Augstāku pakāpju polinomu sadalīšana reizinātājos

Miķelis Emīls Miķelsons

Saturs

- Vjeta teorēma
- Veselo sakņu teorēma
- Hornera shēma
- Piemēri

Vjeta teorēma

Kvadrātvienādojums: $x^2 + px + q = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Kvadrātvienādojumiem veselas saknes var uzminēt

Vjeta teorēma

Kubisks vienādojums: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases}$$

Kubiskam vienādojumam jau ir grūti uzminēt saknes no Vjeta teorēmas

Veselo sakņu teorēma

$x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1 = 0$, kur $a_i -$ veseli skaitļi

$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0 \ \rightarrow \ a_1 = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$

Teorēma: Ja x_i ir vesela sakne, tad x_i ir a_1 dalītājs

Piemēri

Kādas varētu būt vienādojuma veselās saknes?

1)$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Saknes var būt: ±1, ±2, ±3, ±6

Pārbauda:

$x = 1: 1^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 0$ → Der!

$x = -1: (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = 8 \neq 0$ → Neder!

$x = -2: (-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 = 0$ → Der!

$x = 3: 3^3 - 2(3)^3 - 5(3) + 6 = 0$ → Der!

Tātad: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

Piemēri

2) $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Saknes var būt: ±1

Pārbauda: $x = 1{:}\, 1^3 - 3(1)^2 + 3 - 1 = 0$ → Der!

$x = -1{:}\, (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3 - 1 = -8 \neq 0$ → Neder!

Ko darīt tālāk?

Novēro: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$

Hornera shēma

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, kur $a_i -$ veseli skaitļi

$$a_0 + x\left(a_1 + x\big(a_2 + \cdots x(a_{n-1} + x a_n)\big)\right) = 0$$

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + b_n x_0$$

…

$$b_1 = a_1 + b_2 x_0$$

$$b_0 = a_0 + b_1 x_0 = P(x_0)$$

Hornera shēma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
x_0	a_n	$a_{n-1} + a_n x_0$	…	$a_1 + b_2 x_0$	$a_0 + b_1 x_0 = P(x_0)$

Hornera shēmas piemērs

$$P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - x - 26$$

$\boldsymbol{x_0}$	**1**	**-7**	**17**	**-1**	**-26**
-1	1	-8	25	-26	0

$$P(x) = (x+1)(x^3 - 8x^2 + 25x - 26)$$

Hornera shēmas piemērs

$$P(x) = (x+1)(x^3 - 8x^2 + 25x - 26)$$

$\boldsymbol{x_0}$	**1**	**-8**	**25**	**-26**
2	1	-6	13	0

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 6x + 13)$$

$$D = 6^2 - 4 \times 13 = -16 < 0$$

Tātad tālāk sadalīt nevar

Hornera shēmas piemērs

Ir ērti lietot kopēju tabulu:

x_0	**1**	**-7**	**17**	**-1**	**-26**
-1	1	-8	25	-26	0
2	1	-6	13	0	
1	1	-5	8		

$$P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - x - 26 = (x+1)(x-2)(x^2 - 6x + 13)$$

Hornera shēmas piemērs

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$$

$\boldsymbol{x_0}$	**1**	**-2**	**-3**	**4**	**4**
1	1	-1	-4	0	4
-1	1	-3	0	4	0
-1	1	-4	4	0	

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = (x+1)^2(x^2 - 4x + 4)$$
$$= (x+1)^2(x-2)^2$$

Atrisini vienādojumus!

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

Paldies par uzmanību!