MĀJAS DARBS

1. Sadali reizinātājos!

a) $x^3+2x^2-9x-18$

b) x^3+4x^2+x-6

c) $x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72$

Atrisinājums

a) Lai sadalītu polinomu $x^3+2x^2-9x-18$ reizinātājos, izmantosim Hornera shēmu. Pārbaudīsim, vai skaitlis -2 ir polinoma sakne.

	1	**2**	$-\mathbf{9}$	$-\mathbf{18}$
$-\mathbf{2}$	1	$(-2)\cdot 1+2=0$	$(-2)\cdot 0-9=-9$	$(-2)\cdot(-9)-18=0$

Iegūstam, ka skaitlis -2 ir dotā polinoma sakne. Līdz ar to

$$x^3+2x^2-9x-18=(x+2)(x^2-9)=(x+2)(x-3)(x+3).$$

b) Lai sadalītu polinomu x^3+4x^2+x-6 reizinātājos, jāatrod polinoma saknes. Pārbaudām, vai $x=1$ ir polinoma sakne.

	1	**4**	**1**	$-\mathbf{6}$
1	1	$1\cdot 1+4=5$	$1\cdot 5+1=6$	$1\cdot 6-6=0$

Iegūstam, ka skaitlis 1 ir dotā polinoma sakne. Līdz ar to

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6).$$

Sadalīsim polinomu x^2+5x+6 reizinātājos, atrodot tā saknes ar Vjeta teorēmu:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-5 \\ x_1\cdot x_2=6 \end{cases}$$

Tātad polinoma x^2+5x+6 saknes ir $x_1=-3$ un $x_2=-2$. Līdz ar to

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x+3)(x+2).$$

c) Lai sadalītu polinomu $x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72$ reizinātājos, jāatrod polinoma saknes. Pārbaudām, vai $x=2$ ir polinoma sakne.

	1	$-\mathbf{2}$	$-\mathbf{13}$	**26**	**36**	$-\mathbf{72}$
2	1	0	-13	0	36	0

Esam ieguvuši, ka

$$x^5-2x^4-13x^3+26x^2+36x-72=(x-2)(x^4-13x^2+36)=$$
$$=(x-2)(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)^2(x+2)(x-3)(x+3).$$

Raksturīgākās kļūdas

1) Ja nākamā rindā turpina risināt saistītā pierakstā, tad jālieto vienādības zīme gan rindas beigās, gan nākamās rindas sākumā.
2) Izteiksme $x^2(x+2)-9(x+2)$ nav reizinājums, tā ir algebriska summa.

2. Ar kādu a vērtību polinoms $4x^3 - 6x + a$ dalās ar $x + 3$?

Atrisinājums

Lai polinoms $4x^3 - 6x + a$ dalītos ar $x + 3$ vienai no polinoma $4x^3 - 6x + a$ saknēm ir jābūt skaitlim -3. Izdalām doto polinomu ar $x + 3$.

	$\mathbf{4}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-6}$	$\boldsymbol{a}$
$\mathbf{-3}$	4	$-3 \cdot 4 + 0 = -12$	$-3 \cdot (-12) - 6 = 30$	$-3 \cdot 30 + a = a - 90$

Tā kā polinoms dalās ar $x + 3$, tad atlikumam jābūt 0. Līdz ar to iegūstam, ka $a - 90 = 0$, tātad $a = 90$.

Raksturīgākās kļūdas

1) Nezināmais a ir reāls skaitlis, nevis izteiksme, kas atkarīga no x.
2) Trešās kārtas vienādojuma saknes nedrīkst rēķināt ar diskriminantu.

3. Pieņemsim, ka $a, b, c > 0$. Pierādīt, ka

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Atrisinājums

Sadalot kreiso pusi saskaitāmajos un izrakstot to izvērsti, iegūstam

$$\frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} + \frac{c}{abc} = \boldsymbol{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a}} \leq \boldsymbol{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Nevienādības labajā pusē mums ir skalārais reizinājums no virknēm, kas sakārtotas vienādi, bet kreisajā pusē ir skalārais reizinājums no pārkārtotām virknēm. Saskaņā ar pārkārtošanas nevienādību uzdevumā dotā nevienādība ir patiesa.

Piezīme. Nevienādību var atrisināt arī, atdalot pilnos kvadrātus.

Raksturīgākās kļūdas

1) Viena konkrēta piemēra apskatīšana nav pierādījums, ka nevienādība ir patiesa visām pozitīvām a, b, c vērtībām.
2) Pārkārtojuma nevienādībā ir jāņem vienas un tās pašas divas virknes (tikai to elementi var būt pārkārtoti), nevis kaut kādas divas virknes (katrā nevienādības pusē citas, tas ir, ar atšķirīgiem virknes locekļiem).
3) Izteiksmei $\boldsymbol{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ apgrieztā izteiksme **nav** $a^2 + b^2 + c^2$, bet gan

$$\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}} = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$