Brauna kustība matemātiskajā statistikā

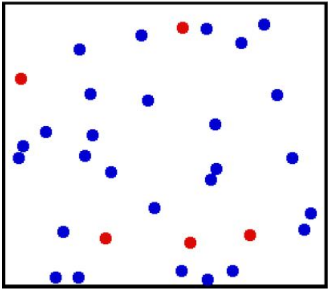
Jānis Valeinis

Latvijas Universitāte

2017. gada 4. novembris

Saturs

Brauna kustība fizikā

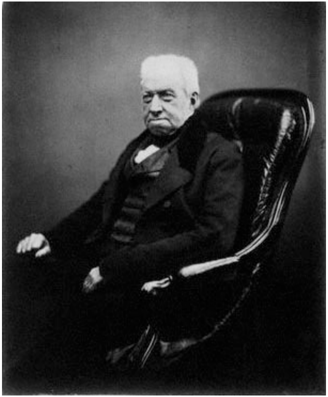


Brauna kustība ir gāzē vai šķidrumā izsētu vieglu daļiņu (putekļu, augu sporu, dūmu daļiņu) haotiska kustība. Brauna kustību izraisa vielas atomu vai jonu siltumkustība.

Vēsture

Roberts Brauns (1773. – 1858.)

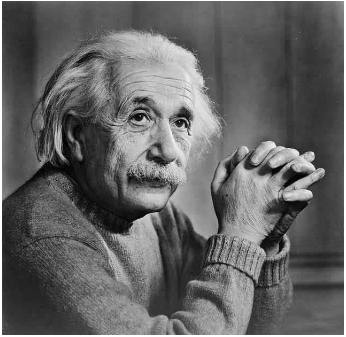
- Skotu botāniķis, kurš pirmais novēroja vielas daļiņu siltumkustību šķidrumā.
- 1827. gadā mikroskopā novēroja staipekņu sporas ūdenī un ievēroja, ka sporas ūdenī nemitīgi un neregulāri pārvietojas.
- Šī kustība tika nosaukta Brauna vārdā, lai arī viņš neizveidoja tās teoriju.



Vēsture

Alberts Einšteins (1879. – 1955.)

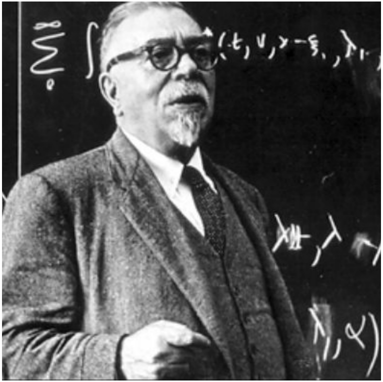
1905. gadā Alberts Einšteins izveidoja Brauna kustības molekulāri kinētisko teoriju.



Vēsture

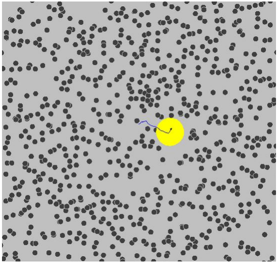
Norberts Vīners (1894. – 1964.)

- 1923. gadā Norberts Vīners izveidoja Brauna kustības precīzu matemātisku aprakstu.
- Brauna kustību sauc arī par Vīnera procesu.



Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



Definīcija

Stohastisku procesu $B(t) : t \geq 0$ sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

1. $B(0) = 0$,
2. pieaugumi $B(t_i) - B(t_{i-1})$ ir neatkarīgi $\forall t_i, i = 0, 1, 2, ..., n$,
3. $\forall t \geq 0$ un $h > 0$ pieaugumi $B(t+h) - B(t)$ ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju h.

Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).

Ω - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt	
ω_2 - notikums, ka uzkrīt	
ω_3 - notikums, ka uzkrīt	
ω_4 - notikums, ka uzkrīt	
ω_5 - notikums, ka uzkrīt	
ω_6 - notikums, ka uzkrīt	

Mērķis: Rēķināt varbūtības.

$\boxed{P(\omega_1) = \frac{1}{6}}$

$\boxed{P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = \frac{2}{3}}$

Problēma: Grūti pierakstīt notikumus, kuri mūs interesē.

Gadījuma lielums

Gadījuma lielums X ir funkcija, kas notikumiem piekārto reālus skaitļus, t. i., $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

ω_1 - notikums, ka uzkrīt 

ω_2 - notikums, ka uzkrīt 

ω_3 - notikums, ka uzkrīt 

ω_4 - notikums, ka uzkrīt 

ω_5 - notikums, ka uzkrīt 

ω_6 - notikums, ka uzkrīt 

$$\begin{cases} X(\omega_1) = 1 \\ X(\omega_2) = 2 \\ X(\omega_3) = 3 \\ X(\omega_4) = 4 \\ X(\omega_5) = 5 \\ X(\omega_6) = 6 \end{cases}$$

Gadījuma lielums: 1. piemērs

ω_i						
$X(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

- $\boxed{P(X = 2) = \frac{1}{6}}$

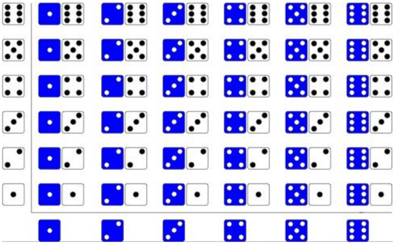
- $P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- $\boxed{P(X > 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums X apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2$, $X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3$, $X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$ utt..
- Vispārīgā gadījumā $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$, kur $i, j = 1, 2, ..., 6$.



$$\boxed{P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{2}{13}}$$

$$\boxed{P(X > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$$

Gadījuma lielums 3. piemērs

Met monētu.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, kur

- ω_1 - notikums, ka uzkrīt cipars,
- ω_2 - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

ω_i		
$X(\omega_i)$	0	1

$\boxed{X(\omega_1) = 0}$ $\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}}$

$\boxed{X(\omega_2) = 1}$ $\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{2}}$

Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums* X var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. Piemēram:
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;
  - akciju cenas.

Mērķis: Prognozēt gadījuma lieluma uzvedību.

Problēma: Kā aprēķināt $P(X > 0)$, $P(-5 < X < 5)$?

Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

A	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

- A – notikums;
- $P(A)$ – varbūtība, ka vienā realizācijā iestājas notikums A;
- n – eksperimentu skaits.

Biežums – n_i – tik reizes iestājas notikums A;

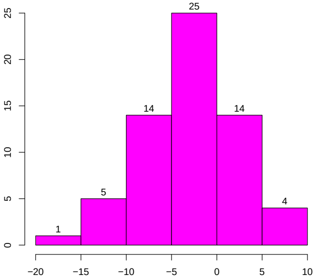
Relatīvais biežums – $\frac{n_i}{n}$.

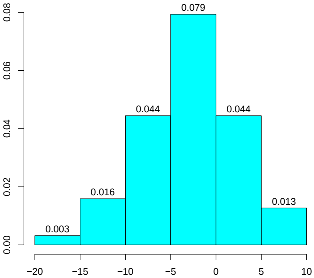
$$\boxed{\frac{n_i}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(A)}$$

Histogramma

Piemērs: tika veikti gaisa temperatūras mērījumi 3. martā Rīgā no 1943. gada līdz 2005. gadam:

Temperatūra, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20;-15)$	1	0,016	0,003
$[-15;-10)$	5	0,079	0,016
$[-10;-5)$	14	0,222	0,044
$[-5;0)$	25	0,397	0,079
$[0;5)$	14	0,222	0,044
$[5;10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2

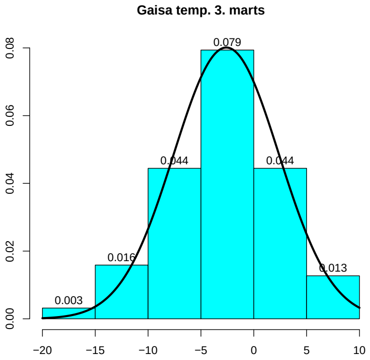




Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

T, °C	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20;-15)$	1	0,016	0,003
$[-15;-10)$	5	0,079	0,016
$[-10;-5)$	14	0,222	0,044
$[-5;0)$	25	0,397	0,079
$[0;5)$	14	0,222	0,044
$[5;10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2



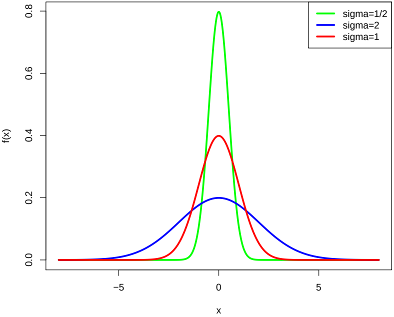
!!! Relatīvos biežumus izdalot ar intervāla garumu, histogrammas laukums kļūst 1.

Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam. Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

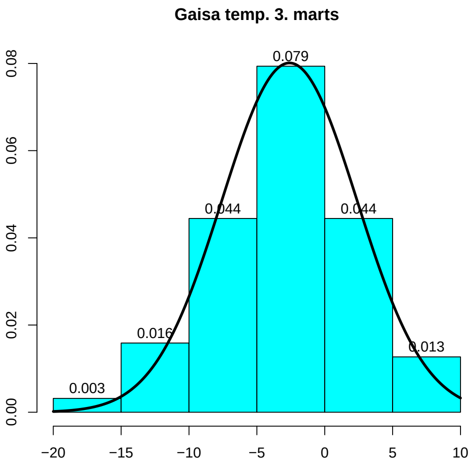
kur μ – vidējā vērtība, σ^2 – dispersija (σ – standartnovirze).



Gausa līknes laukums ir 1!!!

Piemēram: μ – vidējā temperatūra, σ^2 – izkliede ap vidējo temperatūru.

Normālais sadalījums



Vidējā temperatūra:
$\boxed{\mu = -2,6°\text{C}}$

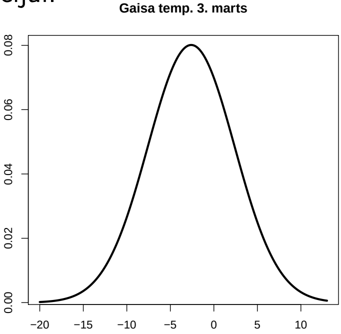
Standartnovirze: $\boxed{\sigma \approx 4,98°\text{C}}$

Ja gadījuma lielums X ir normāli sadalīts, to pieraksta

$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$

Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par 0°C.
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu *zvana* (**Gausa**) funkcijai.

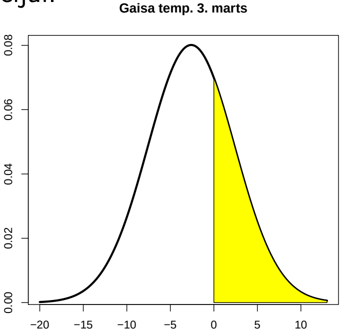


$\boxed{P(X=0)=0}$

$\boxed{P(X=1)=0}$

Normālais sadalījums

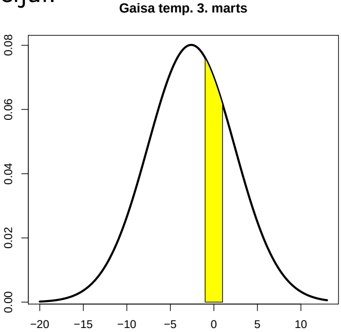
- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par $0°$C.
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu *zvana* (**Gausa**) funkcijai.



$$P(X > 0) = 0.3$$

Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs robežās no $-1°$C līdz $1°$C.
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu *zvana* (**Gausa**) funkcijai.



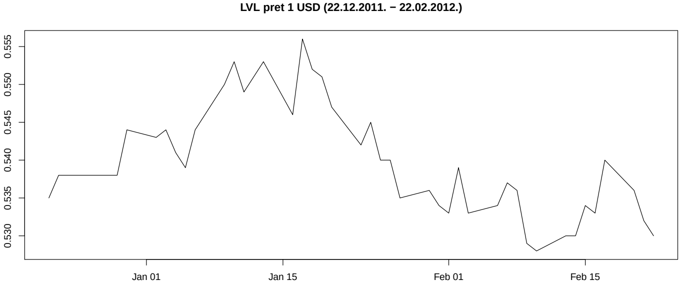
$$\boxed{P(-1 < X < 1) = 0.14}$$

Stohastisks process

Stohastisks process – gadījuma lielums, kas mainās laikā.
Matemātikā to apraksta funkcija $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

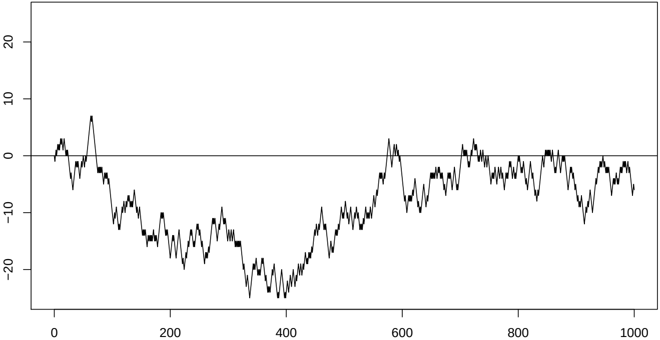
- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;
- akciju cenu izmaiņas laikā;
- valūtu kursu dinamika laikā.



Gadījuma klejošana

Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, kur $\{X_1, X_2, ...,\}$ ir gadījumu lielumu virkne, kurai $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, ...$

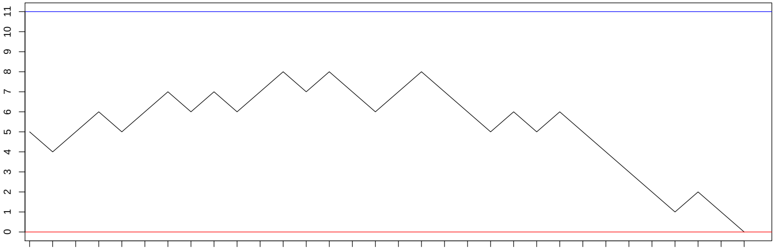


Gadījuma klejošana robežā, kad $n \to \infty$, kļūst par Brauna kustību.

Gadījuma klejošanas piemērs

- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā n_1 un n_2 monētas.
- Katrs no tiem met "*neitrālo*" monētu un ar varbūtību $\frac{1}{2}$ katram spēlētājam ir iespēja vai nu iegūt pretinieka monētu, vai arī zaudēt savu monētu pretiniekam.

Piemērs: pirmais spēlētājs uzsāk spēli ar 5 monētām, otrais – ar 6 monētām. Spēle beigsies, kad pirmajam spēlētājam būs vai nu 11 monētas (viņš uzvarēs), vai – 0 monētas (viņš zaudēs). Spēles iespējamais scenārijs attēlots grafikā:



Finanšu matemātika

Louis Jean - Baptist Alphonse Bachelier (1970. – 1946.)

- Franču matemātiķis.
- Viņa disertācija "Spekulācijas teorija" (1900. g.) ir vēsturiski pirmais darbs par augstākās matemātikas pielietojumu ekonomikā.
- Pirmais modelēja akciju cenas, izmantojot Brauna kustību.

Finanšu matemātika

Mērķi:

- prognozēt akciju cenu varbūtisko scenāriju;
- prognozēt ekonomikas izaugsmi;
- prognozēt iekšzemes kopproduktu u.c.

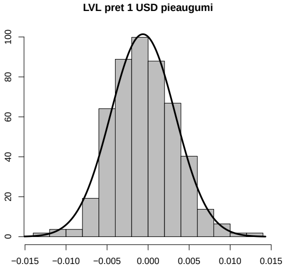
Finanšu matemātika

Louis Bachelier pieeja:

- noteikt gadījuma lieluma (kas apraksta akciju cenas) varbūtisko scenāriju, prognozēt tā uzvedību nākotnē;
- modelēt akciju cenu stohastisko procesu $S(t, \Theta)$ ar Brauna kustību.

Pamatojums:

1. pieņēmums, ka cenu pieaugumi ir neatkarīgi no pagātnes cenām, ir dabisks;
2. var pārbaudīt, ka akciju cenu pieaugumi parasti ir normāli sadalīti.



Finanšu matemātika

Louis Bachelier pieejas *trūkumi*:

1. šādi modelējot teorētiski akciju cena var kļūt negatīva;
2. pēc šī modeļa varbūtība akciju cenai izmainīsies no Ls 5 uz Ls 10 ir tāda pati, kā varbūtība akciju cenai izmainīties no Ls 15 uz Ls 20, kas neatbilst īstenībai.

Finanšu matemātika

Ideja:
$S(t) - S(t-1)$ vietā aplūko attiecību $\frac{S(t)}{S(t-1)}$ vai $ln\frac{S(t)}{S(t-1)}$ (ienesīgums).

Priekšrocības:

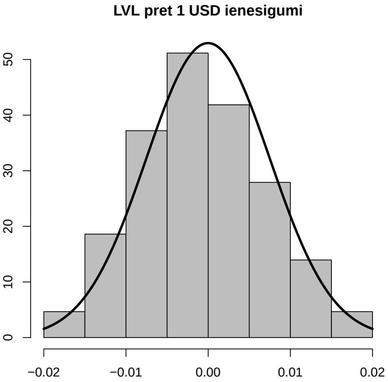
1. šādi modelējot akciju cena vienmēr būs pozitīva;
2. pēc šī modeļa varbūtība akciju cenai palielināties no Ls 5 uz Ls 10 atšķirsies no varbūtības akciju cenai palielināties no Ls 15 uz Ls 20.

Ģeometriskā Brauna kustība

Definīcija

Stohastisku procesu $S(t)$ sauc par standarta ģeometrisko Brauna kustību, ja katram $h \geq 0$:

1. $\frac{S(t+h)}{S(t)}$ ir neatkarīgs no vēsturiskām cenām $S(t')$, kut $t' \leq t$;
2. $ln\frac{S(t+h)}{S(t)} \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Matemātiskā statistika

Mērķi:

1. pārbaudīt, vai dati ir normāli sadalīti, izmantojot speciālas procedūras (hipotēžu pārbaude);
2. vidējās vērtības, dispersijas kā arī citu parametru novērtējumi u.c.

Brauna kustību izmanto hipotēžu pārbaudē par gadījuma lieluma sadalījuma veidu (vai dati ir normāli sadalīti?).

Lai uzzinātu vairāk par varbūtību teoriju, statistiku un, protams, Brauna kustību, nāciet studēt LU Matemātiķa – statistiķa programmā!!!

Paldies par uzmanību!