MATEMĀTISKĀS INDUKCIJAS METODE

Elīna Buliņa
01.12.2018.

Indukcija - (no latīņu valodas ‘inductio’ – uzvedināšana, ierosināšana) – loģisks slēdziens pārejot no atsevišķiem gadījumiem uz vispārīgu secinājumu, no atsevišķiem faktiem uz vispārinājumu.

Induktīvā spriešana – spriešanas paņēmiens, kad secinājumi tiek iegūti, balstoties uz vairāku eksperimentu vai novērojumu laikā gūtiem rezultātiem.

Matemātiskā indukcija

1. Indukcijas bāze

Pamato, ka izteikums A *ir patiess, ja* $n = 1$

2. Induktīvais pieņēmums

Pieņem, ka izteikums A *ir patiess,*
ja $n = k, k \in \mathbb{N}$

3. Induktīvā pāreja

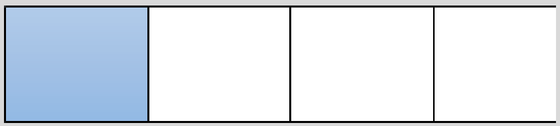
Pierāda, ka tādā gadījumā izteikums A ir patiess
arī tad, *ja* $n = k + 1$

4. Secinājums

Secina, ka izteikums A ir patiess visiem $n \in \mathbb{N}$

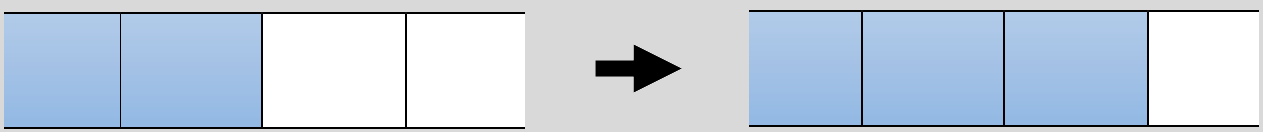
Matemātiskās indukcijas shēma

Indukcijas bāze



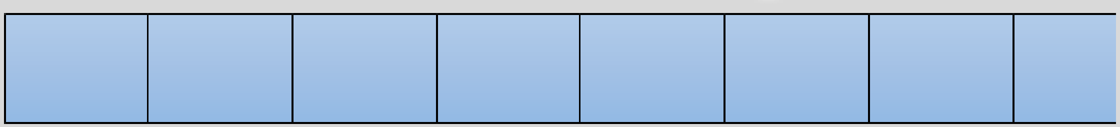
$A(1)$ *patiess*

Induktīvā pāreja



$A(k)$ $A(k+1)$

Secinājumi



$A(1)$

$\boldsymbol{A(n)}$ ***patiesa visiem*** $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$

Pierādīt, ka

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Indukcijas bāze

$n = 1$, tad $1^2 = 1$ un $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, izpildās

Induktīvais pieņēmums ($n = k$)

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Induktīvā pāreja ($n = k + 1$)

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) =$$

$$= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(k(k + 1) + 2(k + 1)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2) =$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

<u>Secinājums</u>

Tā kā izmantojot induktīvo pieņēmumu tika pierādīts, ka $n = k + 1$ gadījums arī izpildās, var secināt, ka

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīt, ka visiem $n \in \mathbb{N}$ izpildās

$$\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\cdots+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{n}{5(6\mathrm{n}+5)}$$

Indukcijas bāze

$n = 1$, tad $\frac{1}{5 \cdot 11} = \frac{1}{5 \cdot (6 \cdot 1 + 5)}$ jeb $\frac{1}{55} = \frac{1}{55}$

Induktīvais pieņēmums ($n = k$)

$$\frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(6k-1)(6k+5)} = \frac{k}{5(6k+5)}$$

Induktīvā pāreja ($n = k + 1$)

$$\underbrace{\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\cdots+\frac{1}{(6k-1)(6k+5)}}_{\text{pēc induktīvā pieņēmuma}}+\frac{1}{(6k+5)(6k+11)}==$$

$$\frac{k}{5(6k+5)}+\frac{1}{(6k+5)(6k+11)}=\frac{\mathrm{k(6k+11)+5}}{5(6k+5)(6k+11)}=$$

$$=\frac{6k^2+11k+5}{5(6k+5)(6k+11)}=\frac{6\left(k+\frac{5}{6}\right)(k+1)}{5(6k+5)(6k+11)}=$$

$$=\frac{(6k+5k)(k+1)}{5(6k+5)(6k+11)}=\frac{k+1}{5(6k+11)}=\frac{k+1}{5(6(k+1)+5)}$$

Secinājums

Tā kā, izmantojot induktīvo pieņēmumu, tika pierādīts, ka $n = k + 1$ gadījums arī izpildās, var secināt, ka

$$\frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 17} + \cdots + \frac{1}{(6k-1)(6k+5)} = \frac{k}{5(6k+5)}$$

Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīt, ka visiem $n \in \mathbb{N}$

$$5^n + 2 \cdot 3^n - 3 \text{ dalās ar } 8$$

Indukcijas bāze

$n = 1$, tad

$$5^1 + 2 \cdot 3^1 - 3 = 5 + 6 - 3 = 8 \text{ dalās ar } 8$$

Induktīvais pieņēmums ($n = k$)

$$\mathbf{5}^{\boldsymbol{k}} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{3}^{\boldsymbol{k}} - \mathbf{3} \text{ dalās ar } \mathbf{8}$$

Induktīvā pāreja ($n = k + 1$)

$$5^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1} - 3 =$$

$$= 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 3^k \cdot 3 - 3 =$$

$$= 5 \cdot \left(5^k + 2 \cdot 3^k - 3\right) - 4 \cdot 3^k + 12 =$$

$$= 5 \cdot \underbrace{\left(5^k + 2 \cdot 3^k - 3\right)}_{\text{dalās ar 8}} - \underbrace{4(3^k - 3)}_{\text{dalās ar 8}}$$

Secinājums

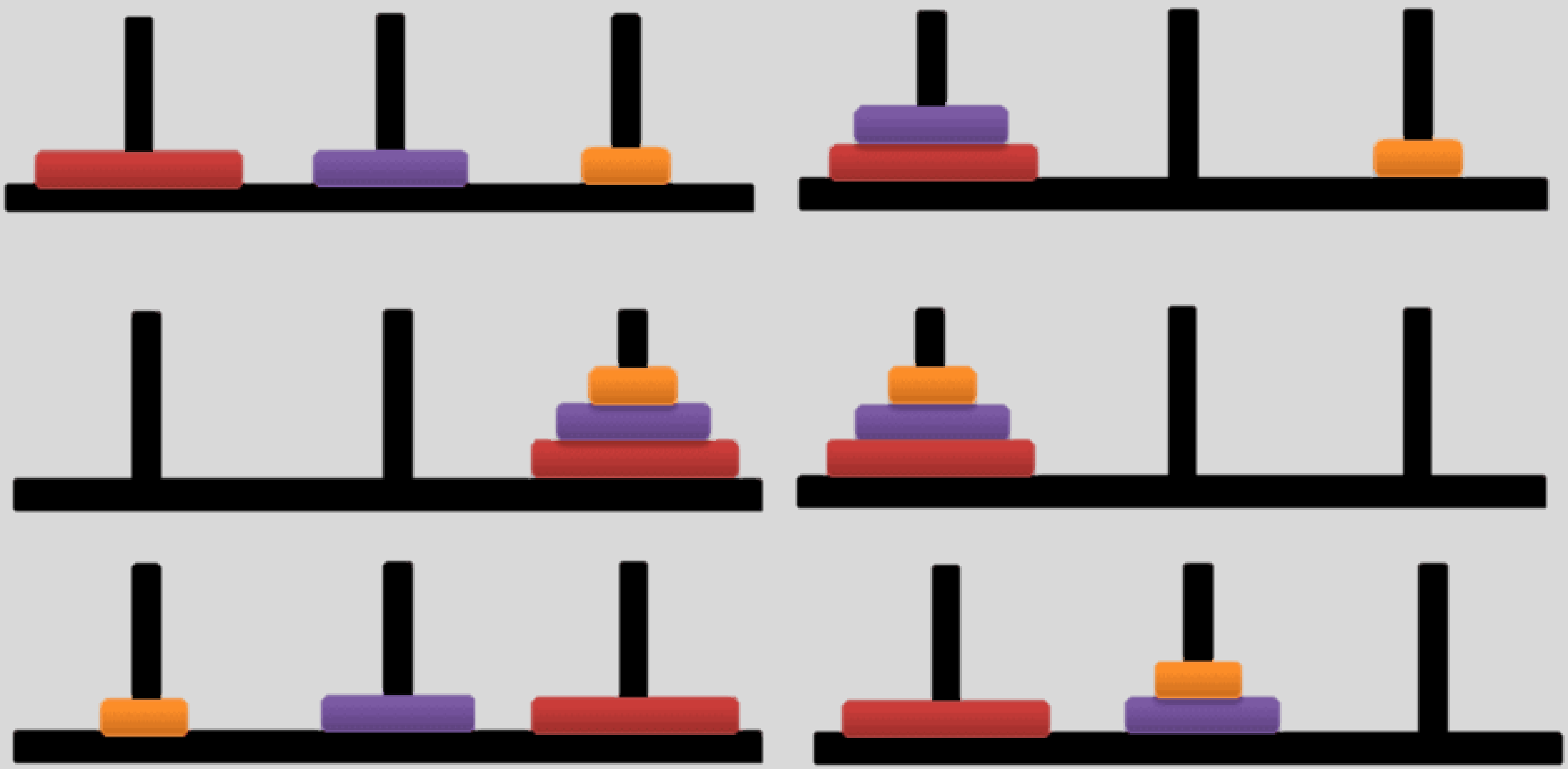
Tā kā, izmantojot induktīvo pieņēmumu, tika pierādīts, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$ gadījumā var secināt, ka visiem $n \in \mathbb{N}$

$\mathbf{5}^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{3}^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{3}$ dalās ar 8

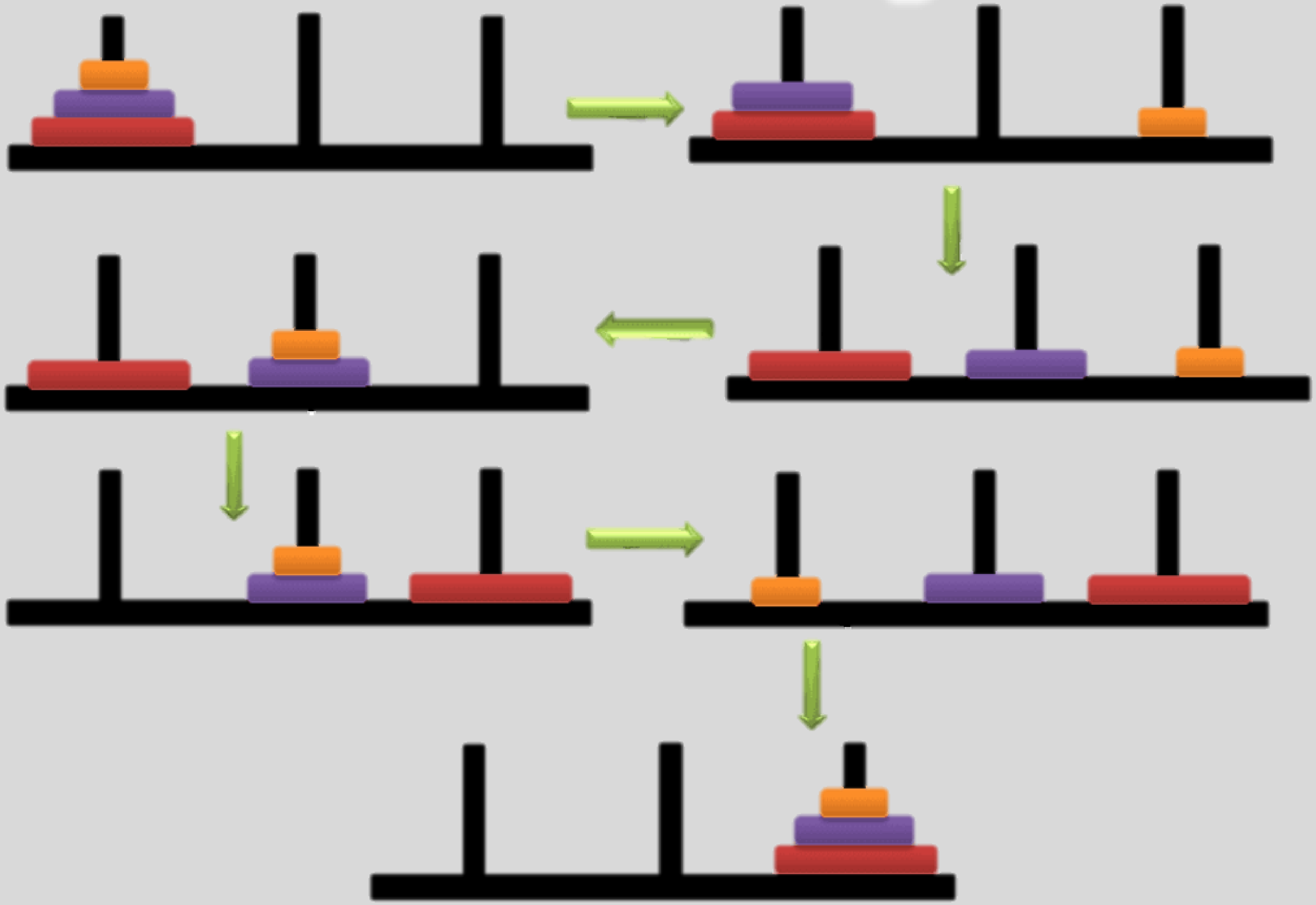
Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādi, ka visiem $n \in \mathbb{N}$

- $7^n + 3^{\mathrm{n+1}}$ **dalās ar 4**
- $5^{2n} - 1$ **dalās ar 24**
- $6^n + 20n - 1$ **dalās ar 25**

Hanoe torņi



Hanoe torņi



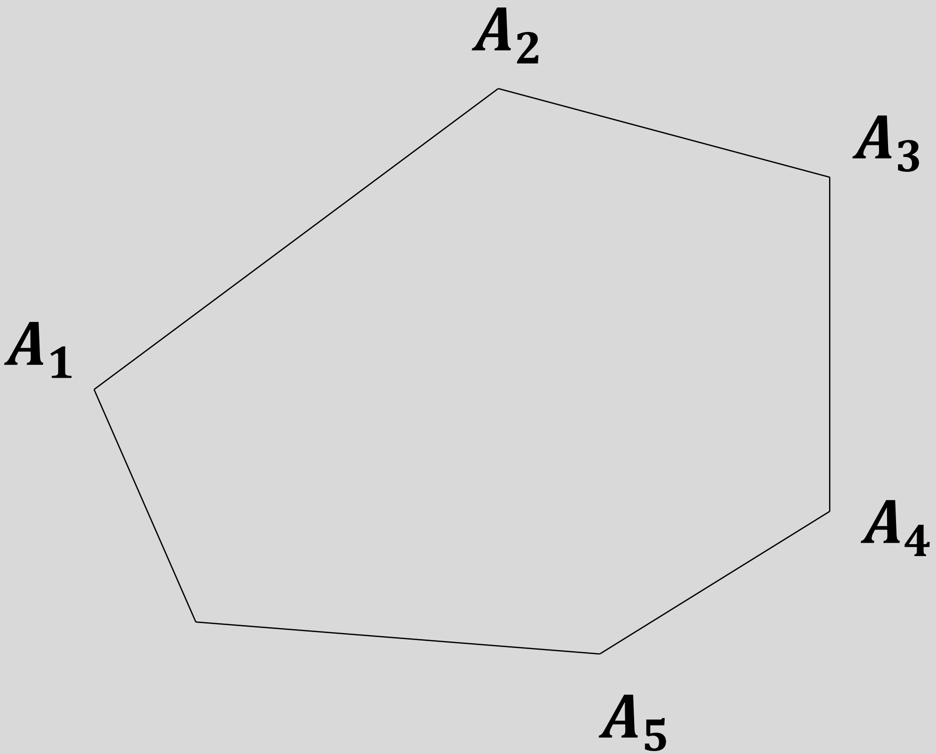
Hanoe torņi

Šo uzdevumu izdomāja Eduards Lukass (Indijā).

Doti n diski, viens par otru mazāks, un ar caurumiem vidū. Tāpat arī doti 3 stieņi, uz kuriem diskus uzvērt. Mērķis ir pārvietot visus n diskus uz cita stieņa, ievērojot sekojošus noteikumus:

1. Vienlaicīgi drīkst pārvietot tikai vienu disku;
2. Mazāka izmēra disks drīkst atrasties tikai virs lielāka izmēra diska.

Pierādīt, ka izliekta n-stūra leņķu summa ir $180^o(n-2)$, ja $n \geq 3$.



Paldies par uzmanību!