Pārkārtošanas nevienādība

Rearrangement inequality

Emīls Kalugins

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

2020. gada 5. decembris

Ievads

Problēmas nostādne

Pieņemsim, ka a_1, a_2, a_3, a_4 un b_1, b_2, b_3, b_4 ir reālu skaitļu virknes un ka c_1, c_2, c_3, c_4 ir tie paši skaitļi b_1, b_2, b_3, b_4, bet sakārtoti citā secībā (*pārkārtoti*). Kad summa

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_4$$

pieņems lielāko vai mazāko vērtību?

Pārkārtošanas nevienādība

Pārkārtošanas nevienādība

Summa $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ pieņem lielāko vērtību, ja virknes $a_1, \ldots, a_n$ un $b_1, \ldots, b_n$ būs sakārtotas vienādi. S pieņems mazāko vērtību, ja abas virknes būs sakārtotas pretēji, t.i., viena augoši, bet otra dilstoši.

Ieviesīsim jaunu apzīmējumu skalārajam reizinājumam:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Vispārējā stratēģija

- Vai nevienādība ir simetriska attiecībā pret mainīgājiem $a, b, c \ldots$?
  - Varam pieņemt, ka $a \geq b \geq c \geq \ldots$
  - Pretējā gadījumā varam pieņemt, ka a ir lielākā vai mazākā vērtība.

Simetriska nevienādība	Asimetriska nevienādība
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$	$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$

Piemērs

Pamatot, ka jebkuriem reāliem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Piemērs

Pamatot, ka jebkuriem reāliem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $a \geq b \geq c$. Saskaņā ar pārkārtošanas nevienādību iegūstam, ka

$$a^2 + b^2 + c^2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix} = ab + bc + ca.$$

Piemērs

Ja $a, b, c > 0$, pamatot, ka ir spēkā nevienādība:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Piemērs

Ja $a, b, c > 0$, pamatot, ka ir spēkā nevienādība:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Atrisinājums. Pieņemsim, ka a ir lielākā vērtība. Neatkarīgi no tā vai nu $b \geq c$, vai $b < c$ virknes (a, b, c) un (a^2, b^2, c^2) būs sakārtotas vienādi, tāpēc saskaņā ar pārkārtošanas nevienādību

$$a^3 + b^3 + c^3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix} = a^2b + b^2c + c^2a.$$

Piemērs

Pieņemsim, ka $a, b, c > 0$. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Piemērs

Pieņemsim, ka $a, b, c > 0$. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Atrisinājums. Pieņemsim, ka a ir lielākā vērtība. Tas nozīmē, ka $\frac{1}{a}$ būs mazākā vērtība starp $\frac{1}{b}$ un $\frac{1}{c}$. Tātad (a, b, c) un $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ būs sakārtoti pretēji. Saskaņā ar pārkārtošanas nevienādību šis skalārais reizinājums būs mazākais jeb

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{bmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Piemērs

Pieņemsim, ka $a, b, c > 0$. Pierādīt, ka

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Piemērs

Pieņemsim, ka $a, b, c > 0$. Pierādīt, ka

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $a \geq b \geq c$. Izmantojot vispārināto pārkārtošanas nevienādību, varam apgalvot, ka

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}.$$

Ievērojam, ka kreisajā pusē visas virknes ir sakārtotas vienādi, tāpēc tās dos lielāko summu.

Piemērs

Atrast funkcijas $\dfrac{\sin^3 x}{\cos x} + \dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$ minimumu, ja $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Piemērs

Atrast funkcijas $\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$ minimumu, ja $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Atrisinājums. Dotajā intervālā virknes $(\sin^3 x, \cos^3 x)$ un $\left(\frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}\right)$ ir sakārtotas pretēji, tāpēc varam novērtēt funkcijas vērtību sekojoši:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x} = \begin{bmatrix} \sin^3 x & \cos^3 x \\ \frac{1}{\cos x} & \frac{1}{\sin x} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \sin^3 x & \cos^3 x \\ \frac{1}{\sin x} & \frac{1}{\cos x} \end{bmatrix} = \sin^2 x+\cos^2 x = 1.$$

Paldies par uzmanību!

Jautājumi

Avots: A. Engel, “Problem-Solving Strategies”, Springer-Verlag New York, 1998, 167-204. lpp.