1. Vai skaitli 123 var izteikt kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? Un skaitli 2019? Bet 2020? Kādus skaitļus ir iespējams izteikt kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu?

Atrisinājums. Trīs pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus varam apzīmēt ar n, $n+1$ un $n+2$. To summa ir $3n+3=3(n+1)$, tā dalās ar 3.

Tātad kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu var izteikt visus tos un tikai tos naturālos skaitļus, kas dalās ar 3 un ir vismaz 6 (jo mazākā iespējama trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa ir $1+2+3=6$). Tātad $123=40+41+42$ un $2019=672+673+674$ var izteikt prasītajā veidā; bet 2020 nedalās ar 3, tāpēc to nevar izteikt kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu.

2. Atrodi skaitļa $1^2+2^2+3^2+\dots+2020^2$ pēdējo ciparu!

Atrisinājums. Ievērojam, ka

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2=1+4+9+16+25+36+49+64+81+100=385.$$

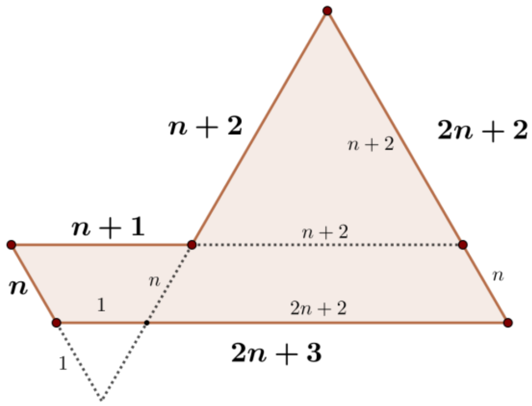
Lai atrastu dotās summas pēdējo ciparu, sagrupējam saskaitāmos grupās pa 10 saskaitāmajiem katrā grupā:

- 1. grupa $1^2+2^2+\dots+10^2$;
- 2. grupa $11^2+12^2+\dots+20^2$;
- 3. grupa $31^2+32^2+\dots+30^2$ utt.

Ir pāra skaits $(2020:10=202)$ grupu, katrai no tām summas pēdējais cipars ir 5, tātad uzdevumā dotās summas pēdējais cipars ir 0.

3. Trijstūru režģī, kurā katra trijstūra malas garums ir 1 vienība, pa trijstūru līnijām uzzīmē piecstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir $n; n+1; n+2; 2n+2; 2n+3$ vienības!

Atrisinājums. Skat. 1. att.



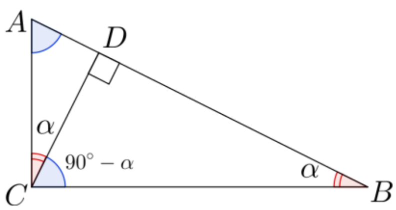
1. att.

4. Vai jebkuru taisnstūri var sagriezt n savstarpēji līdzīgos trijstūros?

Atrisinājums. Taisnstūra diagonāle sadala taisnstūri divos vienādos taisnleņķa trijstūros. Pierādīsim, ka patvaļīgu taisnleņķa trijstūri var sagriezt divos trijstūros, kas katrs ir līdzīgs sākotnējam trijstūrim.

Ja taisnais leņķis ir $\angle ACB$ (skat. 2. att.), tad no tā velk perpendikulu *CD* pret hipotenūzu *AB*. Trijstūri *ABC*, *ACD* un *CBD* ir līdzīgi (pēc pazīmes $\ell\ell$), jo$\angle ACB=\angle ADC=\angle CDB=90°$; $\angle CBA=\angle DCA=\angle DBC=\alpha$.

Tas nozīmē, ka, novelkot perpendikulu no taisnā leņķa virsotnes, sākotnējais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos trijstūros. Turpinot tādā pat veidā dalīt iegūtos taisnleņķa trijstūrus, prasīto taisnstūra sadalījumu var atrast jebkurai naturālai n $(n\geq 2)$ vērtībai.



2. att.

5. Doti 2016 skaitļi: 1^2; 2^2; 3^2; …; 2015^2; 2016^2. Vai starp šiem skaitļiem var salikt "+" un "−" zīmes tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu 0?

Atrisinājums. Jā, var. Ievērosim, ka divu pēc kārtas sekojošu skaitļu kvadrātu starpība ir $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Tāpat arī $(n+3)^2 - (n+2)^2 = 2n+5$ un tātad, saliekot starp jebkuriem četriem pēc kārtas sekojošiem kvadrātiem zīmes "$+ \; - \; - \; +$", iegūstam izteiksmi, kuras vērtība ir 4:

$$+n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = -(2n+1) + (2n+5) = 4$$

Savukārt, saliekot zīmes "$- + + -$", iegūstam izteiksmi, kuras vērtība ir -4:

$$-n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 - (n+3)^2 = 2n+1-(2n+5) = -4$$

Tātad, saliekot astoņiem pēc kārtas sekojošiem kvadrātiem zīmes "$+ - - + - + + -$", iegūstam izteiksmi, kuras vērtība ir 0:

$$\left(n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2\right) + \left(-(n+4)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 - (n+7)^2\right) =$$
$$= 4 - 4 = 0$$

Tā kā 2016 dalās ar 8, tad visus kvadrātus var sadalīt grupās pa 8 un katrā no tām salikt zīmes tā, ka šīs grupas summa ir 0, tātad arī visas izteiksmes summa ir 0.

6. Katram naturālam skaitlim n aprēķināt summu $1+3+5+\cdots+(2n-1)$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka virkne $1;\ 3;\ 5;\ \ldots;\ 2n-1$ ir aritmētiskā progresija, tātad prasīto summu var aprēķināt pēc formulas $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{1+2n-1}{2}n = n^2$$

7. Dota virkne $\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{5}{8};\frac{7}{16};\frac{9}{32};\ldots$. Nosaki virknes n-tā locekļa formulu!

Atrisinājums. Ievērojam, ka skaitītājā ir nepāra skaitļi, bet saucējā ir divnieka pakāpes, tātad $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

8. Aprēķini summu $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\cdots+\frac{1}{2019\cdot 2020}$.

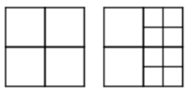
Atrisinājums. Doto summu var pārrakstīt formā

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{2019\cdot 2020}$$

Ievērojam, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Tāpēc

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{2019\cdot 2020} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{2020} = \frac{504}{2020} = \frac{126}{505}.$$

9. Ja kvadrātu var sadalīt n mazākos kvadrātos tā, ka ir ne vairāk kā divu dažādu izmēru kvadrāti, tad skaitli n sauksim par jauku. Piemēram, skaitļi 4 un 10 ir jauki (3. att.).



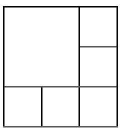
3. att.

a) Pierādi, ka skaitlis 6 ir *jauks*!

b) Pierādi, ka skaitlis 2015 ir *jauks*!

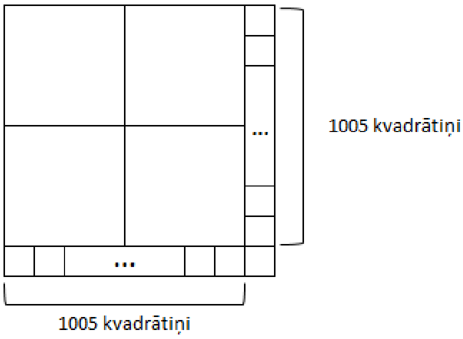
c) Pierādi, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*!

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 4. att.



4. att.

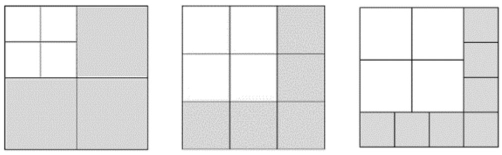
b) Skat., piemēram, 5. att. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām 1006 vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat. 5. att.). Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos mazākos kvadrātos (skat. 5. att.)



5. att.

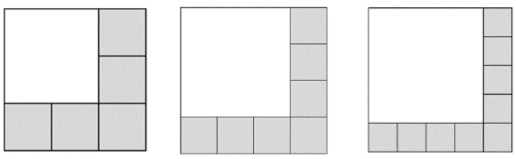
c) Šķirojam divus gadījumus.

- Ja n ir nepāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 5$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 6. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Atlikusī dotā kvadrāta daļa ir kvadrāts, kuru sadalām četros vienādos kvadrātos (skat., piemēram, 6. att. baltos kvadrātus). Tātad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 5$ kvadrātos, līdz ar to skaitlis n ir *jauks*.



6. att.

- Ja n ir pāra skaitlis, tad to varam izteikt formā $n = 2k + 2$, kur k ir naturāls skaitlis. Dotā kvadrāta labo malu un apakšējo malu sadalām $k + 1$ vienādos nogriežņos. Uzzīmējam mazākus kvadrātus tā, lai katrs iegūtais nogrieznis būtu mala tieši vienam no šiem kvadrātiem (skat., piemēram, 7. att. iekrāsotos kvadrātus). Esam ieguvuši $2k + 1$ mazus kvadrātus. Tā kā atlikusī dotā kvadrāta daļa arī ir kvadrāts, tad dotais kvadrāts ir sadalīts $2k + 2$ kvadrātos un skaitlis n ir *jauks*.



7. att.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka katrs naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 5, ir *jauks*.

10. Kādā pilsētā ir n detektīvi ($n \geq 2$) un cita starpā tie izseko arī viens otru. Zināms, ka jebkuriem diviem detektīviem *A* un *B* vai nu *A* izseko *B*, vai *B* izseko *A*. Pierādīt, ka visus detektīvus var nostādīt vienā rindā tā, ka pirmais izseko otro, otrais izseko trešo, ..., $(n-1)$-ais izseko n-to.

Atrisinājums. Apgalvojumu pierādīsim ar matemātisko indukciju pēc detektīvu skaita n.

Indukcijas bāze. Ja $n = 2$, tad apgalvojums ir patiess, t. i., $A_1 \to A_2$ (detektīvs A_1 izseko detektīvu A_2).

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka k detektīvi $A_1, A_2, \dots, A_k$ nostādīti rindā atbilstoši uzdevuma nosacījumiem: $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_k$.

Induktīvā pāreja. Aplūkojam detektīvu A_{k+1}. Iespējami divi gadījumi.

1) Ja detektīvs A_{k+1} izseko detektīvu A_1 , tas ir, $A_{k+1} \to A_1$), tad detektīvu A_{k+1} var novietot rindas sākumā.
2) Ja $A_1 \to A_{k+1}$, tad iespējami divi gadījumi:
   - ja visiem i izpildās $A_i \to A_{k+1}$, tad detektīvu A_{k+1} var nostādīt rindas beigās;
   - ja visiem i neizpildās, ka $A_i \to A_{k+1}$, tad ņemam mazāko i tādu, ka $A_{k+1} \to A_i$, tādā gadījumā $A_{i-1} \to A_{k+1}$ un detektīvu A_{k+1} var nostādīt rindā starp detektīviem A_{i-1} un A_i.

Līdz ar to esam pieradījuši uzdevumā prasīto.