EKSTRĒMU UZDEVUMI:
IEVADS

andrejs.cibulis@lu.lv

Rīga, 01.02.2020.

Ievads

Pasaulē nekas nenotiek tā, ka tajā nevarētu saskatīt kādu maksimuma vai minimuma principu.
L. Eilers

Saturs

Kas ir ekstrēms?

Senie uzdevumi

Kvadrātfunkcija, tās lietojumi

Tests

Definīcijas

Komentāri par ekstrēmu uzdevumiem (EU) un atbilstošajiem jēdzieniem skolas, augstskolu mācību grāmatās.

Daudzos mācību līdzekļos atrodamas novecojušas, nekorektas, paviršas vai pat kļūdainas definīcijas.

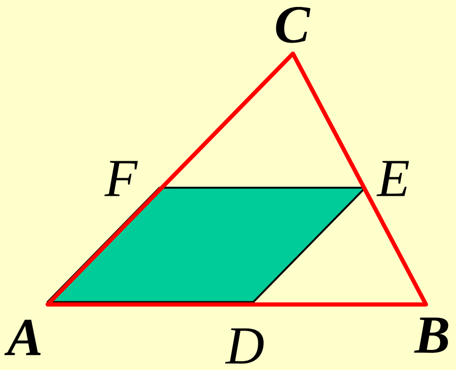
Maksimums, minimums, ekstrēms,
maksimuma punkts, minimuma punkts, ekstrēma punkts,
Lokālie un globālie ekstrēmi, optimāls, optimizācija.

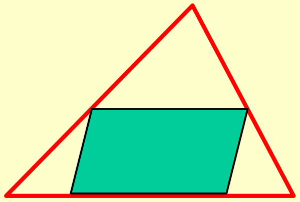
Funkcijas vislielākā, vismazākā vērtība.

Senākie ekstrēmu uzdevumi

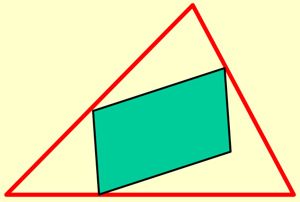
Eiklīda uzdevums (365 – 300; 325 – 265; 315 – 255) p.m.ē.

Trijstūrī ABC ievilkt paralelogramu ADEF, EF || AB, DE || AC, kuram ir vislielākais laukums.





Vai svarīgs paralelitātes nosacījums?



Senākie ekstrēmu uzdevumi

V. Tihomirovs [T, 30] norāda, ka Eiklīda slavenajos “Elementos” ir tikai viens ekstrēmu uzdevums (par paralelograma ar vislielāko laukumu izgriešanu no dotā trijstūra; 6. grāmata). Savukārt “Enciklopēdiskajā vārdnīcā” [EV, 55] minēts vēl viens ekstrēmu uzdevums, kurš atrodams tajā pašā Eiklīda elementu 6. grāmatā un kurš esot visvienkāršākais un, jādomā, arī visvecākais ekstrēmu uzdevums, proti, kādam taisnstūrim ar uzdotu perimetru ir vislielākais laukums.

Cibulis A., **Ekstrēmu uzdevumi**, 1. daļa, 2. izdevums, Rīga, 2007.

[T] Тихомиров В. М. **Рассказы о максимумах и минимумах**, Москва, Наука,1986, 190 с; Москва, МЦНМО, 2006, 202 с. Tikhomirov V. M., Stories About Maxima and Minima, American Mathematical Society, 1991, pp. 200.

Zēnodora uzdevums *n*-stūrim

(200 – 140) p.m.ē.

Atrast *n*-stūri ar vislielāko laukumu, ja dots tā perimetrs.

Zenodorus is known for authoring the treatise On isometric figures, now lost. The most important propositions proved by him are that,

Z1. Of all regular polygons of equal perimeter, that is the greatest in area which has the most angles.

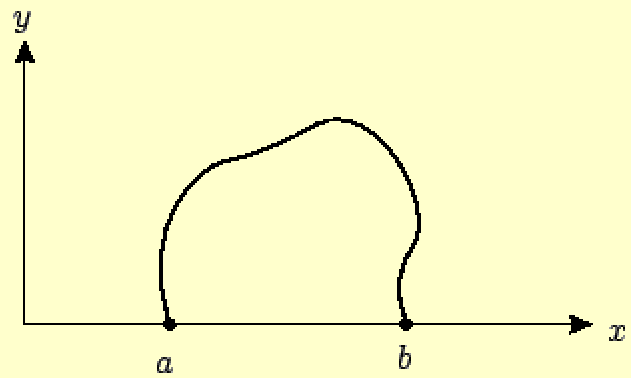
Z2. A circle is greater than any regular polygon of equal contour.

Z3. Of all polygons of the same number of sides and equal perimeter the equilateral and equiangular polygon is the greatest in area.

Z4. Of all solid figures the surfaces of which are equal, the sphere is the greatest in solid content.

https://en.wikipedia.org/wiki/Zenodorus_(mathematician))

Didonas uzdevums



Dido's Problem

Dido was the legendary founder of Carthage (Tunisia). When she arrived in 814BC on the coast of Tunisia, she asked for a piece of land. Her request was satisfied provided that the land could be encompassed by an ox-hide. With a remarkable mathematical intuition, she cut the ox-hide into a long thin strip and used it to encircle the land. This land became Carthage and Dido became the Queen.

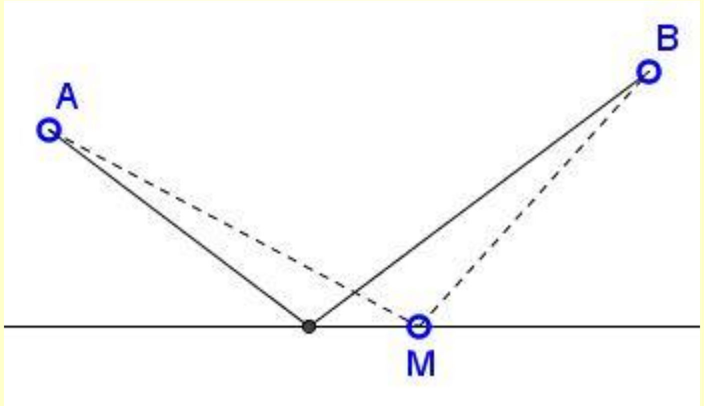
What is the closed curve which has the maximum area for a given perimeter?

Dido’s problem is an example of what is called an isoperimetric problem.

Hērona uzdevums

Heron (or Hero) of Alexandria (10 AD – 70 AD)

Two points A and B are given on the same side of a line *l*. Find a point M on *l* such that the sum of distances from A and B to M is minimal.



This morning, in Italy, there was the national exam of mathematics for students of high schools. One of the exercises asked to solve Heron's problem: given a straight line and two points lying on the same side of the line, find the best path (= the path of minimal length) that connects them and touches the straight line.

TREATISE ON PROBLEMS

OF

MAXIMA AND MINIMA,

SOLVED BY ALGEBRA.

BY

RAMCHUNDRA

Under the Superintendence of

AUGUSTUS DE MORGAN, F. R. A. S. F. C. P. S.
L O N D O N ;

W M. H. ALLEN & CO. 7, LEADENHALL STREAT.

1859.

Muses C. ***De Morgan's Ramanujan: An incident in recovering our endangered cultural memory of mathematics,***
The Mathematical Intelligencer, 1998, v.20, no.3, 47-51.

Uzrādīt funkcijas *f* visus ekstrēma punktus

1. $f(x) = x - x^2$

2. $f(x) = \sqrt{x}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, \; x = 0, \\ |x|^{-1}, \; x \neq 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \sqrt{-x^2}$

5. $f(x) = 2020$

Tā definēt un mācīt neder

Funkcijai $y = f(x)$ punktā x_0 ir lielākā vērtība, ja visiem x ir spēkā nevienādība $f(x) < f(x_0)$ jeb visas funkcijas vērtības ir mazākas par $f(x_0)$.

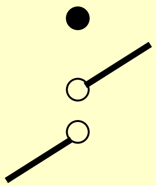
Teorija

Funkcijai $y = f\,(x)$ punktā x_o ir tās lielākā vērtība, ja visiem x no definīcijas apgabala (kuriem $x \neq x_o$) ir spēkā nevienādība $f\,(x) < f\,(x_o)$, tas ir, visas citas funkcijas vērtības ir mazākas par $f\,(x_o)$.

Vislielāko vai vismazāko vērtību visā tās definīcijas apgabalā funkcija sasniedz punktā, kurā mainās dilšanas un augšanas intervāli.

https://www.uzdevumi.lv/p/matematika

Kā punktā var mainīties kaut kādi intervāli?



Tā definēt un mācīt neder

Punktu x_0 *sauc par funkcijas* $y=f(x)$ *maksimuma punktu, ja funkcija šajā punktā ir nepārtraukta un visiem* x *no punkta* x_0 *apkārtnes ir spēkā nevienādība* [ZS, 200]

$$f(x_0)>f(x).$$

Ja funkcija $f(x)$ *ir definēta slēgtā intervālā* $[a; b]$, *tad tā galapunkti* a *un* b *nevar būt funkcijas ekstrēmu punkti, jo tiem nevar definēt apkārtni.* [ZS, 201]

[ZS] Algebra vidusskolai, 1. daļa, Zvaigzne ABC, 1990, 244 lpp.

No kāda interneta avota

Quiz. Referring to the function $y = x + 1 + \dfrac{1}{x}$**,**

which of the following statements is true?

(a) (1, 3) is a local maximum;

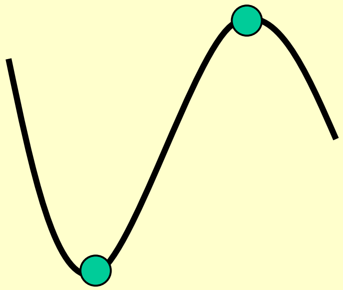
(b) (1, −3) is a local minimum;

(c) (−1, 1) is a local minimum;

(d) (−1, −1) is a local maximum.

Komentāri:

Ekstrēma punkts pēs definīcijas
ir kāds punkts no funkcijas definīcijas kopas,
bet te tiek rakstīti grafika punkti.



Definīcijas

D1. Punktu *a* sauc par funkcijas *f*: *X*→ *R* maksimuma punktu, ja visiem *x* no *X* ir spēkā nevienādība

$$f(x) \leq f(a) \qquad \textbf{(1)}$$

D2. Punktu *a* sauc par funkcijas *f*: *X*→ *R* minimuma punktu, ja visiem *x* no *X* ir spēkā nevienādība

$$f(x) \geq f(a) \qquad \textbf{(2)}$$

D3. Punktu *a* sauc par funkcijas *f*: *X*→ *R* ekstrēma punktu, ja tas ir *f* maksimuma vai minimuma punkts.

D4. Punktu *a* sauc par funkcijas *f*: *X*→ *R* lokālā maksimuma punktu, ja eksistē tāda šā punkta apkārtne, ka visiem *x* no *X*, kuri atrodas šajā apkārtnē, ir spēkā nevienādība (1).

Kvadrātfunkcija

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_{2)}, a \neq 0.$$

Labi zināms: $D := b^2 - 4ac, \quad x_{extr} = -\dfrac{b}{2a}$

Ne tik labi zināms: $x_{extr} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_{extr} = -\dfrac{D}{4a} = -\dfrac{a}{4}(x_1 - x_2)^2$

Komentārs par internetā nepamatoti sacelto ažiotāžu par it kā jaunu kvadrātvienādojuma risināšanas paņēmienu.

Po-Shen Loh, A Simple Proof of the Quadratic Formula, 2019, https://arxiv.org/pdf/1910.06709.pdf

Abstract. This article provides a simple proof of the quadratic formula, which also produces an efficient and natural method for solving general quadratic equations. The derivation is computationally light and conceptually natural, and has the potential to demystify quadratic equations for students worldwide.

‘Jauns’ sakņu noteikšanas paņēmiens pēc Loha

$$x^2 + Bx + C = (x - R)(x - S) \qquad (1)$$

$$(-\frac{B}{2} + z)(-\frac{B}{2} - z) = C \qquad (2)$$

$$\frac{B^2}{4} - z^2 = C$$

$$z^2 = \frac{B^2}{4} - C$$

$$-\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - C}$$

Formulā (1) ar R un S apzīmētas saknes. Formula (2) izsaka Vjeta teorēmu. Kreisajā pusē saknes ir izteiktas tā, ka uzreiz redzams ar ko vienāda to summa. Šis paņēmiens nav ne īsākais, ne vienkāršākais.

Kvadrātfunkcija

Gan ekstrēmus, gan kvadrātfunkcijas saknes var iegūt ar šādu ļoti vienkāršu pārveidojumu:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

$$4ay = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = (2ax + b)^2 - D \geq -D$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$4ay \geq -D.$$

$$x = x_{extr} \Leftrightarrow 2ax + b = 0.$$

Triviāli piemēri

Taisnstūra perimetrs ir 48 cm. Kādiem jābūt malu izmēriem, lai taisnstūrim būtu iespējami lielākais laukums?
https://www.uzdevumi.lv/p/matematika

Pierādīt, ka no visiem taisnstūriem ar uzdotu perimetru, maksimālais laukums ir kvadrātam.

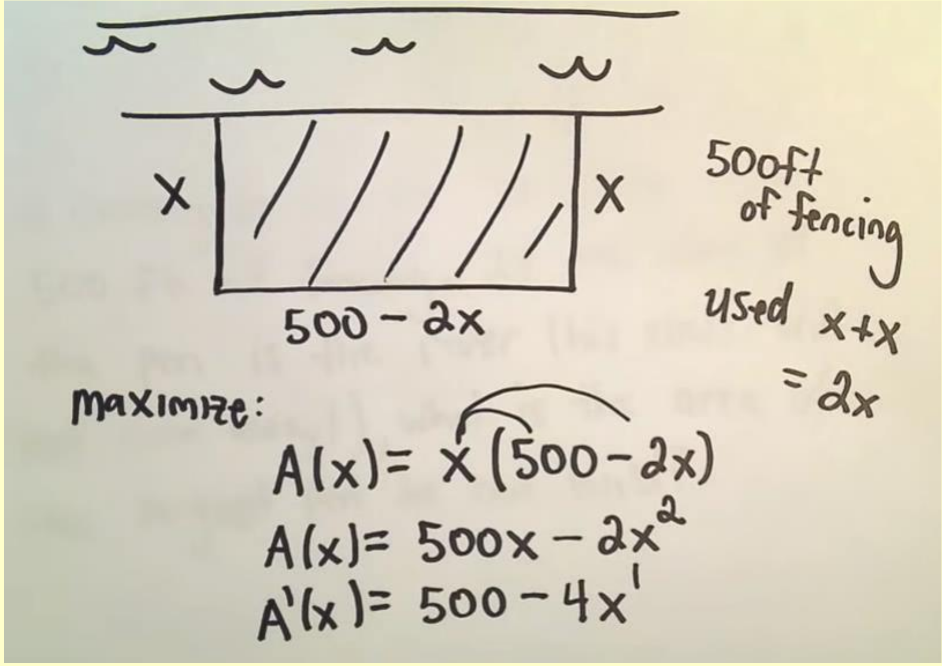
$$L = xy$$

$$2x + 2y = P$$

$$2L = x(P - 2x) \Rightarrow x_{\max} = \frac{P}{4}.$$

Šeit izmantots fakts, ka kvadrātfunkcijai ekstrēma punkts ir sakņu viduspunkts.

Ne no šādiem jāmācās...



$$2x + y = P$$

$$L = x(P - 2x) \Rightarrow x_{\max} = \frac{P}{4}.$$

Šeit izmantots fakts, ka kvadrātfunkcijai ekstrēma punkts ir sakņu viduspunkts.

Kvadrātfunkcija: EU piemēri

No grāmatā [KZZ, 147-152] formulētajiem 74 ekstrēmu uzdevumiem vismaz 25% reducējami uz kvadrātfunkcijas ekstrēmu noteikšanu.

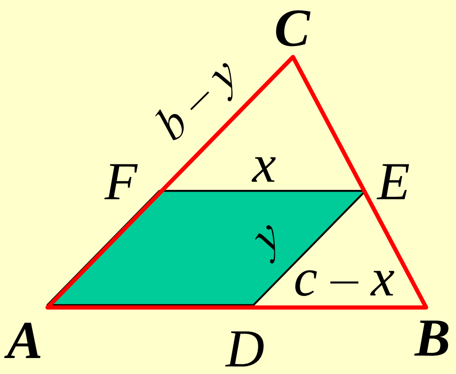
Daži piemēri

165. Noteikt divus skaitļus, kuru starpība ir vienāda ar 5, bet reizinājums ir vismazākais.

179. Taisnleņķa trijstūrī, kura katetes ir 18 cm un 24 cm, ievilkts taisnstūris. Taisnstūra viens leņķis sakrīt ar trijstūra taisno leņķi. Kādiem jābūt taisnstūra malu garumiem, lai tā laukums būtu vislielākais?

Piezīme. Uzdevums ir Eiklīda uzdevuma atsevišķs gadījums. Grāmatā nav dotas atsauces uz avotiem.

Eiklīda uzdevuma risinājums



$$L = xy\sin A$$

$$\frac{y}{b} = \frac{c-x}{c} \Rightarrow y = \frac{b}{c}(c-x)$$

$$K(x) = x(c-x)$$

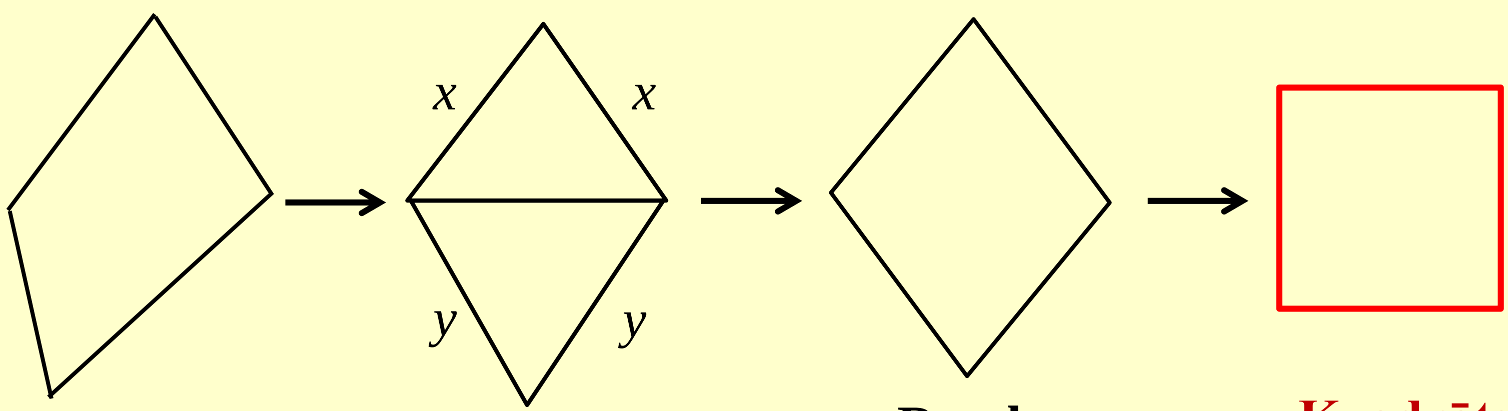
Maksimuma punkts: $x = \frac{c}{2} \Rightarrow y = \frac{b}{2}.$

Zēnodora uzdevums četrstūrim

Pierādīt, ka no četrstūriem ar uzdotu perimetru, maksimālais laukums ir kvadrātam.

Pierādījumu var veikt pēc šādas shēmas:

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq L(x, x, y, y) \leq L(a, a, a, a) \leq L_K(a, a, a, a)$$



Rombs

Kvadrāts

Redukcija uz
izoperimetrisku trīsstūri

Zēnodora uzdevums trīsstūrim

Izoperimetriskā lemma trīsstūrim

No visiem trīsstūriem ar fiksētu pamatu un sānu malu summu maksimālais laukums ir vienādsānu trīsstūrim.

$$L(x, y, c) \le L(a, a, c). \quad a = \frac{x+y}{2}$$

Pierādījums

$$L = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-c)}$$

$$(p-x)(p-y) \le (p-a)(p-a)$$

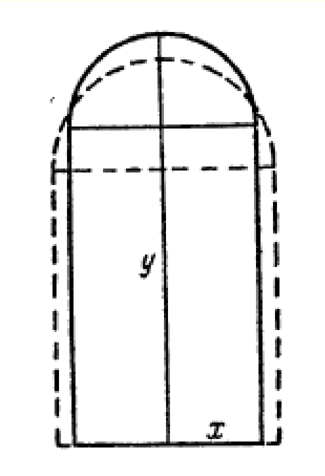
$$-p(x+y) + xy \le -2ap + a^2$$

$$xy \le a^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0.$$

Uzdevums par Normandijas logu

Normandijas loga forma ir taisnstūris ar pusaploci augšā. Dots ir loga perimetrs. Kādi jāņem loga izmēri, lai logs izlaistu visvairāk gaismas? [Ab, Oz, GL, Ze]

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ.

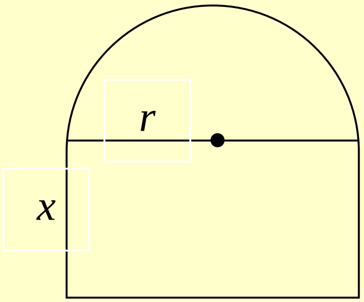


Grāmatas risinājums ir garš, neracionāls. Uzdevumu var atrisināt elementāri, izmantojot kvadrātfunkcijas īpašības.

Абельсон И. Б., Максимум и минимум, ОНТИ, 1935, 110 с.

Elementārs risinājums

Lietosim citus apzīmējumus.



$$P = 2x + 2r + \pi r$$

$$L = 2rx + \frac{\pi r^2}{2} \mapsto \max$$

$$L = (P - 2r - \pi r)r + \frac{\pi r^2}{2} = (P - 2r - \frac{\pi r}{2})r = \frac{r}{2}[(2P - (4+\pi)r].$$

Sakņu vidējais aritmētiskais ir maksimuma punkts, t. i.,

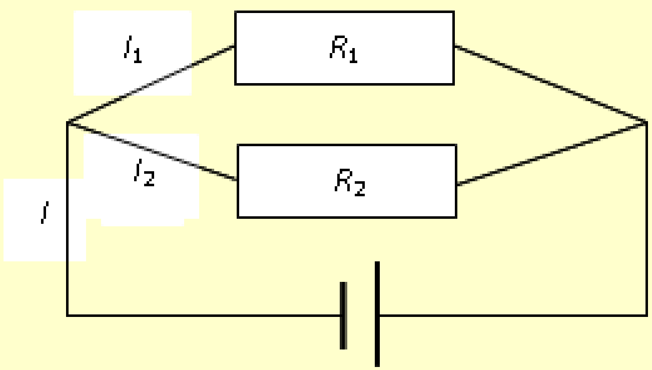
$$r_{\max} = \frac{P}{4+\pi}$$

$$\frac{P}{r} = \frac{2x}{r} + 2 + \pi \Rightarrow 4 + \pi = \frac{2x}{r} + 2 + \pi \Rightarrow r = x.$$

Uzdevums par elektrisko strāvu

Elektriskā strāva I sazarojumā sadalās tā, ka kopīgais siltuma daudzums, kas izdalās paralēli saslēgtās pretestībās R_1 un R_2, ir minimāls, sk. zīmējumu. Siltuma daudzumu Q pēc Džoula-Lenca likuma var izteikt kā:

$$Q = kI_1^2 R_1 t + kI_2^2 R_2 t,$$



k – proporcionalitātes koeficients, t – laiks, $I = I_1 + I_2$ – pēc Kirhofa likuma.

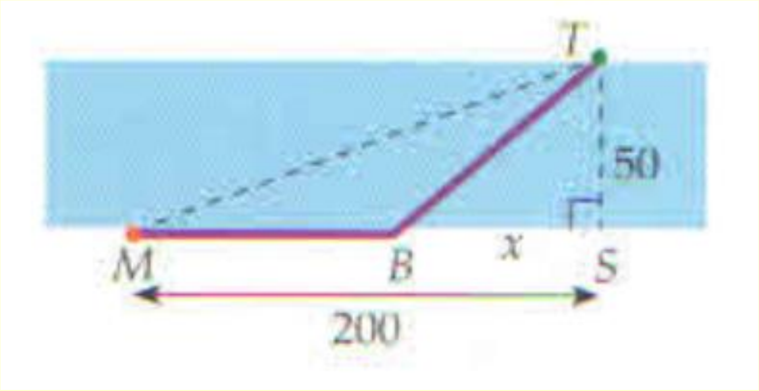
$\boldsymbol{x + y = I,}$
$\mathbf{min}(\boldsymbol{px^2 + qy^2}) = \mathbf{?}$

Mācību grāmatā [Š2, 74] kvadrātfunkcijas minimuma noteikšanai izmantoti pirmie divi atvasinājumi.

Uzdevums par izmaksu minimizāciju

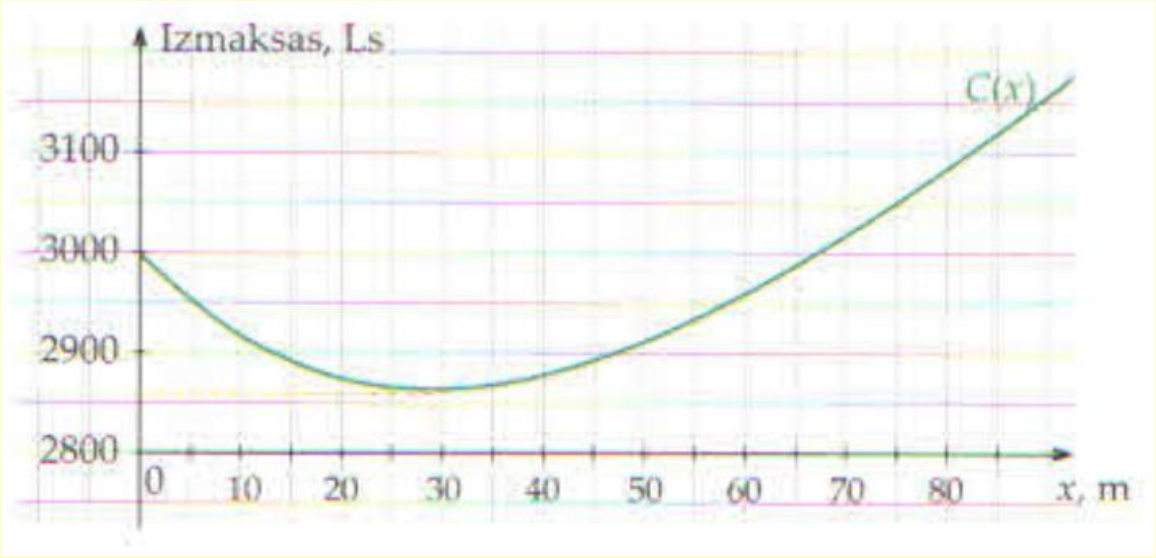
Skolas mācību grāmatā [SFF, 134] ir „pētīts” minimizācijas uzdevums, kuram piedēvēts saturs par kabeļa vilkšanu.

Māja atrodas 50m platas upes krastā. Lai mājai pieslēgtu elektrību, jāierīko kabelis no mājas līdz tuvākajam transformatoram, kas atrodas pretējā upes krastā. Kabeļa ievilkšana, iegremdējot to upes gultnē, izmaksā Ls 20 metrā, bet, ierokot zemē – Ls 10 metrā.
Kā jānovieto kabelis, lai tā ierīkošanas izmaksas būtu vismazākās?



$$C(x) = 10(200 - x) + 20\sqrt{2500 + x^2}$$

Jāatrod funkcijas minimums. Ir uzzīmēts funkcijas grafiks un sastādīta tabula un secināts, ka minimumu dod $x = 29$ un $C(x) = 1866{,}02...$



Ja jau grafiku zīmē ar programmu, tad rodas jautājums, kāpēc ekstrēms netiek meklēts ar programmas palīdzību?

Atrisināsim šo uzdevumu elementārā veidā, lietojot kvadrātfunkcijas īpašības.

$$C(x) = 10(200 - x) + 20\sqrt{2500 + x^2}$$

$$y := -x + 2\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow$$

$$(y + x)^2 = 4a^2 + 4x^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 - 2xy + 4a^2 - y^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 3(4a^2 - y^2)}}{3} = \frac{y \pm \sqrt{4y^2 - 12a^2}}{3} = \frac{y \pm 2\sqrt{y^2 - 3a^2}}{3} \Rightarrow$$

$$y_{\min} = a\sqrt{3} \Rightarrow x_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad x_{\min} = \frac{50\sqrt{3}}{3} = 28{,}86751\ldots$$

Valsts olimpiādes EU

63. VMO, 2013, 10. kl.

Funkcija

$$f(x) = (x+10)x(x-1)(x-11)$$

definēta visām reālām x vērtībām. Atrast mazāko **iespējamo** $f(x)$ vērtību**.**

Vingrinājums. Pārveidojiet f par kvadrātfunkciju.

Literatūra

Абельсон И. Б., Максимум и минимум, ОНТИ, 1935, 110 с.

Зетель С. И., Задачи на максимум и минимум,Гостехиздат, 1948, 224 с.

Крыжановский Д. А., Изопериметры, Москва, Физматгиз, 1959, 116 с.

Niven I., **Maxima and Minima without Calculus,**
Dolciani Mathematical Expositions, Math. Assoc. of America, No. 6, 1981.

Тихомиров В. М. **Рассказы о максимумах и минимумах,**
(Москва, Наука,1986, 190 с; Москва, МЦНМО, 2006, 202 с.);
Tikhomirov V. M., Stories About Maxima and Minima,
American Mathematical Society, 1991, pp. 200.

Актершев, С. П., **Задачи на максимум и минимум,**
Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005, 188 с.

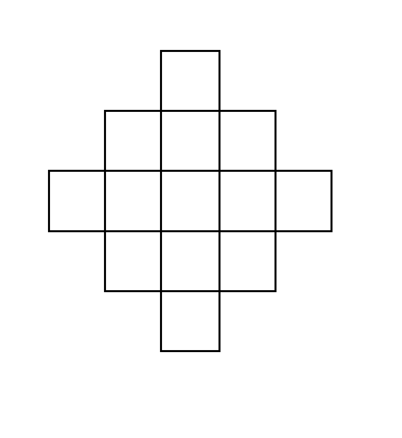
Протасов В. Ю., **Максимумы и минимумы в геометрии,**
Москва, МЦНМО, 2005, 58 с.

Cibulis A. **Ekstrēmu uzdevumi** 1., 2. daļa, Rīga, Mācību grāmata,
2003 (2. izd., **2007**, 106 lpp.); 2006, 102 lpp.

Diskrētā tipa ekstrēmu uzdevumi

Šī gada Novada MO ir viens ekstrēmu uzdevums:

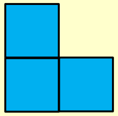
12.2. a) Parādi vienu veidu, kā 12. att. figūras katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli tā, lai jebkurā taisnstūrī 1 x 3 vai 3 x 1 ierakstīto skaitļu summa būtu 2020 un arī visu ierakstīto skaitļu summa būtu 2020. **b)** Parādi, kā prasīto izdarīt, lai figūrā būtu ierakstīti pēc iespējas vairāk dažādi skaitļi!



Diskrētā tipa ekstrēmu uzdevumi

Uzdevumi par figūru bloķēšanu

Iekrāsot rūtiņu kvadrātam 10 × 10 minimālo rūtiņu skaitu, lai nekur neveidojas stūrītis, bet, ja iekrāsotu vēl vienu jebkuru rūtiņu, tad jau veidotos stūrītis.



ZPD

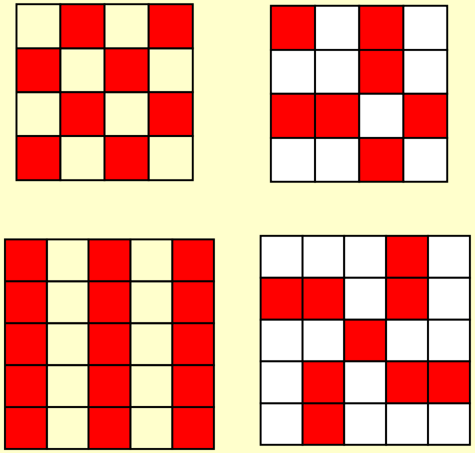
Apzīmēsim ar $V(n)$ iekrāsoto rūtiņu skaitu kvadrātā $n \times n$.

Uz ko tiecas attiecība

$$\frac{\max V(n)}{\min V(n-1)} \to ?,\ n \to \infty.$$

Piezīme. Lai aprēķinātu šādu robežu, nav obligāti zināt iekrāsoto rūtiņu skaita ekstremālās vērtības.

Anniņa kvadrātā 4 × 4 iekrāsoja dažas pelēkas rūtiņas tā, ka neveidojas neviens stūrītis, kam visas rūtiņas ir pelēkas. Ja Anniņa iekrāsos vēl jebkuru vienu rūtiņu, tad noteikti veidosies stūrītis, kam visas rūtiņas ir pelēkas. Jānītis, ievērojot tos pašus nosacījumus, iekrāsoja rūtiņas citā kvadrātā 4×4. Vai var gadīties, ka Anniņa iekrāsoja mazāk rūtiņu nekā Jānītis? Figūra stūrītis var būt arī pagriezta. [MO, 2. posms, 5. kl., 2019.]



Uzdevums p. d.

Velkot tikai pa rūtiņu līnijām,
uzzīmēt maksimālā laukuma 8-stūri,
ja tā malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 8.