ELEGANTI PIERĀDĪJUMI

Andrejs Cibulis
cibulis@lanet.lv
Rīga, 20.1.2018.

Ievads

Theorems and their proofs lie at the heart of mathematics.

Jo vienkāršāki uzdevumi, jo vairāk didaktikas un metodoloģijas, jo vairāk standartu, projektu un to izstrādātāju, skolotāju un dažāda ranga edukologu, kas nodarbojas ar citu mācīšanu vai pamācīšanu.

Vienkāršošanas uzdevumi. Kā vienkāršot māca ASV.

Vispirms skolas uzdevumi, tad interesantāki un sarežģītāki...

Par risināšanas metodēm skolā, MO un vispār matemātikā.

Par kompetencēs balstītu pieeju.

Praktiskā daļa

Literatūra

Der zināt

Aigner M., Ziegler G. M., **Proofs from the book**, Springer.

Alsina C., Nelsen R. B., **Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics**, Dolciani Mathematical Expositions, MAA, 2010.

Honsberger R., Mathematical Delights;
Mathematical Gems; ...

Nelsen R. B., **Proofs Without Words ...** MAA

Posamentier A. S., Krulik S., **Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions: a resource for the mathematics teacher**, 1998, Corwin Press.

Vienkāršot

Tā māca Amerikā...

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{\frac{1}{1}\cdot\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{1}\cdot\frac{x}{x}}$$

$$=\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{1-x}{x}}$$

$$=\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x}{1-x}$$

$$=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\underset{x}{\cancel{x^2}}}\cdot\frac{\cancel{x}}{-1\cdot\cancel{(x-1)}}$$

$$=\frac{x+1}{-1\cdot x}$$

$$=-\frac{x+1}{x}$$

bet vajadzētu šādi:

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x^2-1}{(1-x)x}=-\frac{x+1}{x}$$

Vienkāršot

Aprēķini

Piemērs no «Открытого банка заданий для подготовки к ЕГЭ по математике.»

$$\boxed{0{,}8^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}} \times 20^{\frac{6}{7}}.}$$

Lūk, kompetenta instruktora, skolotāja risinājums:

Представим число 0,8 в виде обыкновенной дроби, разложим число 20 на множители и воспользуемся свойствами степеней:

https://ege-ok.ru/2012/03/07/uproshhenie-vyirazheniy-soderzhashhih-korni-i-stepeni-zadanie-v7

$$0{,}8^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}} \times 20^{\frac{6}{7}} = \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}} \times (4 \times 5)^{\frac{6}{7}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}} \times (4 \times 5)^{\frac{6}{7}} =$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}} \times 4^{\frac{6}{7}} \times 5^{\frac{6}{7}} = 4^{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}}\ 5^{-\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}} = 4 \times 5 = 20$$

Elegants risinājums:	$0{,}8^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}} \times 20^{\frac{6}{7}} = x \Rightarrow x^7 = 0{,}8 \times 25 \times 20^6 = 20^7 \Rightarrow x = 20.$

Vienkāršot

$$\left[\frac{(\sqrt{a^2-4}-a)(2a)^{-1}}{\sqrt[-3]{\left(\dfrac{2a}{(a-(a^2-4)\frac{1}{2})}\right)^2-1}}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(2a)^{-1}(a-\sqrt{a^2-4})}{1+\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-4-a}}\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Nodrukāts ar kļūdām

Задание 19 (МАИ 1940.)
Упростить:

$$\left[\frac{(\sqrt{a^2-4}-a)(2a)^{-1}}{\sqrt[-2]{\left(\dfrac{2a}{a-(a^2-4)^{\frac{1}{2}}}\right)^2-1}}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(2a)^{-1}(a-\sqrt{a^2-4})}{1+\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-4}-a}\right)^{-1}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Jābūt

Совершенно необходимо чтобы руководящие органы издали инструкцию для вузовских экзаменаторов, в которой категорически были бы запрещены подобного рода задачи, являющемся издевательством над здравым смыслом и над абитуриентом. /А.Н. Барсуков/ См. «Математика в школе», 1941, N^0 4.

Решение:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{2a}{a-\sqrt{a^2-4}}\right)^{-1}-1}}{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-4}-a}{2a}}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2a}}}{\sqrt{1+\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2-4}-a}\right)^{-1}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2a}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-4}-a}{2a}}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2a}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{a^2-4}+a}{2a}}}=$$

$$=\frac{(a+\sqrt{a^2-4})+(a-\sqrt{a^2-4})}{\sqrt{a^2+4-a^2}}=$$

$$=\frac{2a}{2}=a$$

Математика в школе, 1941, N^{0}4.

Risinājums nav pareizs

Vai varat atrast kļūdu
un iegūt pareizu atbildi?

Vai varat atrisināt šo vienkāršošanas uzdevumu izmantojot IT (Wolfram Alpha)**?**

Pr. d. Vienkāršot:

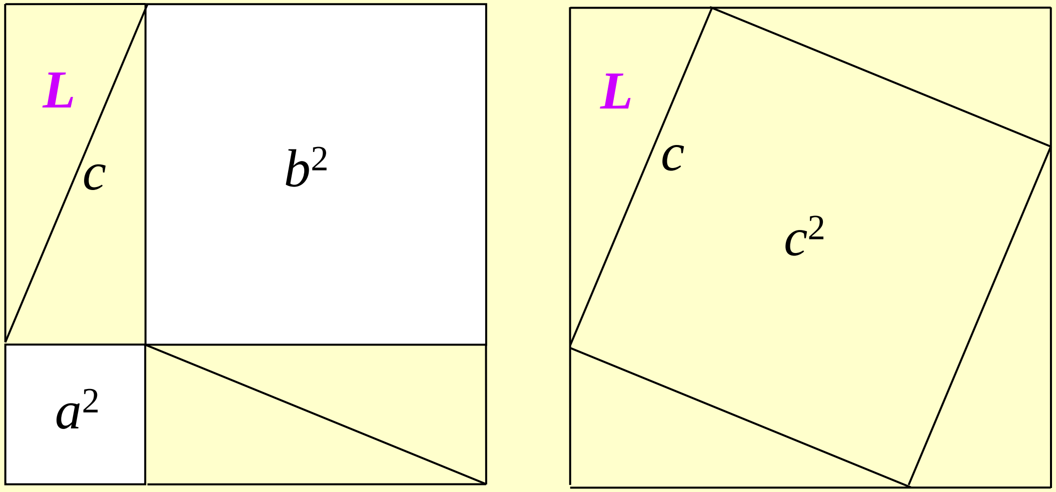
$$\sqrt{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{\sqrt{a^2-4}-a}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}}=?$$

Pitagora teorēma

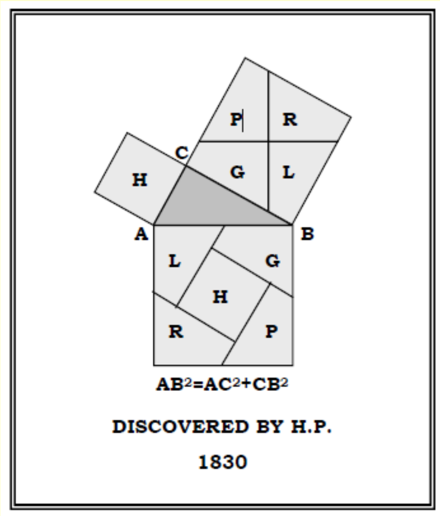
Viens no elegantiem Skaties tipa pierādījumiem ir šāds:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

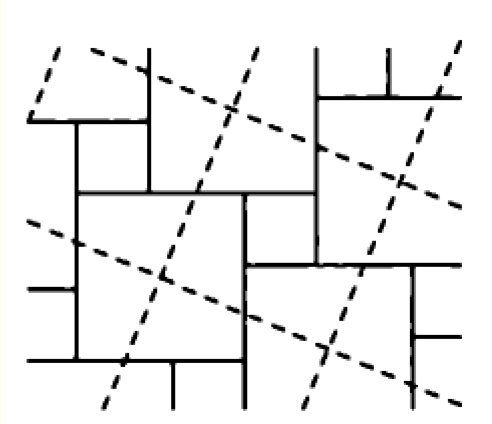
$$a^2 + b^2 + 4L = c^2 + 4L$$

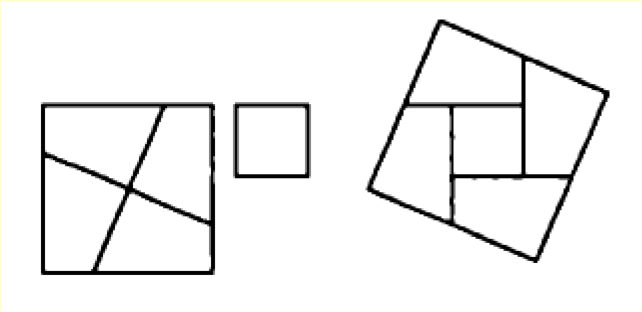


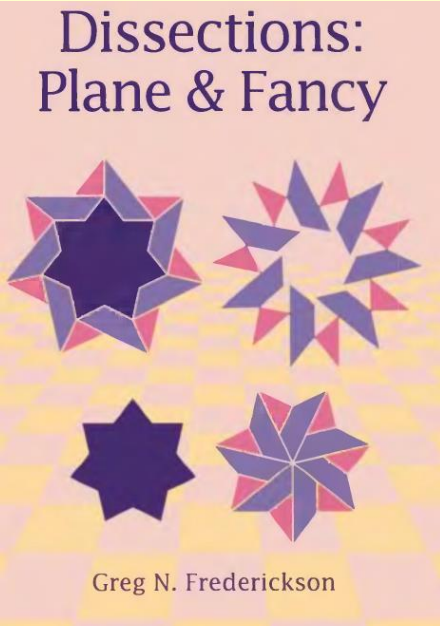
No pārklājumiem līdz Pitagora teorēmai



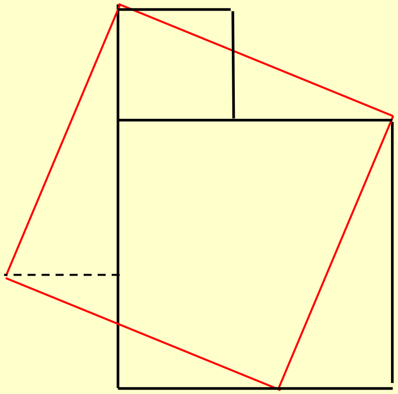
Sparks H. C., The Pythagorean Theorem. Crown Jewel of Mathematics, 2008.







Henry Perigal (1801-1899) became a member of London MS in 94 years.



Minimāls
daļu skaits - 4

Pirmskaitļi

Vai pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz?

Jau Eiklīds zināja atbildi un pierādījumu. Bet kā ir mūsdienu skolā?

Elegants pierādījums:

$$p_1, p_2, \dots, p_k$$

$$E_k = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1.$$

$$2\cdot3+1=7$$

$$2\cdot3\cdot5+1=31$$

$$2\cdot3\cdot5\cdot7+1=211$$

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1=2311$$

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+1=30031$$

$$30031=59\cdot509$$

Katram galīgam pirmskaitļu skaitam var atrast jaunu skaitli, kura nav šai sarakstā. Eiklīda pierādījums neesot pierādījums no pretējā. Eiklīds esot izvairījies no jēdziena bezgalība.

Nav zināms vai Eiklīda pirmskaitļu E_k ir bezgalīgi daudz.

Iracionāli skaitļi

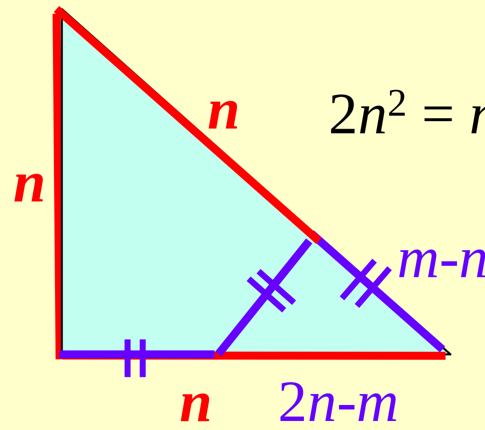
Pierādījumi skolas matemātikā un matemātikā vispār.

Lūk, kāds īss pierādījums!

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \text{ in lowest terms } \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n} = \frac{2n-m}{m-n} \Rightarrow \text{pretruna.}$$

$$m > 2n - m$$

Ģeometriskā interpretācija



$2n^2 = m^2$

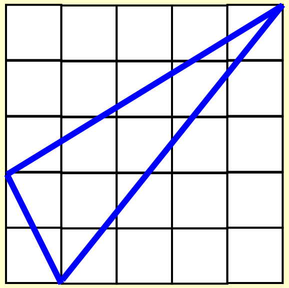
Pr. d. **Uzrādiet analoģisku** $\sqrt{3}$ **iracionalitātes pierādījumu.**

Laukumi

Aprēķināt laukumu trīsstūrim, ja zināmas tā malas:

Vai trīsstūra laukums ir racionāls skaitlis, ja tā malu garumi ir: $\sqrt{5}, \sqrt{34}, \sqrt{41}$

Skaties!



$$L = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Aprēķināt trīsstūra laukumu, ja tā malu garumi ir: $5, \sqrt{26}, \sqrt{89}.$

Vai jebkurām trīsstūra malām ar garumiem – $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ **var atrast trīsstūri ar virsotnēm režģa punktos?**

Aprēķināt trīsstūra laukumu, ja tā malu garumi ir: $\sqrt{41}, \sqrt{52}, \sqrt{61}.$

Laukumi

Ja trīsstūra malu garumi ir *a*, *b* un *c*, tad

$$16L^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

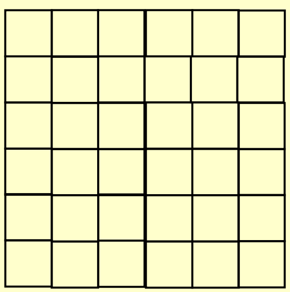
Ja trīsstūra malu garumi ir: $\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + z^2}, \sqrt{y^2 + z^2},$ **tad**

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}.$$

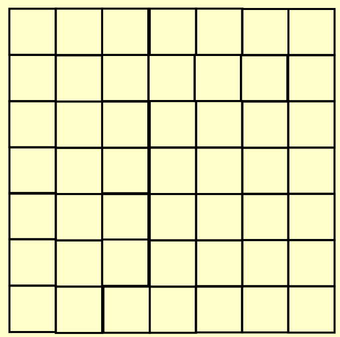
Blīvākie pakojumi

Kāds ir maksimālais figūru skaits, kādu var izvietot kvadrātā?

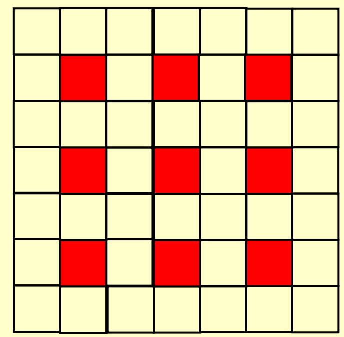
Pr. d.

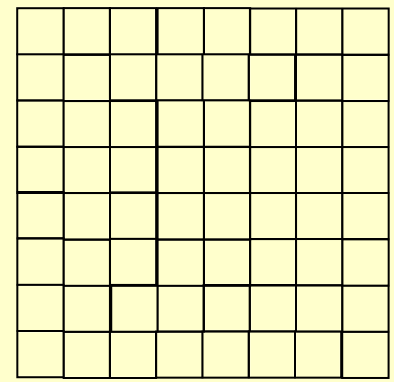


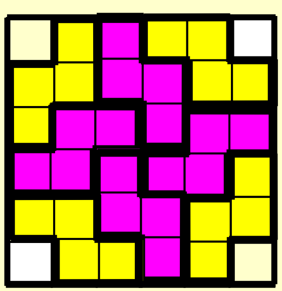
Pr. d.



Skaties!







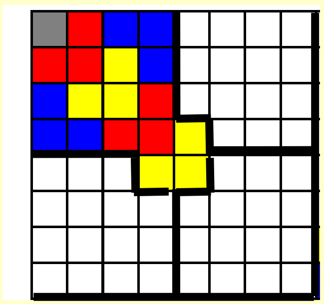
Klasika

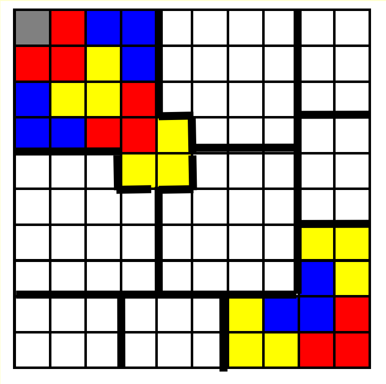
Trimino teorēma

A unit square has been removed from a $2^n \times 2^n$ board. Prove that the rest of the board can be tiled with L-shaped trominos.

Golomb's inductive proof of a tromino theorem.

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Tromino.shtml



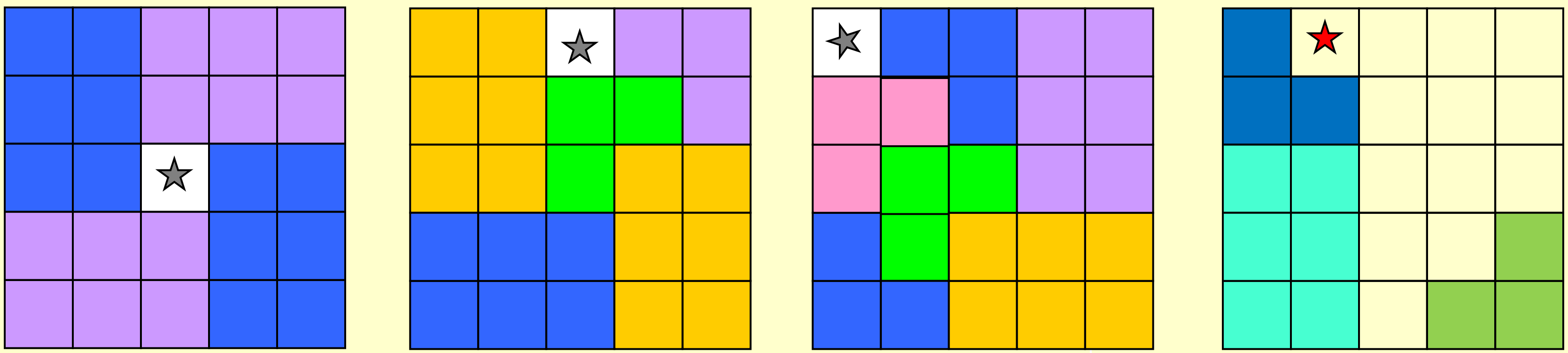


M.d. (Vispārinājums) **Noskaidrot vai Golomba trimino teorēma ir spēkā patvaļīgam kvadrātam $n \times n$, ja $n \geq 7$ un n nedalās ar 3.**

V-trimino pakojumi

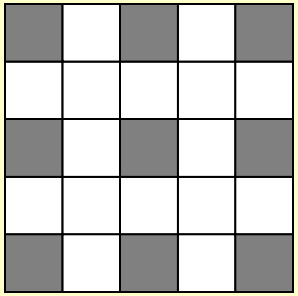
Atzīmēt visas tās kvadrāta 5 × 5 rūtiņas, kuras var palikt nepārklātas blīvākajā V-pakojumā.

Skolēni parasti atrod atrisinājumus, pārbaudot rūtiņas pa vienai.
Simetrijas apsvērumi samazina darba apjomu.



Vai varat atrast elegantu risinājumu?

Nepārklāts paliks melnais kvadrāts.



1) Katrs V-trimino pārklāj $\leq$ 1 melno kvadrātu.

2) Mums ir 8 trimino un 9 melnie kvadrāti.

3) Tātad viens no tiem paliks nepārklāts.

Uzdevums attiecas uz metodi Dirihlē princips.

Uzdevumu var attiecināt arī uz metodi
ekstremālā elementa izmatošana.

Ekstremālā elementa (elementu sistēmas) lomā šeit ir melno rūtiņu kopa.

Trigonometrija, bez kuras var iztikt

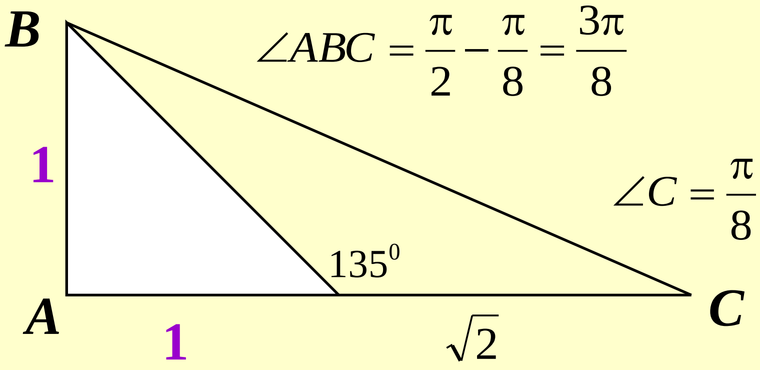
Vai eksistē veseli skaitļi *a* un *b*, ka $\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8} = a + \sqrt{b}.$

Pierādīt: $\mathrm{tg}^n \frac{3\pi}{8} + (-1)^n \mathrm{ctg}^n \frac{3\pi}{8} \in Z,\ n \in N.$

$$p = \mathrm{tg}\frac{3\pi}{8},\ q = \mathrm{ctg}\frac{3\pi}{8}.$$

1) $$p - q = p - \frac{1}{p} = \frac{p^2 - 1}{p} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{-2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{-2\cos 135^0}{\sin 135^0} = 2.$$

2) Vienkāršāks risinājums



$$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\angle C = \frac{\pi}{8}$$

$$p = \mathrm{tg}\frac{3\pi}{8} = \frac{AC}{AB} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$q = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Rekurences sakarība

Indukcijas metode

$$t_n := p^n + (-1)^n q^n = t_{n-1}(p-q) - pqt_{n-2} = t_{n-1}(p-q) - t_{n-2} = 2t_{n-1} - t_{n-2}.$$

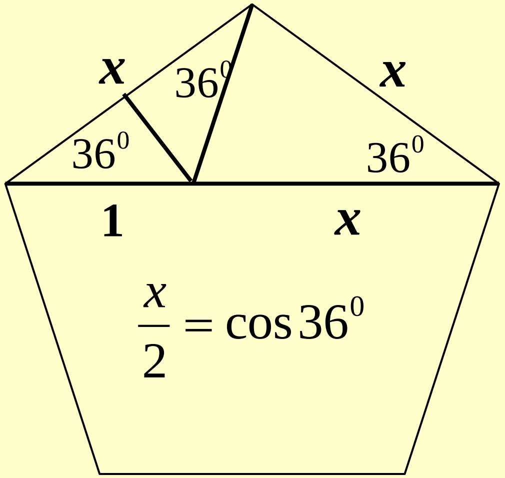
Trigonometrisku funkciju vērtības

Skolā uzsvars uz šādiem leņķiem (grādos): 0, 30, 45, 60, 90 un to daudzkārtņiem.

Der zināt, ka $\cos 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

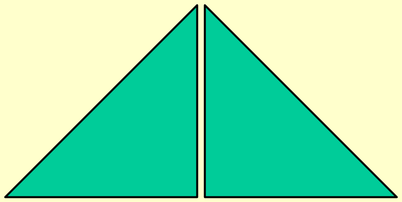
Elegants pierādījums

Zelta griezuma skaitlis, viena no fundamentālām konstantēm matemātikā



Atrast divus tādus vienādsānu trīsstūrus, no kuriem var salikt vienādsānu trīsstūri.

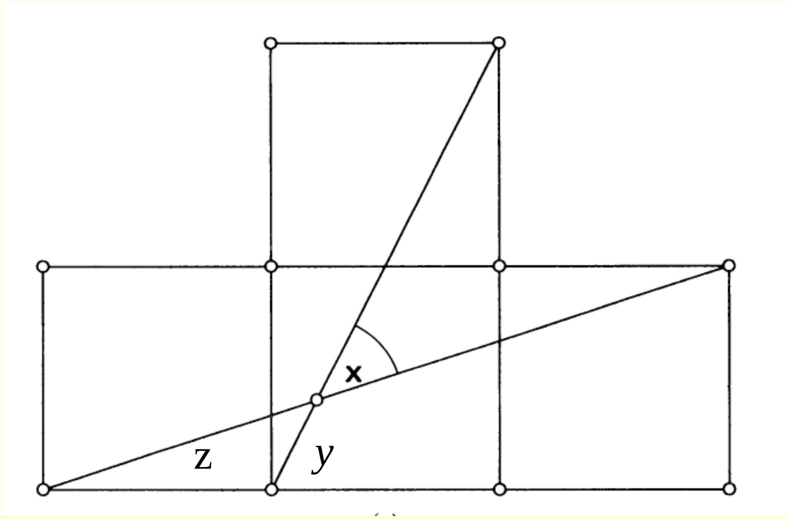
Pirmais, ko atrod, parasti ir šāds risinājums



$$\frac{x}{1} = \frac{1+x}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

$$\boxed{\cos 36^0 = \frac{\Phi}{2}}$$

Aprēķini leņķi *x*



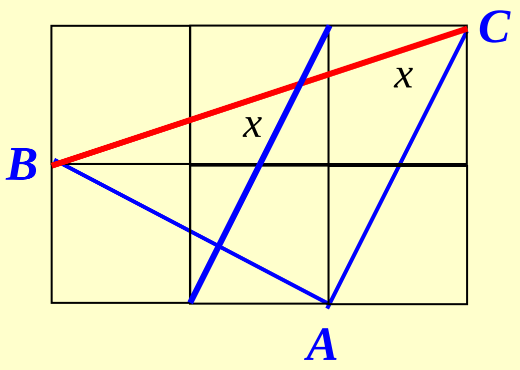
$$\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}(y - z) = \frac{\mathrm{tg}y - \mathrm{tg}z}{1 + \mathrm{tg}y\mathrm{tg}z} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow x = 45^0.$$

Skalārā reizinājuma izmantošana

$a = (3, 1)$, $b = (1, 2)$. $\cos x = \dfrac{(a\,|\,b)}{|\,a\,|\cdot|\,b\,|}$,

$$\cos x = \frac{3+2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 45^0.$$

Vienkāršākais pierādījums



AB =AC

$x = 45^0.$

Skaitļu virknes

Vai virknes

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, ...

pirmo *k* elementu summa
var būt vienāda ar 2018?

Vai starp šīm summām var atrast vismaz divus pirmskaitļus?

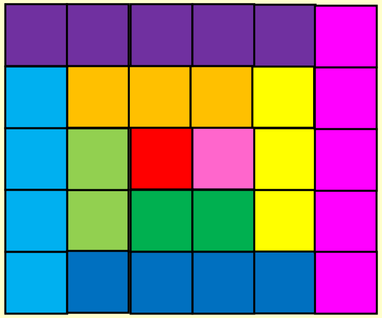
2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, ...

Saistība ar citiem uzdevumiem
Kurš no uzdevumiem sarežģītāks?

No visiem polimino ar perimetru 2018 atrast to, kuram laukums maksimāls?

No visiem polimino ar laukumu 2018 atrast to, kuram perimetrs minimāls?

Pa spirāli tiek konstruēta taisnstūru virkne, sk. zīm.
Vai kādam no taisnstūriem perimetrs būs 2018?
Vai kādam no taisnstūriem laukums būs 2018?



$$k^2 = 2018$$

$$k(k+1) = 2018$$

Vienkāršs pierādījums

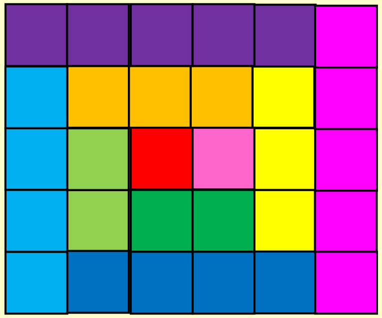
1) Fiksētam perimetram maksimālais polimino ir taisnstūris.

2) No visiem fiksēta perimetra taisnstūriem maksimālais laukums ir kvadrātam.

$$2(x+y)=P \qquad xy \mapsto \max$$

$$xy = x\left(\frac{P}{2}-x\right) \qquad xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \qquad x_{\max} = \frac{P}{4}$$

Sekas. Spirāles algoritms dod maksimālā laukuma taisnstūri.



Kvadrātfunkcijai ekstremālā vērtība tiek sasniegta sakņu viduspunktā

Ja *a* un *b* ir veseli skaitļi, tad tie jāņem kā vistuvākie skaitlim $x_{\max}$

Kas ir pētnieciskie uzdevumi?

Skolas un ZPD līmenis, būtiskas atšķirības

Skolas mācību grāmatās lasāms, ka: ***Pētnieciskie uzdevumi*** – *uzdevumi, kurus risinot tiek attīstītas pētnieciskās darbības prasmes.*

Tā ir saucama nevis par matemātiski *jēgpilnu* definīciju, bet par «kompetenču pieejai» raksturīgu dežūrfrāzi.
Vai logaritmu tabulas aizpildīšana ir pētniecisks uzdevums?

ZPD matemātikā: ne tikai kaut kas jāpēta, bet arī jāiegūst kādi matemātiski jaunumi.

Nav jālauza galva par to, kādas prasmes tiks attīstītas pētniecības procesā.

Piemērs

$$C(x) = 10(200 - x) + 20\sqrt{2500 + x^2}$$

Jāatrod minimums. Uzdevums par kabeļa vilkšanu.
Ir uzzīmēts funkcijas grafiks un sastādīta tabula un secināts,
ka minimumu dod *x* = 29 un *C*(*x*) = 1866,02... [SFF].

Vai eksperiments ir matemātikas uzdevumu risināšanas metode?

$$y := -x + 2\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow (y + x)^2 = 4a^2 + 4x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2xy + 4a^2 - y^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 3(4a^2 - y^2)}}{3} = \frac{y \pm \sqrt{4y^2 - 12a^2}}{3} = \frac{y \pm 2\sqrt{y^2 - 3a^2}}{3} \Rightarrow$$

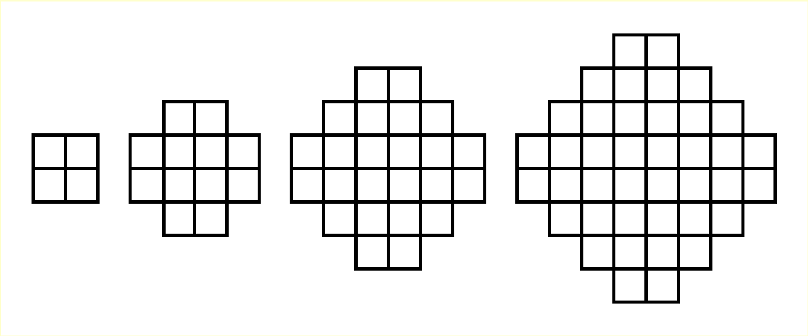
$$y_{\min} = a\sqrt{3} \Rightarrow x_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$ **Ja *a* = 50, tad** $$x_{\min} = \frac{50\sqrt{3}}{3} = 28{,}86751\ldots$$

Redzēt spriedumus, formulas, vēl nenozīmē saprast.

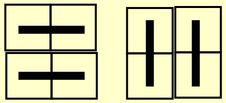
Pastāv problēma, ka lielai daļai studentu, skolotāju sagādā grūtības lasīt grāmatas pat elementārajā matemātikā.

Vai eksistē vienkāršs pierādījums?

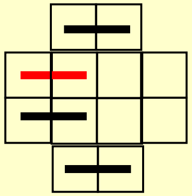
Aztec diamonds



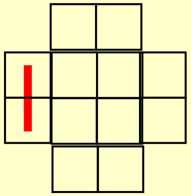
$$n = 2^{k(k+1)/2}$$



2 salikumi



2



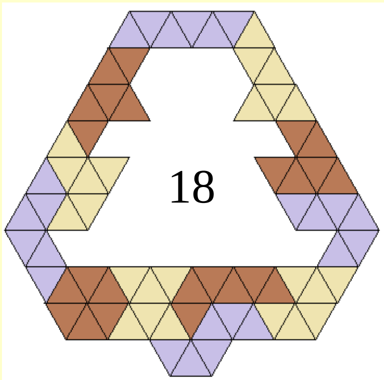
6

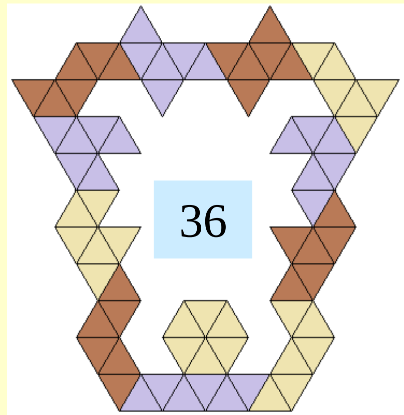
8 salikumi

Salikumu skaita formula vienkārša, bet zināmie pierādījumi sarežģīti.

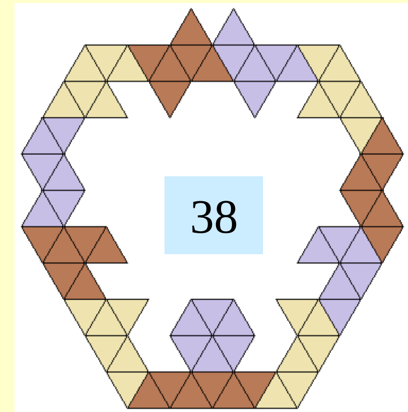
ZPD. Vai var atrast vienkāršu, skolēniem saprotamu pierādījumu.

Grūti atrast - viegli pārbaudīt





37?



Kas tiek meklēts, pētīts?

Problēma. Vai eksistē simetrisks heksamondu tornis, kura caurums ir 37-stūris?

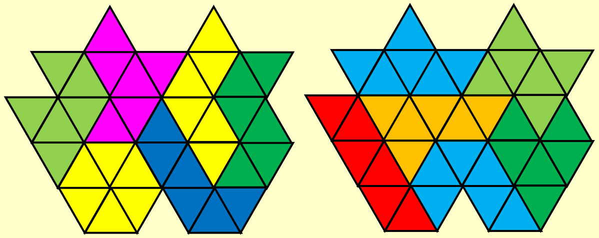
Simetrijas jēdziens ir viena no lielajām matemātikas idejām (Big ideas)
Par *lielajām* idejām „Kompetenču pieejas projektā”.

Olita Brenča, **Heksamondu torņu virknes**, 2017, ZPD.

Ezernieku vidusskola, 12. kl.

2018. gada uzdevumi

1. No heksamondiem salikt dvīnītes 18-stūrus. Zīmējumā kā atvadas no pagājušā gada parādīti šādi 17-stūri.



2. Rindā uzrakstīti 2017 skaitļi – naturālu skaitļu kvadrāti. Vai starp tiem varat salikt plusa un mīnusa zīmes tā, lai rezultāts būtu tieši 2018?

$$1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm 2016^2 \pm 2017^2 = 2018$$

3. Arrange the ten digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in the expression a^b + c^d + e^f + g^h + i^j to make 2018. /M. Reid./

Here is a New Year's Puzzle

http://userpages.monmouth.com/~colonel/p2018-a4.pdf

Cut the 7 pieces out and fit them into a 9×5 rectangle without overlapping. One of the cells of the rectangle will be empty. You may not flip the pieces over.