1 Kas ir sakārtojums?

Šajā lekcijā iepazīsimies ar sakārtojumiem. Redzēsim, ka tie ir visur, un apskatīsim daudzus dažādus piemērus. Galīgas sakārtotās kopas vizualizēsim ar Hases diagrammām.

1.1 Definīcija un piemēri

Gan ikdienā, gan matemātikā bieži saskaramies ar to, ka objekti (vai cilvēki, vai dzīvnieki,...) ir sakārtoti pēc dažādiem kritērijiem. Piemēram, reālie skaitļi ir sakārtoti pēc tā, kurš ir lielāks. Radinieki ciltskokā ir sakārtoti pēc tā, kurš ir kā pēcnācējs. Arī sociālas hierarhijas ir sakārtojumi. Barības ķēdes sakārto organismus pēc tā, kurš kuru apēd. Vārdi vārdnīcās mēdz būt sakārtoti alfabētiskā secībā.

Sakārtojuma jēdzienu var matemātiski formalizēt šādi:

Definition 1.1. Divvietīgu attiecību $\leq$ kopā P sauc par *sakārtojumu*, ja visiem $x, y, z \in P$ izpildās

1. $x \leq x$ (*refleksivitāte*),
2. ja $x \leq y$ un $y \leq x$, tad $x = y$ (*antisimetrija*),
3. ja $x \leq y$ un $y \leq z$, tad $x \leq z$ (*transitivitāte*).

Pāri $\langle P, \leq \rangle$ tad sauc par *sakārtotu kopu.*

Example 1.2. Piemēri no matemātikas:

- $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ un $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, kur $\leq$ ir parastais sakārtojums,
- $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ – kopas X visu apakškopu saime,
- $\langle \mathbb{N}_0, \preceq \rangle$ – naturālie skaitļi, ieskaitot 0, ar dalāmības sakārtojumu: $n \preceq m$, ja n ir m dalītājs (tas ir, $m = nk$ kādam k).

Definition 1.3. Sakārtotu kopu $\langle P, \leq \rangle$ sauc par

- *ķēdi*, ja visiem $x, y \in P$ izpildās $x \leq y$ vai $y \leq x$,
- *antiķēdi*, ja visiem $x, y \in P$ no $x \leq y$ izriet $x = y$.

Example 1.4. $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ un $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ ir ķēdes.

Jebkura kopa A ir antiķēde ar vienādības attiecību kā sakārtojumu: $\langle A, = \rangle$.

1.2 Izomorfismi

Definition 1.5. Pieņemsim, ka $\langle P, \leq_P \rangle$ un $\langle Q, \leq_Q \rangle$ ir sakārtotas kopas. Attēlojumu $\phi : P \to Q$ sauc par *sakārtojumu izomorfismu*, ja ϕ ir sirjekcija un visiem $x, y \in P$ izpildās

$$x \leq_P y \text{ tad un tikai tad, ja } \phi(x) \leq_Q \phi(y).$$

Šajā vietā varbūt ir vērts atgādināt, kas ir sirjekcija:

Definition 1.6. Attēlojumu $f:\ A\to B$ sauc par

- *sirjekciju*, ja visiem $b\in B$ eksistē $a\in A$ ar $f(a)=b$,
- *injekciju*, ja visiem $x,y\in A$ no $f(x)=f(y)$ izriet $x=y$,
- *bijekciju*, ja f ir gan sirjekcija, gan injekcija.

Atceroties izomorfismu definīcijas citās algebras nozarēs (piemēram, grupu izomorfismus, pusgrupu izomorfismus, gredzenu izomorfismus,...), mēs varētu apmulst, jo tajās mēdz prasīt, lai attēlojums būtu bijekcija. Kāpēc sakārtojumu izomorfisma definīcijā prasa tikai sirjekciju? Izrādās, ka ar to pietiek – ja ϕ apmierina visas definīcijas prasības, tad mēs dabūjam par velti arī to, ka ϕ ir bijekcija:

Lemma 1.7. *Katrs sakārtojumu izomorfisms ir bijekcija.*

Pierādījums. Pieņemsim, ka $\langle P,\leq_P\rangle$, $\langle Q,\leq_Q\rangle$ ir sakārtotas kopas un $\phi:\ P\to Q$ ir sakārtojumu izomorfisms. Lai pierādītu, ka ϕ ir bijekcija, pietiek pierādīt, ka tā ir injekcija.

Izvēlamies patvaļīgus $x,y\in P$. Pieņemsim, ka $\phi(x)=\phi(y)$, un pierādīsim, ka tad arī $x=y$.

Tā kā $\phi(x)=\phi(y)$, tad no refleksiviātes kopā Q ($\phi(x)\leq_Q\phi(y)$, sk. Definīciju 1.1) izriet

$$\phi(x)\leq_Q\phi(y)\ \text{un}\ \phi(y)\leq_Q\phi(x).$$

Tā kā ϕ ir izomorfisms, no šīm vienādībām izriet

$$x\leq_P y \text{ un } y\leq_P x.$$

Izmantojot antisimetriju (sk. Definīciju 1.1), secinām, ka $x=y$. Tātad ϕ ir injekciju. □

1.3 Hases diagrammas

Sakārtotās kopas definīcija ir samērā abstrakta, bet tūlīt redzēsim, ka vismaz galīgas kopas gadījumā sakārtojumus var uzskatāmi vizualizēt. Pirms tam jāiepazīstas ar vēl divām attiecībām, kuras definē, izejot no dota sakārtojuma kādā kopā.

Piemēram, reālajos skaitļos mēdz lietot ne tikai sakārtojumu $\leq$, bet arī attiecību $<$. Šāda attiecība eksistē arī patvaļīgā sakārtotā kopā:

Definition 1.8. Sakārtotā kopā $\langle P,\leq\rangle$ rakstām $x<y$, ja

$$x\leq y \text{ un } x\neq y.$$

Attiecību $<$ sauc par *stingro sakārtojumu* sakārtotajā kopā $\langle P,\leq\rangle$.

Otrkārt, dažās sakārtotās kopās ir jēga runāt par iepriekšējo elementu pirms x, vai par nākamo elementu aiz x. Piemēram, sakārtotajā kopā $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nākamais elements aiz 3 ir 4.

Definition 1.9. Sakārtotā kopā $\langle P, \leq \rangle$ rakstām $x \prec y$ (sakām "*x ir tieši zem y*" vai "*x ir tieši pirms y*"), ja izpildās

1. $x < y$,
2. Visiem $z \in P$, ja $x \leq z < y$, tad $x = z$.

Attiecību $\prec$ sauc par *nākamības attiecību* sakārtotajā kopā $\langle P, \leq \rangle$ (angliski *covering relation*).

Example 1.10.

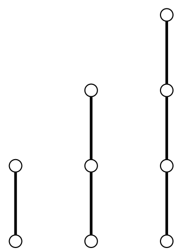
- Sakārtotajā kopā $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ (veselie skaitļi ar parasto sakārtojumu) $2 \prec 3$ un $3 \prec 4$, bet $2 \not\prec 4$.
- Sakārtotajā kopā $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ (kopas X apakškopu saime ar apakškopu sakārtojumu), ja ir dota apakškopa $A \subset X$ un elements $b \in X \setminus A$, tad $A \prec A \cup \{b\}$. Savukārt, ja $a \in A$, tad $A \setminus \{a\} \prec A$. Tātad mēdz eksistēt vairākas kopas, kuras ir "nākamās aiz A", un arī vairākas, kuras ir tieši pirms A.
- Sakārtotajā kopā $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ (naturālie skaitļi ar dalāmības sakārtojumu) $2 \prec 4$, $2 \prec 6$ un $3 \prec 6$.

Definition 1.11. Par sakārtotas kopas $\langle P, \leq \rangle$ *Hases diagrammu* sauc zīmējumu plaknē $\mathbb{R}^2$ ar šādām īpašībām:

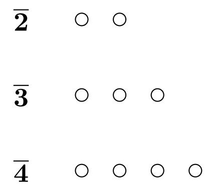
1. Katram $x \in P$ atbilst punkts $A_x \in \mathbb{R}^2$ un riņķa līnija ar centru punktā A_x. Turklāt, ja $x \neq y$, tad arī $A_x \neq A_y$.
2. Ja $x \prec y$, tad ir novilkts nogrieznis $\overline{A_x A_y}$.
3. Pieņemsim, ka$x, y \in P$ ar $x \leq y$.
   (a) Tad punkta A_x y-koordināte ir mazāka vai vienāda ar punkta A_y y-koordināti.
   (b) Ja kādam $z \in P$ punkts A_z pieder nogrieznim $\overline{A_x A_y}$, tad $A_z = A_x$ vai $A_z = A_y$. (Riņķa līniju rādiusus vienmēr var izvēlēties tik mazus, lai arī riņķa līnija ap A_z nešķeltu un nepieskartos nevienam nogrieznim, kam A_z nav galapunkts.)

Konkrēti tas izskatās šādi:

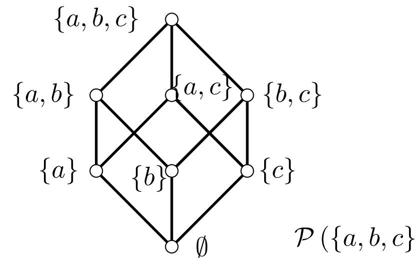
Example 1.12. Ja sakārtojam kopu $\{1, 2, ...n\}$ pēc parastā skaitļu sakārtojuma $\leq$, tad iegūstam ķēdi $\mathbf{n}$ – attēlā ir piemēri ar $n = 2$, $n = 3$ un $n = 4$. Ja tās pašas kopas sakārtojam pēc sakārtojuma $=$, tad rodas antiķēdes $\overline{\mathbf{n}}$. Pēdējā diagramma parāda sakārtojumu $\langle \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$.



2 **3** **4**



$\overline{\mathbf{2}}$
$\overline{\mathbf{3}}$
$\overline{\mathbf{4}}$



$\{a,b,c\}$
$\{a,b\}$
$\{a,c\}$
$\{b,c\}$
$\{a\}$
$\{b\}$
$\{c\}$
$\emptyset$
$\mathcal{P}(\{a,b,c\})$