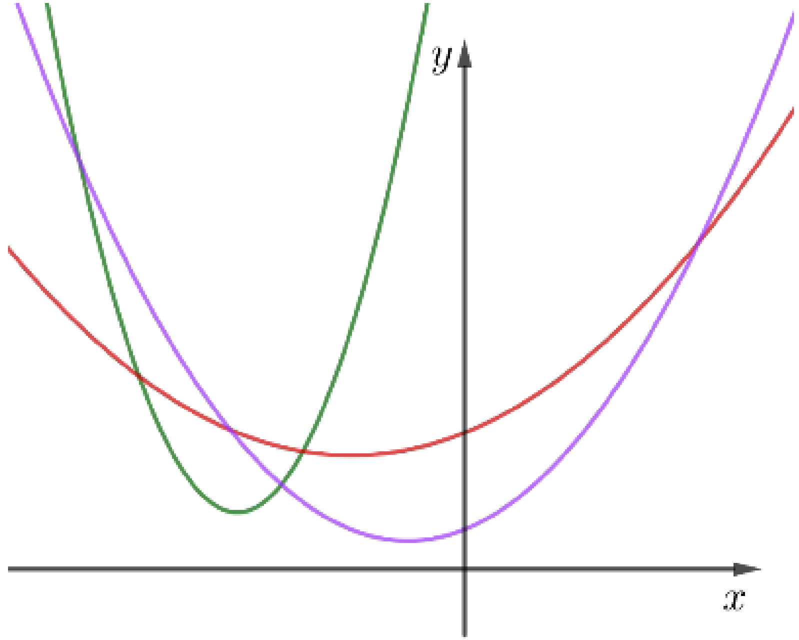
Nē, nevar.

Tā kā visām parabolām zari vērsti uz augšu, tad $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, bet tādā gadījumā neviena no parabolām nevar krustot y asi punktā, kuram $y < 0$ (lillā grafiks).

2. Pieņemsim, ka attēlā dotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki, tie nav doti mērogā. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



2. Pieņemsim, ka attēlā dotās līknes ir kvadrātfunkciju grafiki, tie nav doti mērogā. Vai tie var būt funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ un $y = cx^2 + ax + b$ grafiki?



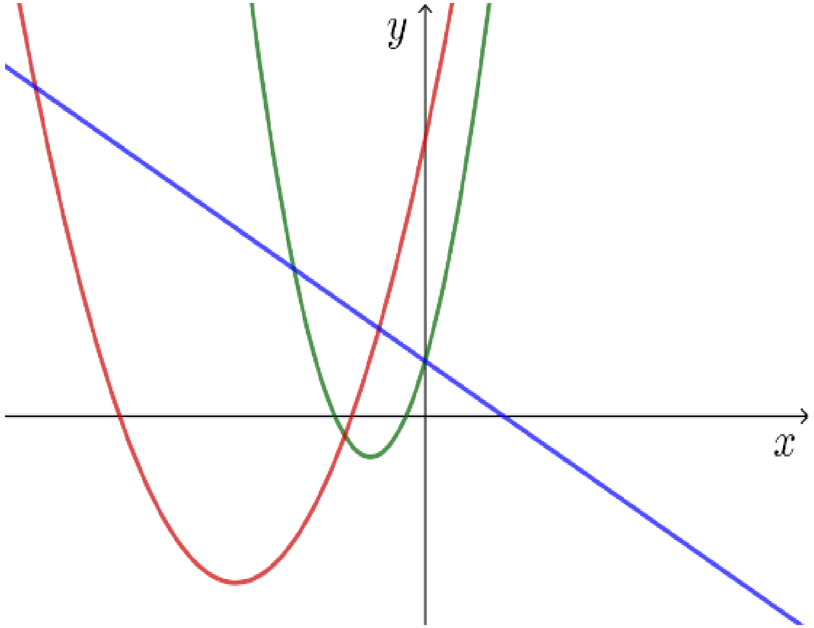
Atrisinājums

Nē, nevar.

Ievērojam, ka zīmējumā redzami visi seši iespējamie parabolu krustpunkti, tātad citu krustpunktu nav, taču visu doto funkciju vērtības sakrīt, ja $x = 1$.

Tā kā dotie trīs grafiki neiet caur vienu punktu, tad tie nevar būt uzdevumā doto funkciju grafiki.

3. Vai var gadīties, ka attēlā ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki? Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.



Funkciju grafiku krustpunkti

4. Aplūkosim lineāras funkcijas $y = ax + b$, kur $2a + b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!

5. Apskatām funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur a un b ir reāli skaitļi, pie tam $a + b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

6. Aplūkosim funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur $a + 2b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

6. Aplūkosim funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur $a + 2b = 2020$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti!

Atrisinājums

Ievērojam:

- ja $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tad $y = a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + b = \left(\frac{1}{2}a + b\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1010 + \frac{1}{\sqrt{2}}$,
- ja $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, tad $y = a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + b = \left(\frac{1}{2}a + b\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1010 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tātad punkti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \mathbf{1010} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \mathbf{1010} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ir kopīgi visu doto funkciju grafikiem.

Bolcano-Koši teorēma

Ja funkcija f ir intervālā $[a; b]$ nepārtraukta funkcija un tās vērtības galapunktos ir dažādzīmju skaitļi (tas ir, $f(a) < 0$ un $f(b) > 0$ vai arī $f(a) > 0$ un $f(b) < 0$), tad intervālā $(a; b)$ eksistē tāds skaitlis k, ka $f(k) = 0$.

7. Dots, ka a, b, c ir dažādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka vienādojumam

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$$

ir divas dažādas saknes.

7. Dots, ka a, b, c ir dažādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka vienādojumam

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$$

ir divas dažādas saknes.

Atrisinājums

Nezaudējot vispārīgumu (simetrijas dēļ), varam pieņemt, ka $a > b > c$.

Apskatām funkciju $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)$ un aprēķinām funkcijas vērtību dažos punktos:

- $f(a)=(a-b)(a-c)>0$;
- $f(b)=(b-a)(b-c)<0$;
- $f(c)=(c-a)(c-b)>0$.

Tā funkcija f ir kvadrātfunkcija, tad tā ir nepārtraukta, līdz ar to tā krusto x asi intervālā $(b; a)$ un arī intervālā $(c; b)$. Tātad dotajam vienādojumam ir divas dažādas saknes.

8. Dots, ka a, b, c ir kāda trijstūra malu garumi. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2 + bx - c = 0$ intervālā $(0; 1)$ ir tieši viena sakne.

Atrisinājums

Tā kā a, b, c ir trijstūra malu garumi, tad $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Apskatām kvadrātfunkciju $f(x) = ax^2 + bx - c$ un tās vērtību divos punktos:

- $f(0) = -c < 0$;
- $f(1) = a + b - c > 0$ (trijstūra nevienādība $a + b > c$).

Tā kā $f(0) \cdot f(1) < 0$, tad intervālā $(0; 1)$ eksistē tāda x vērtība, ka $f(x) = 0$ jeb kvadrātvienādojumam $ax^2 + bx - c = 0$ intervālā $(0; 1)$ ir vismaz viena sakne.

Pamatosim, ka kvadrātvienādojuma otra sakne ir negatīva, tātad tā nebūs intervālā $(0; 1)$. Pēc Vjeta teorēmas dotā kvadrātvienādojuma sakņu reizinājums ir $-\frac{c}{a} < 0$, jo a un c ir pozitīvi skaitļi.

9. Dots, ka $a \neq 0$, $a + b + c < 0$ un $4a + 2b + c > 0$. Pierādīt, ka

$b^2 - 4ac > 0$.

9. Dots, ka $a \neq 0$, $a + b + c < 0$ un $4a + 2b + c > 0$. Pierādīt, ka $b^2 - 4ac > 0$.

Atrisinājums

Apskatām kvadrātfunkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ievērojam, ka pēc dotā:

- $f(1) = a + b + c < 0$,
- $f(2) = 4a + 2b + c > 0$.

Tā kā kvadrātfunkcija ir nepārtraukta funkcija, tad intervālā $(1; 2)$ tā krusto x asi, tātad diskriminants ir pozitīvs, tas ir, $D > 0$ jeb $b^2 - 4ac > 0$.

10. Dots, ka $a^2 + ab + ac < 0$. Pierādīt, ka $b^2 > 4ac$.

10. Dots, ka $a^2 + ab + ac < 0$. Pierādīt, ka $b^2 > 4ac$.

Atrisinājums

Aplūkojam kvadrātfunkciju $f(x) = cx^2 + bx + a$. Ievērojam, ka

$$a^2 + ab + ac = a(a + b + c) = f(0) \cdot f(1).$$

No dotā izriet, ka $f(0) \cdot f(1) < 0$, tātad kvadrātfunkcija krusto x asi.

Līdz ar to kvadrātfunkcijai ir divas saknes un tās diskriminants ir pozitīvs, tas ir,

$D = b^2 - 4ac > 0$ jeb $b^2 > 4ac$.