LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

LINEĀRĀ PROGRAMMĒŠANA

Reinis Lāma

2018. gada 3. martā

Lineārā programmēšana

Lineārā programmēšana ir matemātikas nozare, kas nodarbojas ar vairāku mainīgu lineāru funkciju minimālo un/vai maksimālo vērtību atrašanas problēmām tādās kopās, kuras tiek aprakstītas ar lineārām vienādībām un/vai nevienādībām (lineāriem nosacījumiem).

- L. V. Kantarovičs, 1939: “Matemātiskās metodes ražošanas organizēšanā un plānošanā”
- Dž. Dancigs (G. B. Dantzig)
  - 1947: Simpleksa metode
  - 1949: “Programming in Linear Structures”
  - 1963: “Linear Programming and Extensions”

Lineārās programmēšanas uzdevums

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

- f - mērķa funkcija
- n - mainīgo skaits, m - nosacījumu skaits
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ - mainīgie (nezināmie)
- $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ - nosacījumu koeficienti, b_n - nosacījumi
- $c_1, c_2, \dots, c_n$ - mērķa funkcijas koeficienti

Ražošanas plānošanas uzdevums

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	6	2	1
R_2	4	1	1
R_3	12	1	4
R_4	7	3	0
Peļņa, ko dod produkcijas vienība		1	2

Uzņēmumam ražojot divu veidu produkciju P_1 un P_2, jāizmanto četri resursi R_1, R_2, R_3 un R_4. Jānosaka, cik daudz katra veida produkcija ir jāražo, lai kopējā peļņa būtu vislielākā.

Ražošanas plānošanas uzdevums

- x_1 - saražotās produkcijas P_1 daudzums
- x_2 - saražotās produkcijas P_2 daudzums
- f – peļņas funkcija

Produkcija	P_1	P_2
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	1	2

- Ražošanas plānu apraksta vektors (x_1, x_2).
- Ražošanas plānošanas uzdevums ir uzdevums par peļņas funksijas maksimālo vērtību:

$$f = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

Ražošanas plānošanas uzdevums

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	6	2	1
R_2	4	1	1
R_3	12	1	4
R_4	7	3	0

Nosacījumu sistēma: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Ražošanas plānošanas uzdevums

$$f = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Vektoru (x_1, x_2), kas apmierina visus nosacījumus, sauc par ražošanas plānu. Par optimālo ražošanas plānu sauc plānu (x_1^*, x_2^*), kas maksimizē mērķa funkciju.

Optimālais ražošanas plans: $x_1^* = 1\frac{1}{3}$, $x_2^* = 2\frac{2}{3}$.

Uztura optimizēšanas uzdevums

Uzturvielas	Minimālais nepieciešamais daudzums	Uzturvielu daudzums produkta vienībā	
		P_1	P_2
U_1	8	2	1
U_2	22	4	3
U_3	10	1	3
Produkta vienības cena		1	1

Pieņemsim, ka ir nepieciešams uzņemt trīs dažādas uzturvielas U_1, U_2 un U_3. To var izdarīt, ēdot divus dažādus produktus P_1 un P_2.
Tabulā dots uzturvielu nepieciešamais minimums diennakts deva, katras uzturvielas daudzums vienā produkta vienībā, kā arī produktu vienības cena.
Jānosaka diennākts vislētākā deva.

Uztura optimizēšanas uzdevums

Pieņemsim, ka diennakts devu veido $x_1 + x_2$ produkti:

- x_1 - produkta P_1 daudzums,
- x_2 - produkta P_2 daudzums.

Diennakts ēdienu devas cenu apzīmēsim ar f: $f = x_1 + x_2$.

Katras uzturvielas daudzumam jābūt ne mazākam kā norādītais daudzums

- Nosacījums uzturvielai U_1: $2x_1 + x_2 \geq 8$
- Nosacījums uzturvielai U_2: $4x_1 + 3x_2 \geq 22$
- Nosacījums uzturvielai U_3: $x_1 + 3x_2 \geq 10$

Uztura optimizēšanas uzdevums

$$f = x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 22 \\ x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Par optimālo diennakts ēdiena devu uzskata devu, kas apmierina visus nosacījumus un minimize mērķa funkciju.
- Optimālā diennakts ēdienu deva: $x_1^* = 4, x_2^* = 2$.

Transportа uzdevums

Noteikta veida krava (prece), kas atrodas dažādās vietās pie kravas piegādātājiem, jānogādā dažādiem šīs kravas patērētājiem (saņēmējiem).

Ir zināms kravas daudzums, kas atrodas pie katra piegādātāja (piegādātāja piedāvājums). Ir zināms katra patērētāja pieprasījums. Kopējais pieprasījums nepārsniedz kopējo piedāvājumu.

Ir zināmas transportēšanas izmaksas, nogādājot vienu šīs kravas vienību no katra piegādātāja katram patērētājam.

Patērētājam nepieciešamais kravas daudzums jānogādā tā, lai kopējās transportēšanas izmaksas būtu minimālas.

Transporta uzdevums

Patērētāji / Piegādātāji	Kravas vienības transportēšanas izmaksas			Piegādātāju jauda (piedāvājums)
	V_1	V_2	V_3	
N_1	17	43	29	100
N_2	32	65	18	110
Patērētāju pieprasījums	50	70	80	

Diviem piegādātājiem N_1 un N_2 jānogādā produkcija trim patērētājiem V_1, V_2 un V_3. Tabulā dots katra piegādātāja iespējamais produkcijas piegādes apjoms, patērētāju pieprasījumu apjomi un katra piegādātāja transportēšanas izmaksas (centos), vedot vienu produkcijas vienību katram patērētājam.
Cik daudz produkcijas jāved no katra piegādātāja katram patērētājam, lai kopējās transportēšanas izmaksas būtu minimālas?

Transporta uzdevums

Tabulā dots katra piegādātāju piedāvājumu apjomi, patērētāju pieprasījumu apjomi un transportēšanas izmaksas.

	V_1	V_2	V_3	Piedāvājums
N_1	17	43	29	100
N_2	32	65	18	110
Pieprasījums	50	70	80	

Otrā tabula satur mainīgo (piegādes daudzumu) apzīmējumus.

	V_1	V_2	V_3
N_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
N_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}

Kopējam transportēšanas izmaksām jābūt minimālām:

$$f = 17x_{11} + 43x_{12} + 29x_{13} + 32x_{21} + 65x_{22} + 18x_{23} \rightarrow min$$

Transporta uzdevums

	V_1	V_2	V_3	Piedāvājums
N_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	100
N_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	110
Pieprasījums	50	70	80	

Katra piegādātāja nosūtītais produkcijas daudzums visiem patērētājiem nedrīkst pārsniegt kopējo produkcijas daudzumu, kas atrodas pie piegādātāja:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 110.$$

Katram patērētājam jāsaņem viss tam nepieciešamais produkcijas daudzums:

$$x_{11} + x_{21} = 50;$$
$$x_{12} + x_{22} = 70;$$
$$x_{13} + x_{23} = 80.$$

Transporta uzdevums

$$f = 17x_{11} + 43x_{12} + 29x_{13} + 32x_{21} + 65x_{22} + 18x_{23} \to min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 110 \\ x_{11} + x_{21} = 50 \\ x_{12} + x_{22} = 70 \\ x_{13} + x_{23} = 80 \\ x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0 \\ x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0 \end{cases}$$

LPU (lineārās programmēšanas uzdevuma) grafiskā risināšana

Grafiski var atrisināt lineārās programmēšanas uzdevumus, kuri satur tikai divus nezināmos:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max$$

vai

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

LPU grafiskā risināšana

- Uzzīmēt koordinātu plakni, kurā pirmo mainīgo atliek uz abscisas ass, bet otro – uz ordinātu ass.
- Aplūkot tikai koordinātu plaknes pirmo kvadrantu:
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$
- Atrisināt grafiski katru nevienādību $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ (atrisinājums ir pusplakne).
- Attēlot pieļaujamo punktu kopu (plānu kopu) kā atrasto pusplakņu šķēlumu.
- Uzzīmēt mērķa funkcijas līmeņa līniju: $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ (t.i. $f = d$), kur d ir parametrs.
- Mainot parametra d vērtību, noskaidrot, kurā no pieļaujamo punktu kopas virsotnēm mērķa funkcija sasniedz optimālo vērtību.

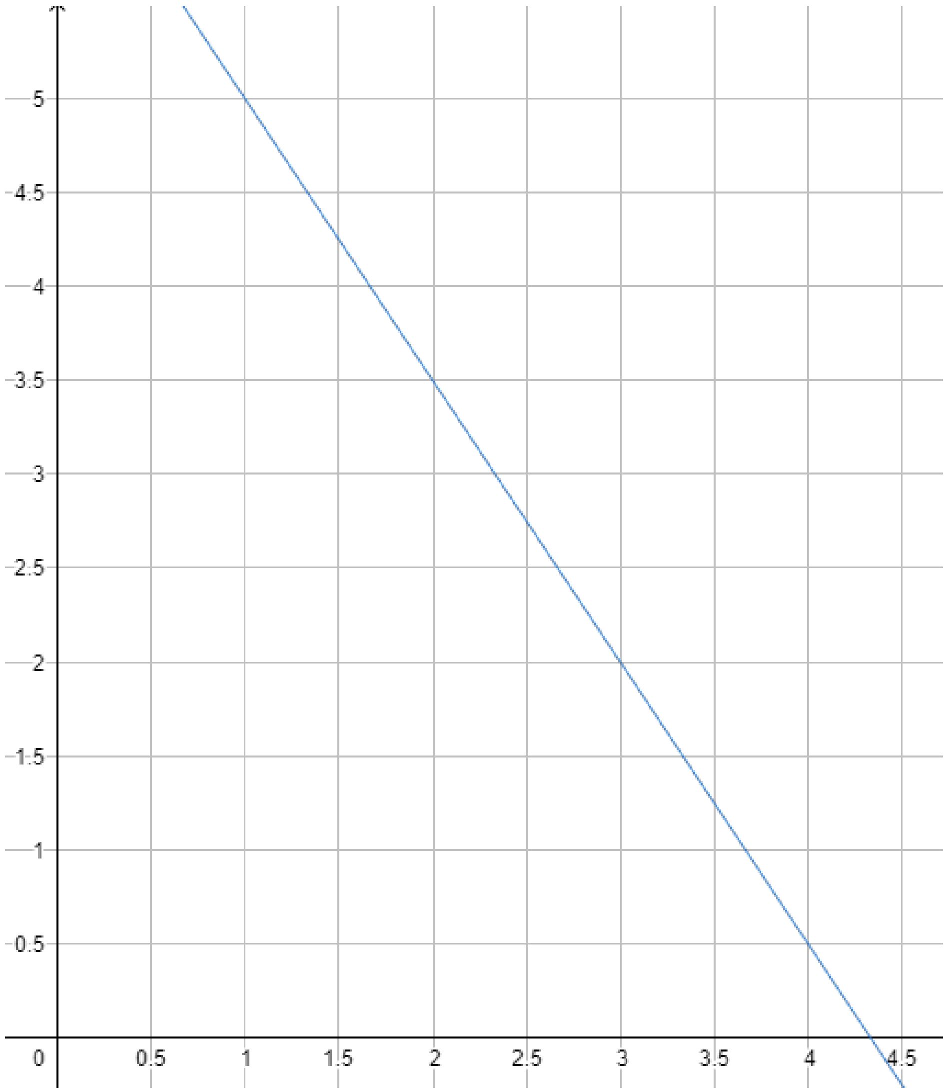
LPU grafiskā risināšana

Nevienādības grafiskā risināšana

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

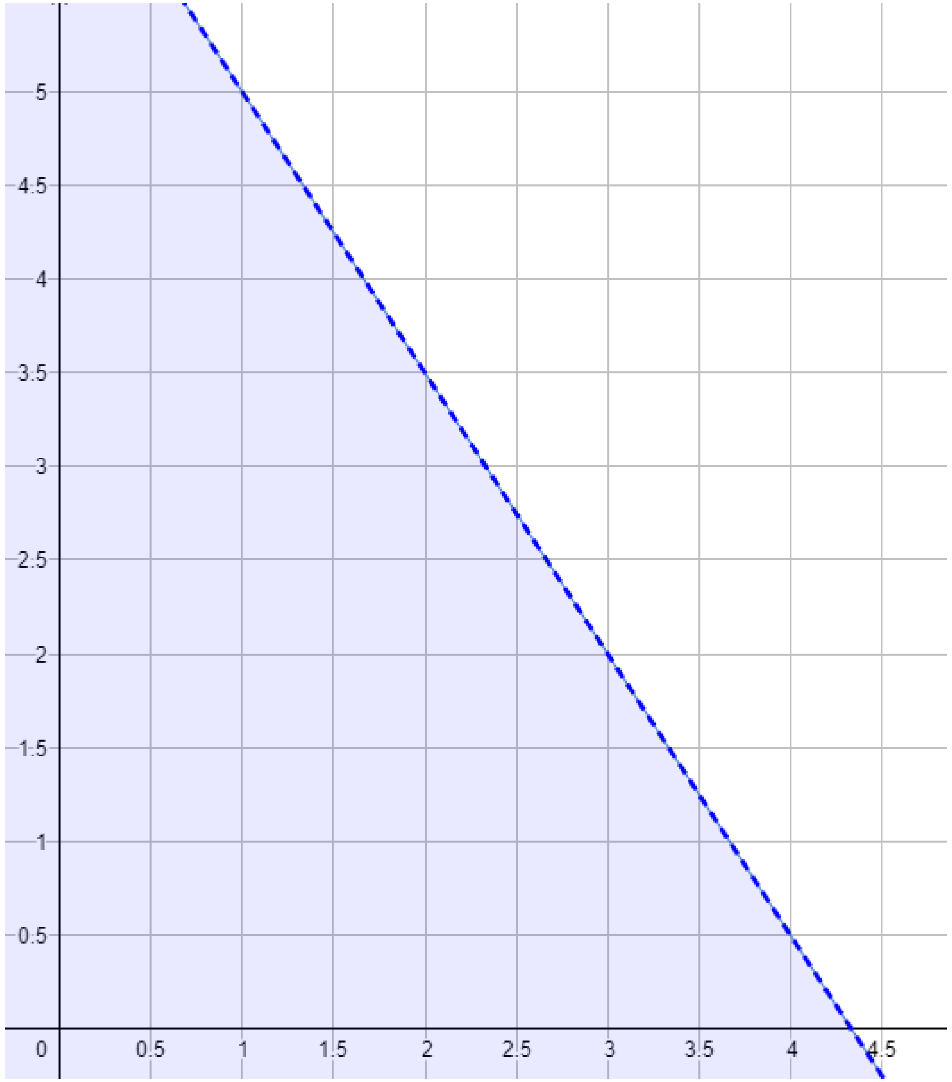
- Vienādojums $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ plaknē define taisni, kas plakni sadala divās pusplaknēs.
- Nevienādība $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ define vienu no pusplaknēm (ieskaitot pašu taisni).
- Lai noteiktu, kura ir īstā pusplakne, nepieciešams izvēlēties plaknē vienu punktu un pārbaudīt izvēlētajā punktā nevienādības nosacījumu.
- Ja taisne neiet caur koodinātu sākumpunktu, tad izdevīgi to noskaidrot ar punktu $(0; 0)$.

LPU grafiskā risināšana



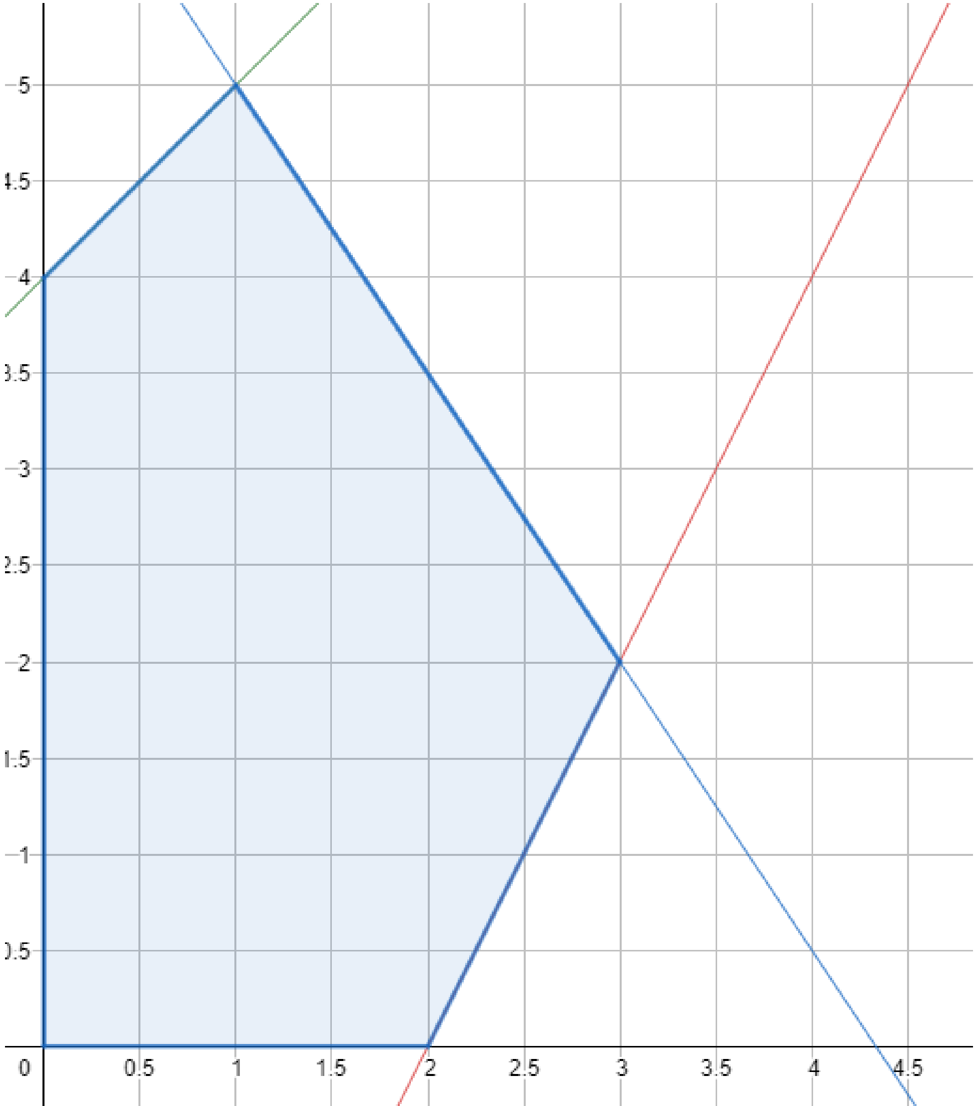
$$3x_1 + 2x_2 = 13$$

LPU grafiskā risināšana



$$3x_1 + 2x_2 \leq 13$$
$$3x_1 + 2x_2 = 13$$

LPU grafiskā risināšana



$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

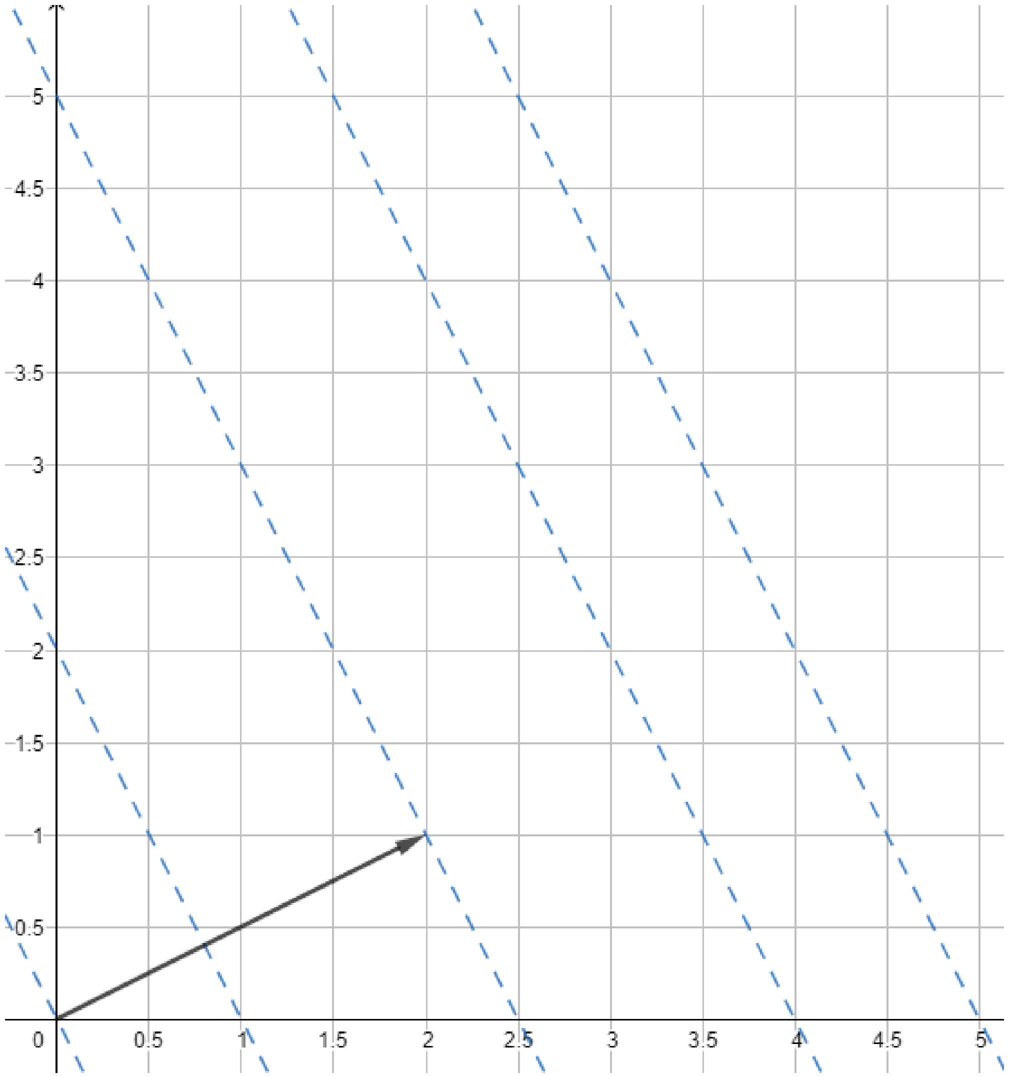
LPU grafiskā risināšana

Mērķa funkcijas līmeņa līnijas

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 = d$$

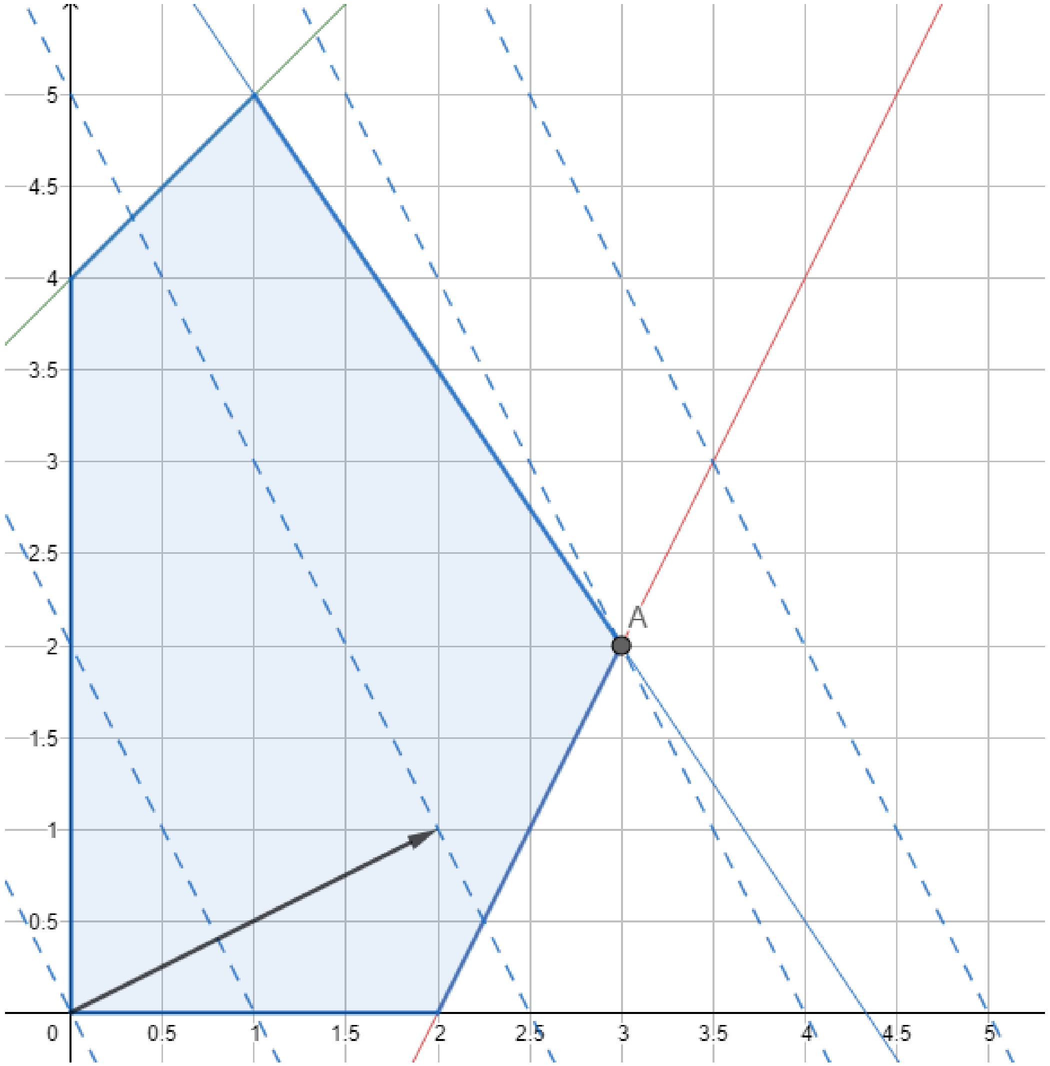
- Vienādojums $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ plaknē define taisni.
- Taisne $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ ir perpendikulāra vektoram (c_1, c_2).
- Parametra d pieaugumam atbilst taisnes $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ paralēlā pārnese vektora (c_1, c_2) virzienā.
- Ja $d = 0$, tad taisne iet caur punktu $(0; 0)$.

LPU grafiskā risināšana



$$f = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$$

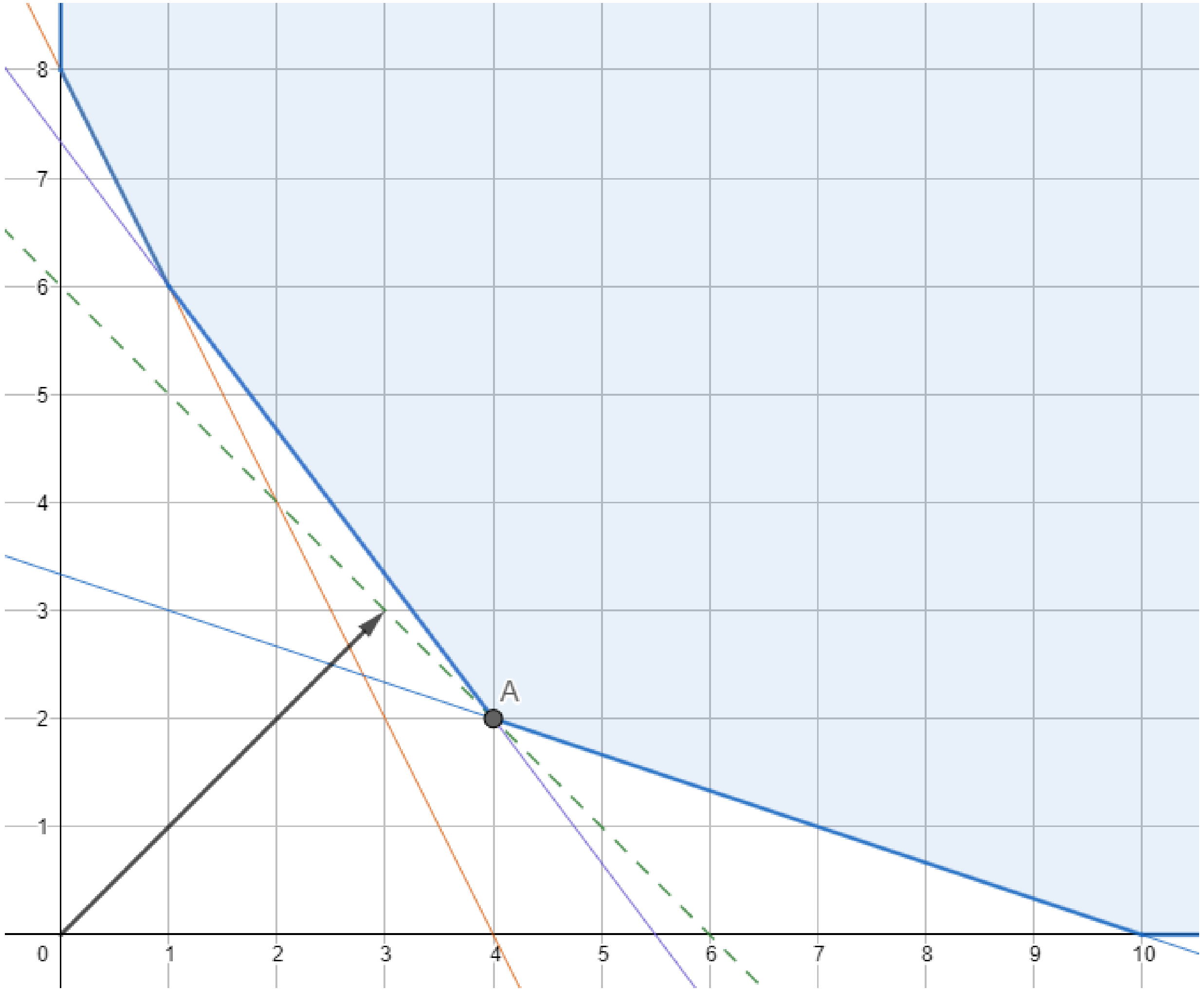
LPU grafiskā risināšana



$$f = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

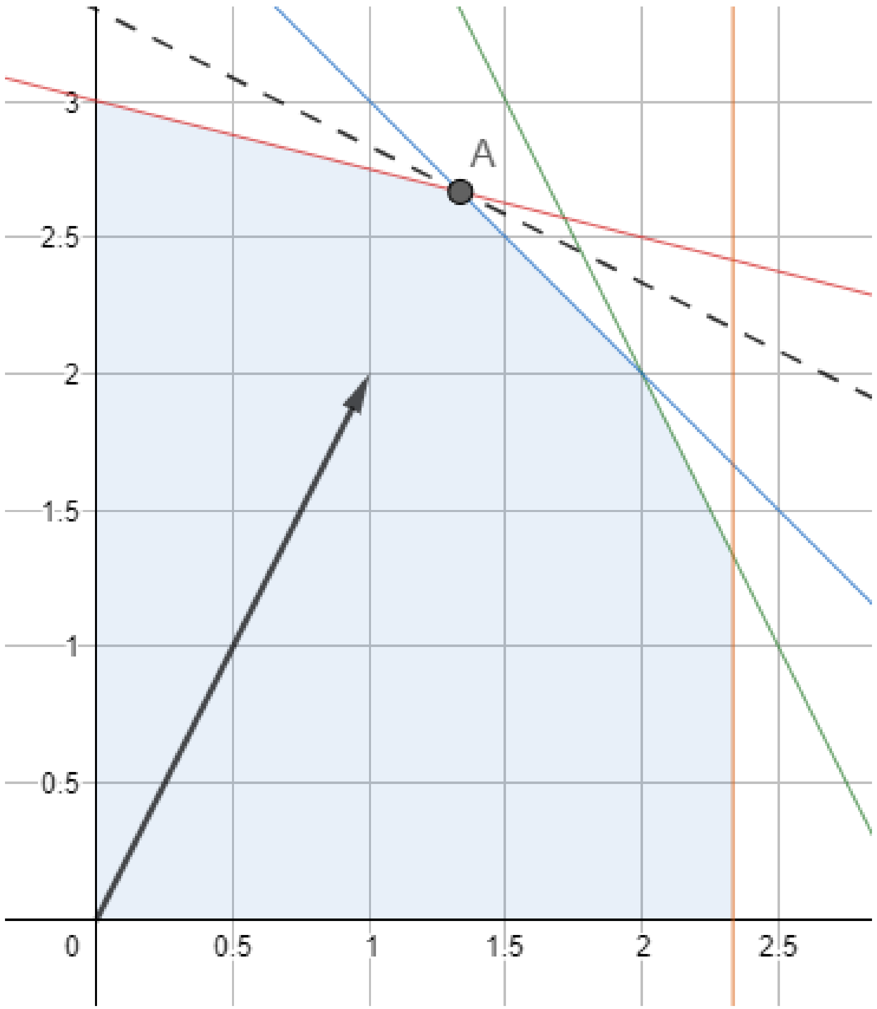
LPU grafiskā risināšana



$$f = x_1 + x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 22 \\ x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

LPU grafiskā risināšana



$$f = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 \leq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Diskrētās programmēšanas uzdevums

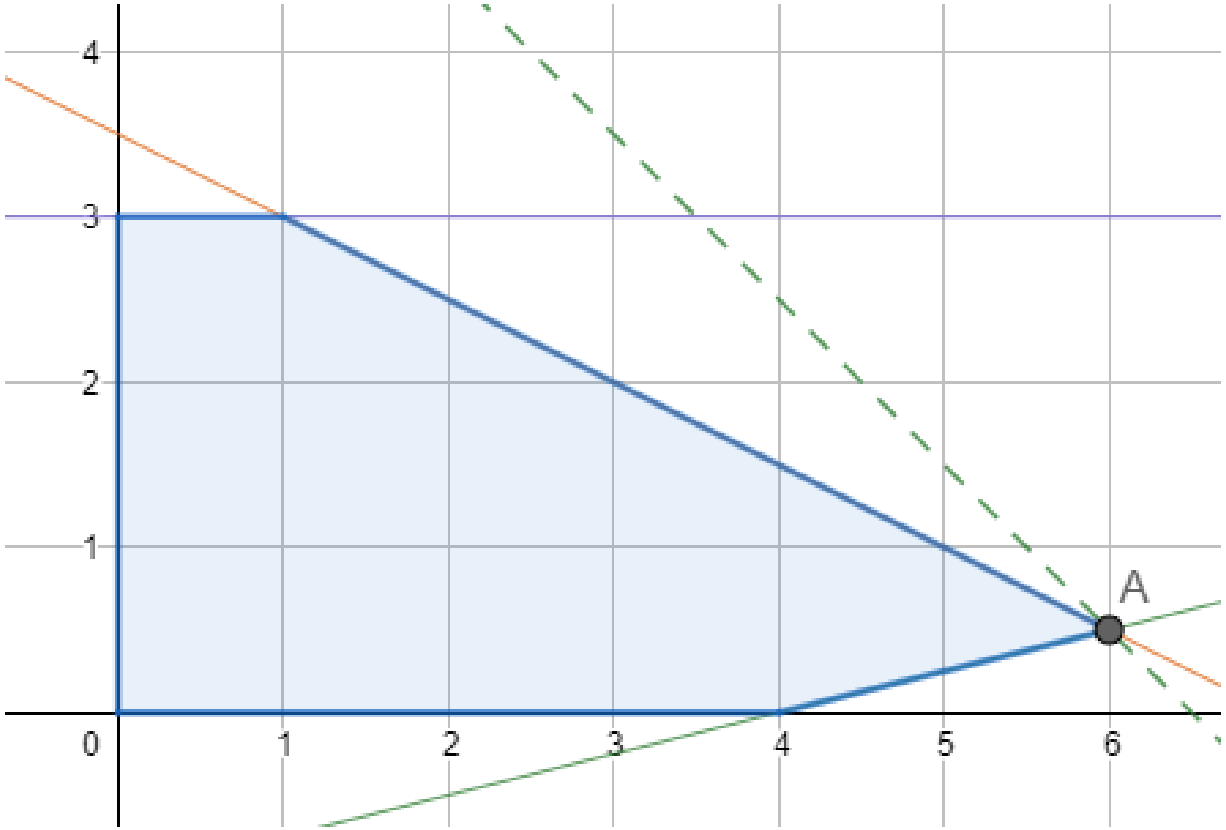
$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \\ x_1, x_2, \dots, x_n \ - veseli\ skaitļi \end{cases}$$

Lineārās programmēšanas uzdevums, kuru atrisinājumiem jābūt ar veselu skaitļu koordinātām sauc par:

- integrās programmēšanas uzdevumiem;
- lineārās programmēšanas uzdevumiem veselos skaitļos;
- diskrētās programmēšanas uzdevumiem.

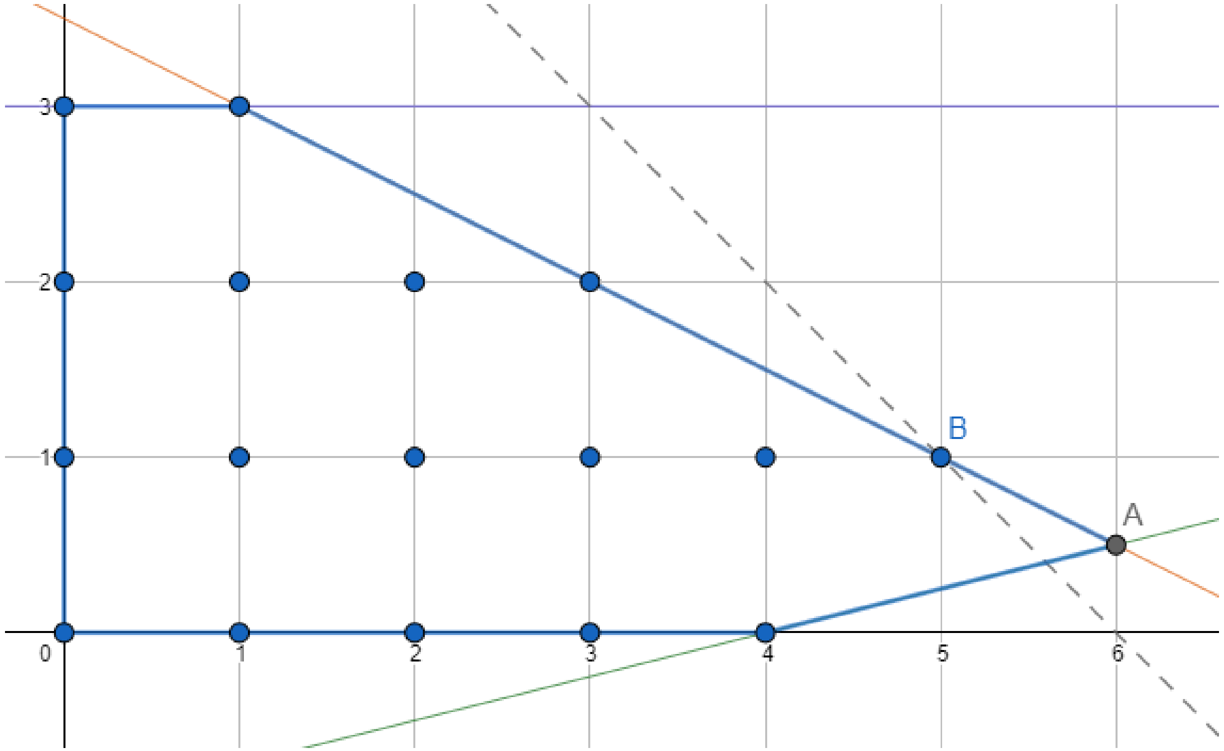
Diskrētās programmēšanas uzdevums



$$f = x_1 + x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Diskrētās programmēšanas uzdevums



$$f = x_1 + x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

LPU grafiskā risnāšana

Atrisināt grafiski LPU

1. uzdevums

$$f = x_1 + 2x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. uzdevums

$$f = 6x_1 + x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

LPU grafiskā risnāšana

Atrisināt grafiski LPU

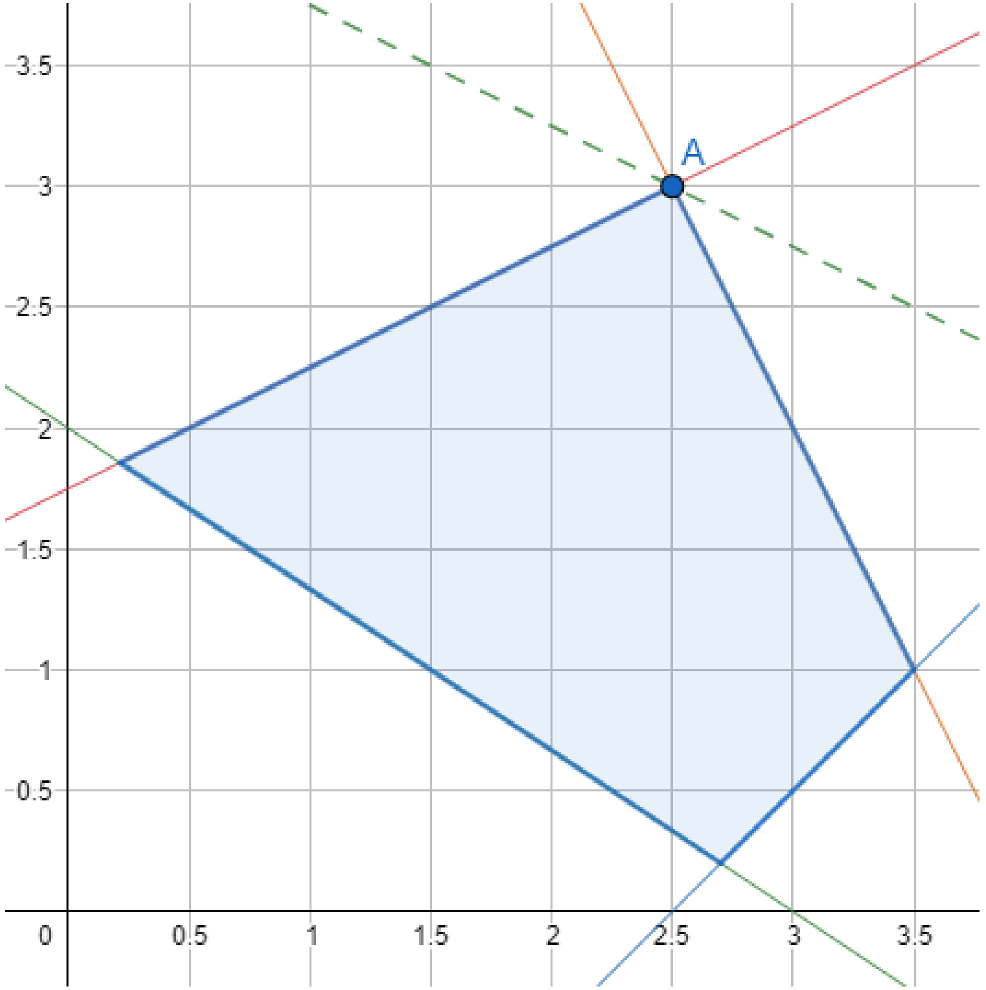
3. uzdevums

$$f = x_1 + 2x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. uzdevums

$$f = 6x_1 + x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

LPU grafiksā risināšana (1. uzdevums)

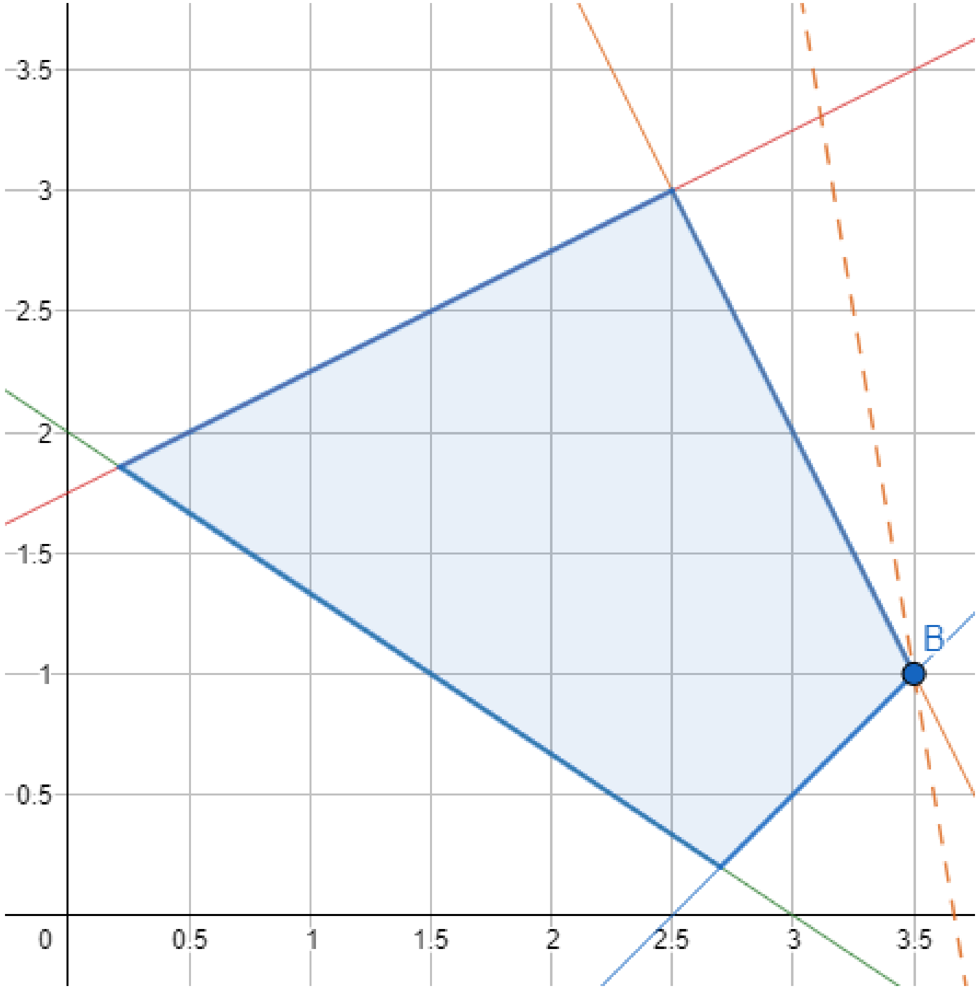


$$f = x_1 + 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(x_1^*, x_2^*) = (2.5,3)$$

LPU grafiksā risināšana (2. uzdevums)

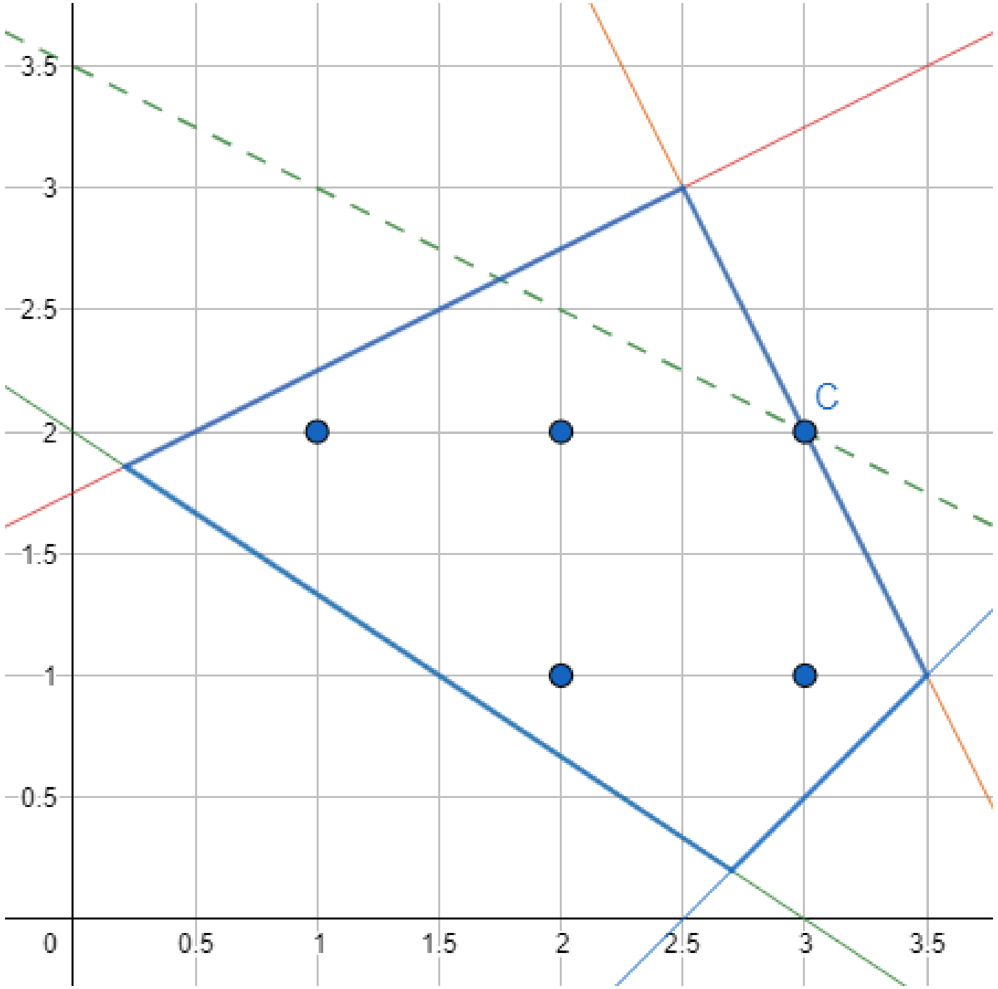


$$f = 6x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(x_1^*, x_2^*) = (3.5,1)$$

LPU grafiksā risināšana (3. uzdevums)

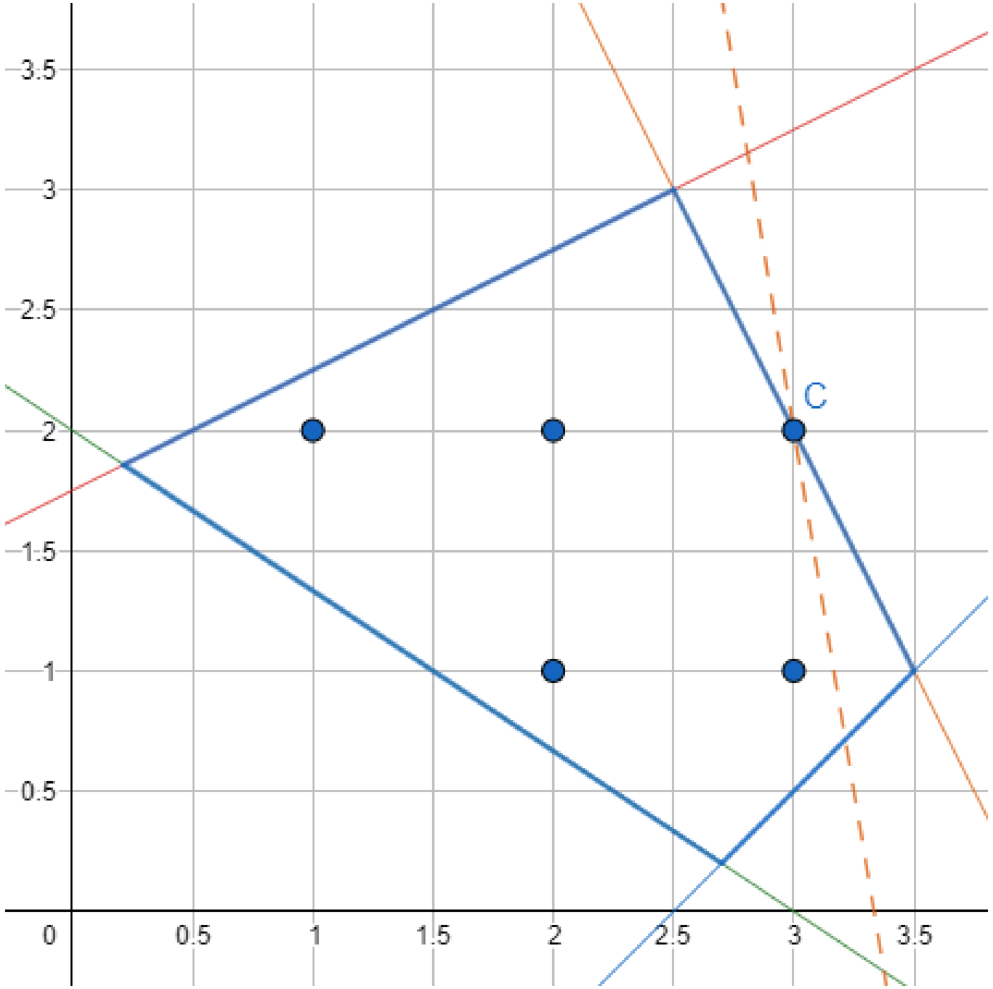


$$f = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(x_1^*, x_2^*) = (3{,}2)$$

LPU grafiksā risināšana (4. uzdevums)



$$f = 6x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(x_1^*, x_2^*) = (3{,}2)$$

Lineārās programmēšanas uzdevumu risināšanas etapi

- Uzdevuma nostādne
- Matemātiskā modeļa konstruēšana
- Uzdevuma atrisināšana
- Iegūto rezultātu pārbaude
- Iegūtā atrisinājuma realizācija praksē

Paldies par uzmanību!