Atvasinājums

FILIPS KOZIREVS

LU FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

Saturs

Ievads

Ievads

- t_0 – sākuma laika moments
- $\Delta t > 0$ – laika izmaiņa
- $s = s(t)$ - *veiktais ceļš laika momentā t*
- $v_{vid.} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ - *vidējais ātrums laika nogriezni* $[t_0;\ t_0+\Delta t]$

Ievads

Kā noteikt $v(t_0)$*, ja* $v = v(t)$ *– momentānais ātrums laika momentā* t*?*

Ievads

- Ja $\Delta t \sim 0$ (bet $\Delta t \ \neq 0$), tad $v_{vid.} \sim v(t_0)$.
- Tātad $v(t_0)$ = $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{vid.} = \mathbf{\lim\limits_{\Delta \boldsymbol{t} \to 0}} \frac{\boldsymbol{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}}{\boldsymbol{\Delta t}} = \boldsymbol{s'(t_0)}$, kur $s'(t_0)$ ir funkcijas s atvasinājums punktā t_0.
- Tad mašīnas ātrums jeb ceļa funkcijas augšanas ātrums laika momentā t_0 ir vienāds ar funkcijas s atvasinājumu punktā t_0.
- Analoģiski var parādīt, ka mašīnas paātrinājums laika momentā t_0 $\boldsymbol{a(t_0) = v'(t_0) = \left(s'(t_0)\right)' = s''(t_0)}$. *(pamēģiniet paši)*

Ievads

Vispārīgā gadījumā funkcijas $f(x)$ *atvasinājums punktā* x_0*, ko apzīmē ar* $f'(x_0)$*, ir «funkcijas* f *augšanas ātrums punktā* x_0*».*

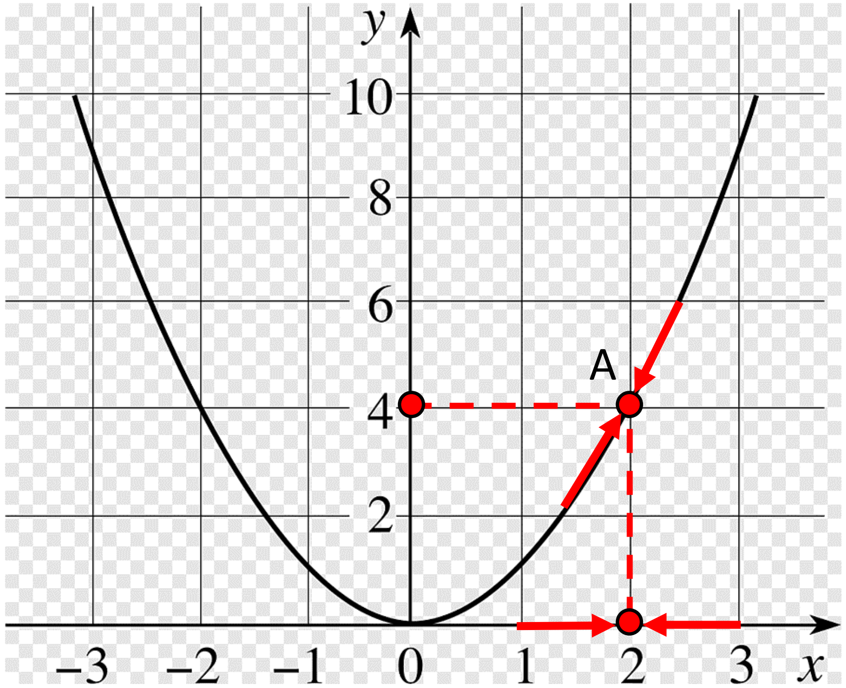
Funkcijas robeža

- Attēlā dots funkcijas $y = x^2$ grafiks.

- Var redzēt, ka, kad x tuvojas skaitlim 2 *(nav svarīgi, no kuras puses),* funkcijas y vērtība tuvojas skaitlim 4.

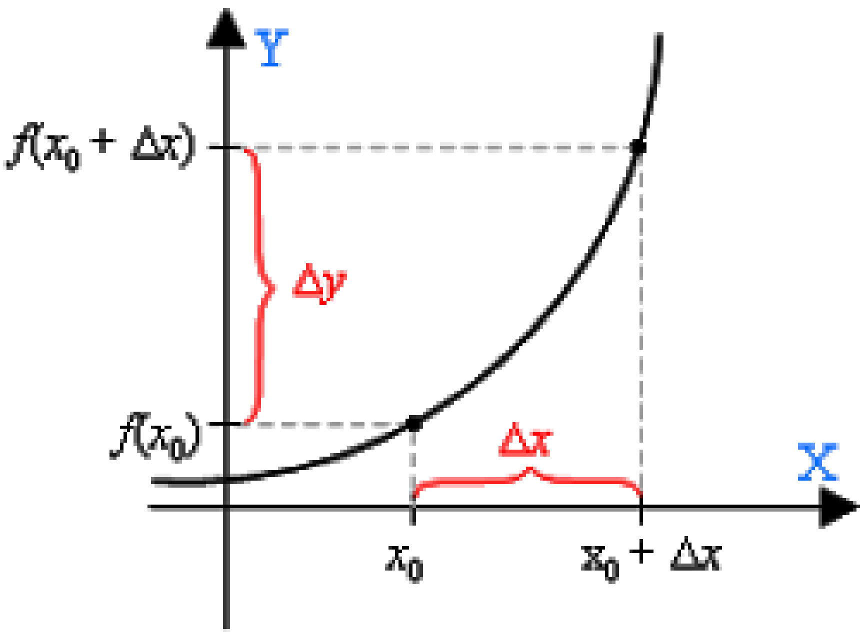
- Šo faktu pieraksta šādi: $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ *(funkcijas $y = x^2$ robeža, kad x tiecas uz 2, ir vienāda ar 4).*

- Šoreiz varēja vienkārši ievietot x vietā 2 un iegūt robežas vērtību, bet ne vienmēr robežu var atrast tik viegli.



Atvasinājuma definīcija

- Kā jau tika minēts lekcijas ievadā, vispārīgajā gadījumā funkcijas $f(x)$ atvasinājums punktā x_0 $f'(x_0)$ ir «funkcijas f augšanas ātrums punktā x_0».
- Apskatīsim funkciju $y = f(x)$.
- Lai Δx – **argumenta $\boldsymbol{x}$ pieaugums punktā $\boldsymbol{x_0}$**, tad $x_0 + \Delta x$ – jaunā argumenta vērtība un $f(x_0 + \Delta x)$ – jaunā funkcijas vērtība.
- Tad $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sauc par **funkcijas pieaugumu punktā $\boldsymbol{x_0}$, kas atbilst argumenta pieaugumam $\boldsymbol{\Delta x}$**.
- Ir redzams, ka argumenta pieaugumu Δx var interpretēt kā abstraktu Δt analogu no piemēra ar mašīnas momentāno ātrumu un Δy savukārt kā $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ jeb veiktā ceļa laika intervālā $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$ analogu.



Atvasinājuma definīcija

- Tagad, atceroties piemēru par mašīnu, var viegli saprast, kāda ir atvasinājuma definīcija.
- Funkcijas $y = f(x)$ atvasinājums punktā x_0 $\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$.
- Ja $f'(x_0)$ eksistē tad funkciju $y = f(x)$ sauc par atvasināmu vai **diferencējamu** punktā x_0.

Pamatfunkciju atvasināšanas formulas

$$C' = 0$$
$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(kx)' = k$$
$$\left(\frac{x}{k}\right)' = \frac{1}{k}$$
$$\boxed{(kx+b)' = k}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$
$$\boxed{(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}}$$
$$\boxed{(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$(x^2)' = 2x$$
$$(x^3)' = 3x^2$$

Pamatfunkciju atvasināšanas formulas. Piemēri

$$\boldsymbol{C' = 0,\ \ C} \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{(kx+b)' = k,} \qquad \boldsymbol{k, b} \in \mathbb{R}$$

$7' = 0$

$(-9x + 4)' = -9$

$(20x)' = 20$

$$\left(\frac{x}{7}\right)' = \left(\frac{1}{7} \cdot x\right)' = \frac{1}{7}$$

$$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}, n} \in \mathbb{R}$$

$(x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Pamatfunkciju atvasināšanas formulas. Pierādījuma piemērs

- Pierādīsim, ka $(\boldsymbol{x^2})' = \boldsymbol{2x}$, kur $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x_0) = x_0^2$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$, kur x_0 - patvaļīgs punkts un Δx – argumenta pieaugums punktā x_0.
- Tad $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.
- Tātad jebkuram $x \in \mathbb{R}$ $(x^2)' = 2x$.

Atvasināšanas kārtulas

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Atvasināšanas kārtulas. Piemēri

- $\boldsymbol{u(x) = C \cdot f(x), C \in \mathbb{R}. u'(x)}$ **- ?**

  $$u'(x) = (C \cdot f(x))' = (C)' \cdot f(x) + C \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + C \cdot f'(x) = C \cdot f'(x)$$

- $\boldsymbol{f(x) = 5x^3 + 2x + 2020}$, $\boldsymbol{f'(x)}$ **- ?**

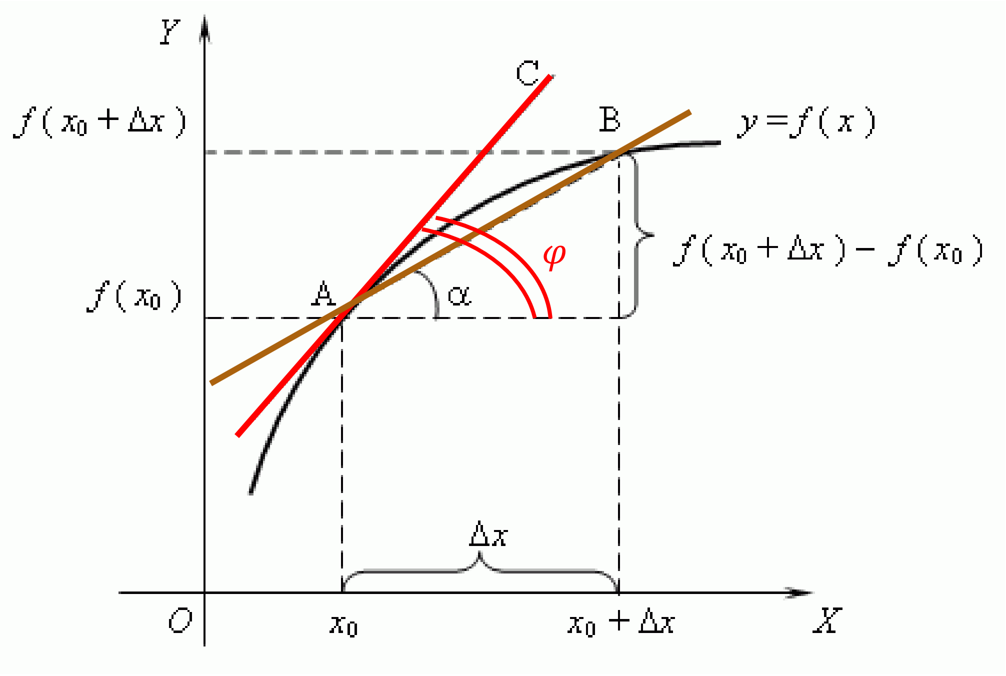
  $$f'(x) = (5x^3 + 2x + 2020)' = (5x^3)' + (2x)' + (2020)' = 5 \cdot (x^3)' + 2 \cdot x' + 0 = 5 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 = 15x^2 + 2$$

- $\boldsymbol{f(x) = x^2 - \sqrt{2020}. f'(x)}$ **- ?**

  $$f'(x) = \left(x^2 - \sqrt{2020}\right)' = (x^2)' - \left(\sqrt{2020}\right)' = 2x - 0 = 2x$$

Atvasinājuma ģeometriskā interpretācija

- Apskatīsim funkcijas $y = f(x)$ grafiku.
- Δx – argumenta pieaugums punktā x_0, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - funkcijas pieaugums punktā x_0, kas atbilst argumenta pieaugumam Δx.
- Taisne AB – funkcijas grafika **sekante**, t. i., taisne, kas krusto funkcijas grafiku divos punktos. Tas slīpuma leņķis ir leņķis α.
- No zīmējuma var redzēt, ka $\tan \alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Ja $\Delta x \to 0$, tad $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$ un $\tan \alpha \to f'(x_0)$ pēc atvasinājuma definīcijas. Bet kas notiek ar sekanti?
- Punkts B tuvojas punktam A, un sekante aizņem **robežstāvokli** un kļūst par **pieskari** funkcijas grafikam punktā A jeb par taisni, kurai ar funkcijas grafiku kopīgs ir tikai punkts A *(taisne AC*).



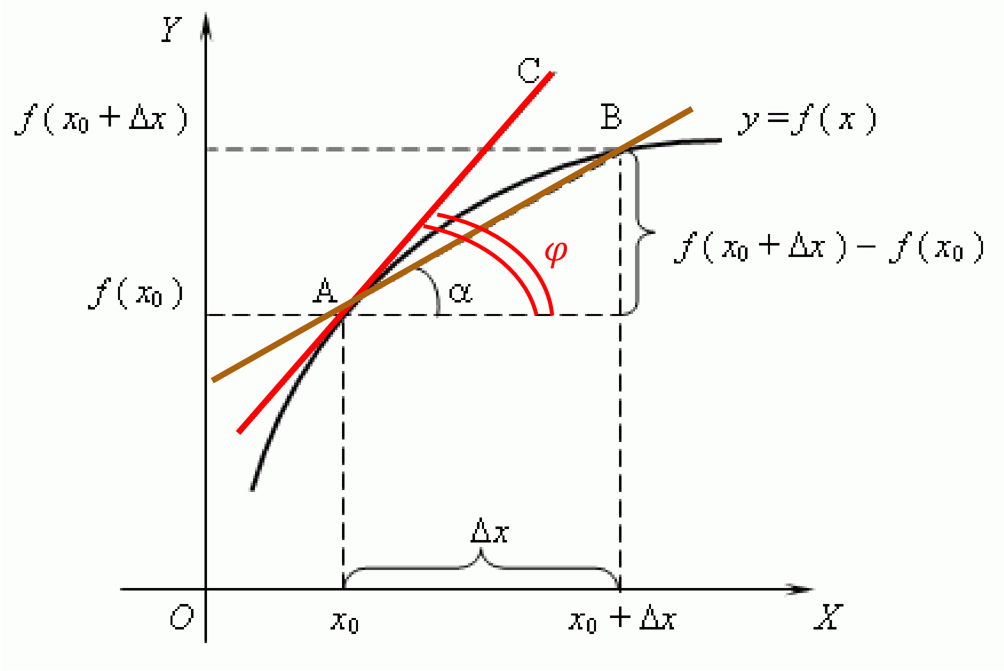
Atvasinājuma ģeometriskā interpretācija

- Var secināt, ka $\tan\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \tan\alpha =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$

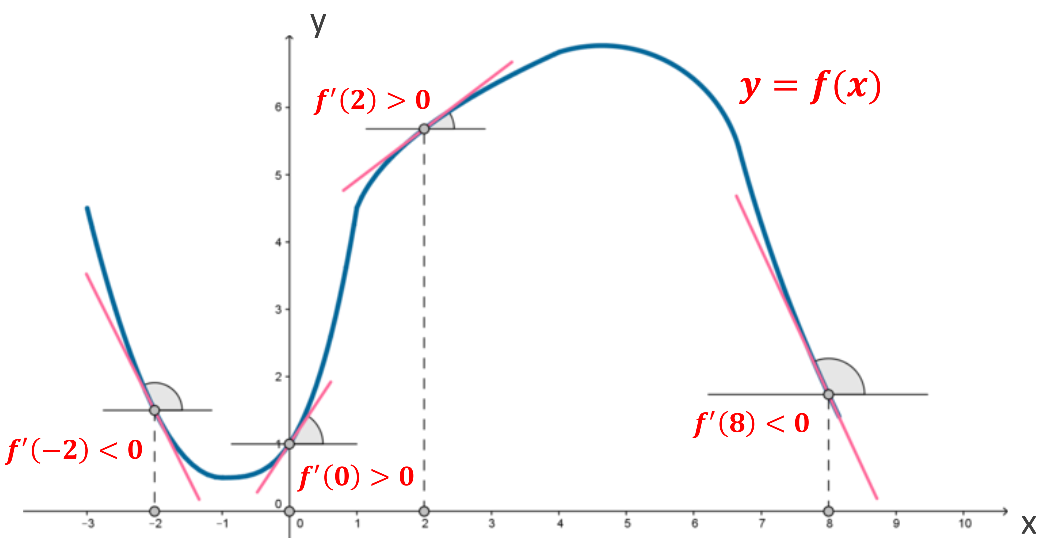
- Ņemot vērā, ka taisnes slīpuma leņka tangenss ir tās virziena koeficiens, pieskares AC virziena koeficients $\boldsymbol{k} =$ $\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})$.

- Tā arī ir funkcijas atvasinājuma ģeometriskā interpretācija. Funkcijas $y = f(x)$ grafika pieskares punktā x_0 virziena koeficients ir vienāds ar funkcijas atvasinājumu šajā punktā.



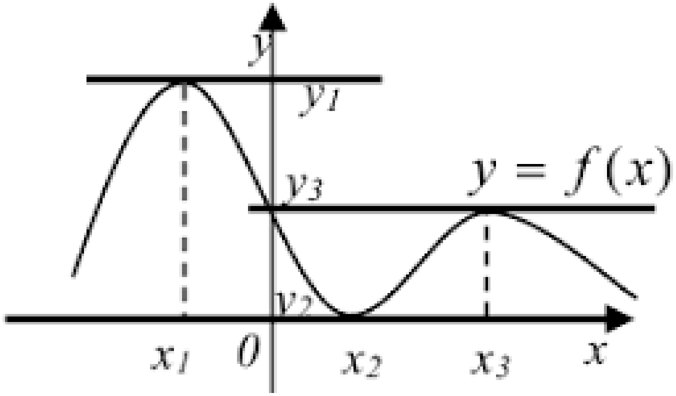
Funkcijas ekstrēmi

- Ja $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ katra intervāla I punktā, tad **f aug** intervālā I.
- Ja $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ katra intervāla I punktā, tad **f dilst** intervālā I.
- Šie fakti seko arī no atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas: ja funkcija f aug punktā x_0, tad lineāra funkcija, kuras grafiks ir funkcijas f pieskare punktā x_0, arī aug, tāpēc tās virziena koeficients k ir pozitīvs, un tātad arī $f'(x_0) = k > 0$; ja f dilst punktā x_0, tad $f'(x_0) = k < 0$.



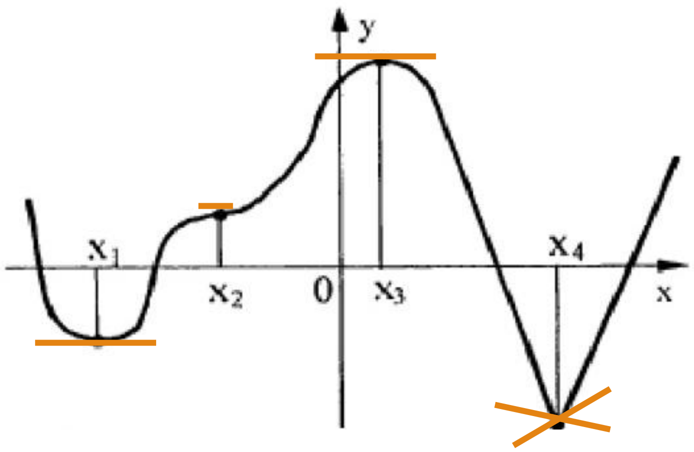
Funkcijas ekstrēmi

- Punktu x_0 sauc par funkcijas f **minimuma punktu**, ja katram x no funkcijas f definīcijas apgabala izpildās nevienādība $f(x) \geq f(x_0)$. Vērtību $f(x_0)$ sauc par funkcijas f **minimumu**.
- Punktu x_0 sauc par funkcijas f **maksimuma punktu**, ja katram x no funkcijas f definīcijas apgabala izpildās nevienādība $f(x) \leq f(x_0)$. Vērtību $f(x_0)$ sauc par funkcijas f **maksimumu**.
- Funkcijas minimuma un maksimuma punktus sauc par **ekstrēma punktiem**, bet funkcijas vērtības šajos punktos - par **funkcijas ekstrēmiem**. Ja funkcija ir diferencējama ekstrēma punktā un tas atrodas funkcijas definīcijas apgabalā iekšienē, tad funkcijas atvasinājums ekstrēma punktā ir vienāds ar 0.



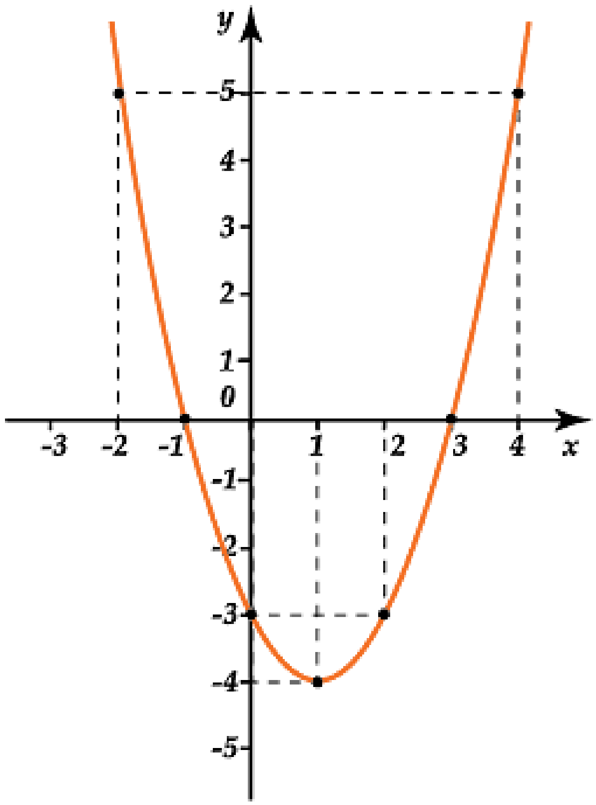
Funkcijas ekstrēmi. Kritiskie punkti

- Funkcijas f definīcijas apgabala iekšējo punktu x_0 sauc par **kritisku**, ja $f'(x_0) = 0$ vai f nav diferencējama punktā x_0.
- Lai atrastu funkcijas maksimālo vai minimālo vērtību, vajag atrast tās vērtības visos kritiskajos punktos un izvēlēties no tām maksimālo un minimālo.



Funkcijas ekstrēmi. Kāpēc parabolas virsotnes formula ir $x_0 = -\frac{b}{2a}$?

- Parabola ir kvadrātiskās funkcijas $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiks, kur $a \neq 0$, tāpēc, lai atrastu parabolas virsotnes x koordinātu, mums faktiski jāatrod funkcijas f ekstrēma punktu.
- $f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c' = a \cdot (x^2)' + b \cdot x' + 0 = a \cdot 2 \cdot x + b \cdot 1 = 2ax + b.$
- $f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2ax_0 + b = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_0} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ - funkcijas f kritiskais punkts.
- No parabolas grafika var redzēt, ka atbilstošai kvadrātiskai funkcijai f ir viens vienīgs kritiskais punkts, kurš arī ir ekstrēma punkts, un tā ir parabolas virsotnes x koordināta. Tad $\boldsymbol{x_0} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ ir parabolas virsotnes formula.

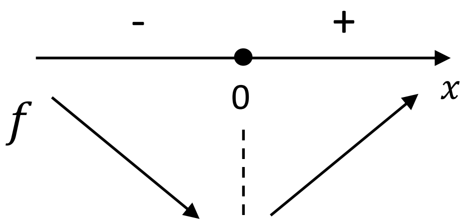


Funkcijas ekstrēmi. Piemērs

Atrast visus funkcijas $f(x) = x^2$ ekstrēma punktus.

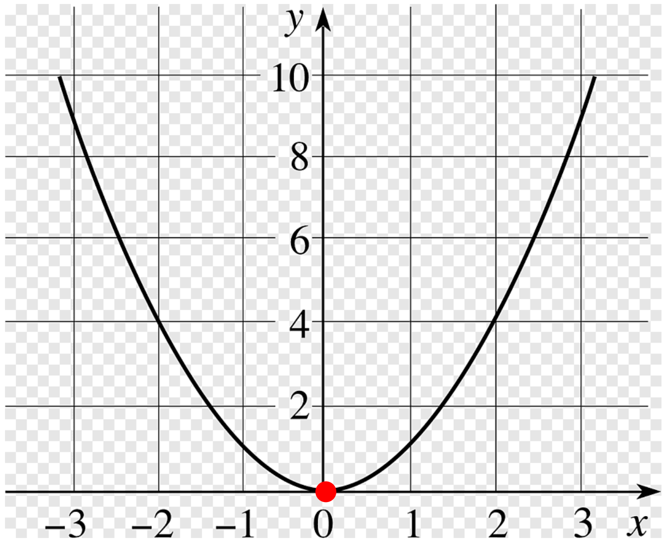
- $f'(x) = 2x.$
- $2x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ – funkcijas f kritiskais punkts.

<u>Vai x_0 ir funkcijas f ekstrēma punkts?</u>

- 

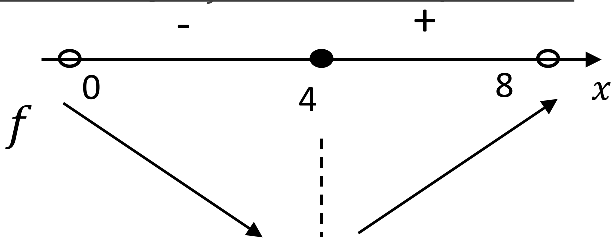
$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2 < 0$$
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 > 0$$

- Jā. Tātad $x_0 = 0$ – vienīgais funkcijas f ekstrēma punkts. To var redzēt arī no funkcijas f grafika.



Funkcijas ekstrēmi. Piemērs

Divu pozitīvu skaitļu summa ir 8. Kādiem ir jābūt šiem skaitļiem, lai to kubu summa būtu vismazāka?

- Ar x apzīmējam 1. skaitli, tad $8-x$ ir 2. skaitlis; $x>0$ un $8-x>0$, tad $x\in(0;8)$.
- Mums jāatrod funkcijas $f(x)=x^3+(8-x)^3=x^3+512-192x+24x^2-x^3=24x^2-192x+512$ minimuma punktu.
- $f'(x)=48x-192$, $f'(x)=0 \Rightarrow x_0=\frac{192}{48}=4\in(0;8)$ – funkcijas f kristiskais punkts.
- <u>Vai x_0 ir funkcijas f minimuma punkts?</u>
- 

$$f'(2)=48\cdot 2-192=-96<0$$
$$f'(5)=48\cdot 5-192=48>0$$

- Jā. Intervālā $(0;8)$ funkcija f sasniedz mimimālo vērtību punktā $x_0=4$.
- Tad 1. skaitlis ir $\boldsymbol{x=x_0=4}$ un 2. skaitlis ir $\boldsymbol{y=8-x=4}$.

Funkcijas ekstrēmi. Piemērs

Protams, uzdevumus no piemēriem var risināt arī, izmantojot parabolas virsotnes formulu $x_0 = -\frac{b}{2a}$*, jo* x_0 *ir atbilstošas kvadrātiskās funkcijas minimuma punkts* $(a > 0)$ *vai maksimuma punkts* $(a < 0)$*.*

Funkcijas ekstrēmi. Uzdevumi pašpārbaudei

1. Divu pozitīvu skaitļu summa ir 10. Kādiem jābūt šiem skaitļiem, lai to kvadrātu summa būtu vismazāka? *(<u>Atbilde:</u> 5 un 5)*
2. Atrodiet tādu skaitli, lai šī skaitļa un tā kvadrāta summa būtu vismazāka. *(<u>Atbilde:</u> -0.5)*

Jautājumi

Izmantotā literatūra un avoti

- А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Б. Е. Вейц и др., Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9 – 10 кл. сред. шк., М.: Просвещение, 1987, 335 с.
- B. Āboltiņa, K. Liepiņa, Rokasgrāmata matemātikā, Zvaigzne ABC, 2017, 320 lpp.
- И. В. Яковлев, Производная, https://mathus.ru/math/der.pdf

Paldies par uzmanību!