Smagā tehnika matemātikā.

Raivis Bēts, LU FMF lektors

01.04.2017, Rīga

Saturs

- Skaitļu kopīgie dalītāji un dalāmie.
- Eiklīda algoritms.
- Smagā tehnika - ķēžu daļas.

Teorēma

$$\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b\ \exists! q \in \mathbb{Z}\ \exists! r \in \mathbb{N}\ (a = bq + r \wedge r < b).$$

Piemērs

$-7 = 3(-3) + 2.$

Šai piemērā $a = -7$, $b = 3$, $q = -3$ un $r = 2$.

Definīcija

Pieņemsim, ka $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}_+$ *un* $a = bq + r$, *kur* $r \in [0; b)$, *tad skaitli* q *sauc par nepilno dalījumu, bet skaitli* r *— par atlikumu.*

Sekas

Ja $a = bq + r$, $a, q \in \mathbb{Z}$, *un* $r = 0$, *tad nepilnais dalījums ir vienāds ar dalījumu.*

Skaitļu kopīgie dalītāji un dalāmie.

Definīcija

Skaitli q sauc par skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kopīgo dalītāju, ja $\forall i \in \overline{1, n}: \ q \searrow a_i$.

Definīcija

Lielāko no skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kopīgajiem dalītājiem sauc par skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lielāko kopīgo dalītāju.

Skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lielākā kopīgā dalītāja apzīmēšanai lietosim pierakstu $\mathrm{ld}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Skaitļu kopīgie dalītāji un dalāmie.

Definīcija

Ja

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{q | \forall i \in \overline{1, n}: \ q \setminus a_i\},$$

tad

$$\mathrm{ld}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max D(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Piemērs

$D(12, 8, 20) = \{1; 2; 4\}$, *bet*
$ld(12, 8, 20) = max\ D(12, 8, 20) = max\ \{1; 2; 4\} = 4.$

Definīcija

Skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sauc par relatīviem pirmskaitļiem, ja* $\mathrm{ld}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$.

Definīcija

Ja

$$\forall i \forall j \; (i \neq j \Rightarrow \mathrm{ld}(a_i, a_j) = 1),$$

tad skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sauc par savstarpējiem pirmskaitļiem.*

Piemērs

Ja a_1*=8,* a_2*=6 un* a_3*=3, tad tie ir relatīvi pirmskaitļi (jo izpildās* $\mathrm{ld}(8, 6, 3) = 1$*), bet tie nav savstarpēji pirmskaitļi (jo* $\mathrm{ld}(8, 6) = 2$*.)*

Skaitļu kopīgie dalītāji un dalāmie.

Teorēma

Ja a ir b daudzkārtnis, tad $D(a,b) = D(b)$.

Piemērs

Ja $a = 6$ un $b = 2$, tad $D(6,2) = \{1;2\} = D(2)$.

Sekas

Ja a ir b daudzkārtnis, tad $\mathrm{ld}(a,b) = b$.

Piemērs

Ja $a = 6$ un $b = 2$, tad $\mathrm{ld}(6,2) = 2$.

Skaitļu kopīgie dalītāji un dalāmie.

Teorēma

Ja $a = bq + c$, *tad* $D(a, b) = D(b, c)$.

Piemērs

$22 = 4 \cdot 5 + 2$, *tad* $D(22, 4) = \{1; 2\} = D(4, 2)$.

Sekas

Ja $a = bq + c$, *tad* $\mathrm{ld}(a, b) = \mathrm{ld}(b, c)$.

Piemērs

$52 = 6 \cdot 8 + 4$, *tad* $\mathrm{ld}(52, 6) = 2 = \mathrm{ld}(6, 4)$.

Eiklīda algoritms. Pieņemsim, ka $r_0 \in \mathbb{Z}$, bet $r_1 \in \mathbb{Z}_+$.
Eiklīda algoritmu definē induktīvi:
(i) Skaitli r_0 izsaka formā

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2, \qquad \text{kur} \qquad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Ja $r_2 = 0$, tad Eiklīda algoritms beidz darbu. Ja $r_2 \neq 0$, tad Eiklīda algoritms atkārto soli (i) par r_0 ņemot r_1, bet par r_1 ņemot r_2.

(ii) *Induktīvais solis.* Pieņemsim, ka iegūta vienādība

$$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}, \qquad \text{kur} \qquad 0 \leq r_{n+1} < r_n.$$

Ja $r_{n+1} = 0$, tad Eiklīda algoritms beidz darbu. Pretējā gadījumā, t.i., $r_{n+1} \neq 0$, Eiklīda algoritms atkārto soli (i) par r_0 ņemot r_n, bet par r_1 ņemot r_{n+1}.

Eiklīda algoritms.

Apgalvojums

Katram skaitļu pārim $r_0 \in \mathbb{Z}$, $r_1 \in \mathbb{Z}_+$ eksistē tāds $n \in \mathbb{Z}_+$, ka izpildās vienādības

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1 q_1 + r_2, && 0 < r_2 < r_1;\\
r_1 &= r_2 q_1 + r_3, && 0 < r_3 < r_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{i-1} &= r_i q_i + r_{i+1}, && 0 < r_{i+1} < r_i;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, && 0 < r_n < r_{n-1};\\
r_{n-1} &= r_n q_n + r_{n+1}, && 0 = r_{n+1} < r_n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Tātad

$$r_{n-1} = r_n q_n. \tag{2}$$

Eiklīda algoritms.

Piemērs

Izvēlamies $r_0 = 525$ *un* $r_1 = 231$. *Pielietosim Eiklīda algoritmu šiem diviem skaitļiem:*

$$\begin{aligned} 525 &= 231 \cdot 2 + 63, \qquad & 0 < 63 < 231; \\ 231 &= 63 \cdot 3 + 42, \qquad & 0 < 42 < 63; \\ 63 &= 42 \cdot 1 + 21, \qquad & 0 < 21 < 42; \\ 42 &= 21 \cdot 2 + 0, \qquad & 0 < 21. \end{aligned}$$

Apgalvojums

Skaitļu a *un* b *lielākais kopīgais dalītājs* $\mathrm{ld}(a, b)$ *ir vienāds ar pēdējo nenulles atlikumu Eiklīda algoritmā.*

Eiklīda algoritms.

Piemērs

Atrast $\mathrm{ld}(525, 231)$!

Risinājums. Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 525 & :231 = 2 \\
 & & - & 462 & \\
\cline{3-4}
 & & 231 & :63 & = 3 \\
 & - & 189 & & \\
\cline{2-3}
 & 63 & :42 & = 1 & \\
- & 42 & & & \\
\cline{1-2}
42: & 21 & = 2 & &
\end{array}
$$

Tā kā pēdējais nenulles atlikums ir 21, tad $\mathrm{ld}(525, 231) = 21$.

Eiklīda algoritms.

Uzdevums

Atrast $\mathrm{ld}(1064, 462)$!

Uzdevums

Atrast $\mathrm{ld}(1064, 462)$!

Risinājums. Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 1064 & : 462 = 2 \\
- & 924 &
\end{array}
$$

Uzdevums

Atrast $\mathrm{ld}(1064, 462)$!

Risinājums. Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$\begin{array}{rrrl} & & 1064 & : 462 = 2 \\ & - & 924 & \\ \hline & 462 & : 140 & = 3 \\ - & 420 & & \end{array}$$

Uzdevums

Atrast $\mathrm{ld}(1064, 462)$!

Risinājums. Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 1064 & : 462 = 2 \\
 & & - & 924 & \\
\cline{3-4}
 & & 462 & : 140 & = 3 \\
 & - & 420 & & \\
\cline{2-3}
 & 138 & : 42 & = 3 & \\
- & 126 & & &
\end{array}
$$

Eiklīda algoritms.

Uzdevums

Atrast $\mathrm{ld}(1064, 462)$!

Risinājums. Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & 1064 & :462 = 2 \\
 & & & - & 924 & \\
\cline{3-5}
 & & 462 & :140 & & = 3 \\
 & - & 420 & & & \\
\cline{1-3}
 & 138 & :42 & & = 3 & \\
- & 126 & & & & \\
\cline{1-2}
42: & 14 & & = 3 & &
\end{array}
$$

Tā kā pēdējais nenulles atlikums ir 14, tad $\mathrm{ld}(1064, 462) = 14$.

Eiklīda algoritms.

Apgalvojums

$\mathrm{ld}(am, bm) = m\,\mathrm{ld}(a, b).$

Piemērs

Ja $a = 6,\ b = 8$ *un* $m = 5,$ *tad*
$\mathrm{ld}(6 \cdot 5, 8 \cdot 5) = \mathrm{ld}(30, 40) = 10 = 5 \cdot 2 = 5 \cdot\ \mathrm{ld}(6, 8).$

Eiklīda algoritms.

Teorēma

Ja $\mathrm{ld}(a, b) = d$, *tad* $\exists x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : \quad ax + by = d.$

Piemērs

Izvēlēsimies $a = 14$ *un* $b = 8$, *tad*
$\exists x = 3, \exists y = -5 : \quad 14 \cdot 3 + 8 \cdot (-5) = 2.$

Uzdevums

Atrast x *un* y, *ja* $a = 18$, $b = 30$.

Uzdevums

Atrast x *un* y, *ja* $a = 18$, $b = 28$.

Eiklīda algoritms.

Atrisinājums

Izvēlēsimies $a = 18,\ b = 30,$ *tad* $\mathrm{ld}(18, 30) = 6$ *un*
$\exists x = 2, \exists y = -1 : \quad 18 \cdot 2 + 30 \cdot (-1) = 6.$

Atrisinājums

Izvēlēsimies $a = 18,\ b = 28,$ *tad* $\mathrm{ld}(18, 28) = 2$ *un*
$\exists x = -3, \exists y = 2 : \quad 18 \cdot (-3) + 28 \cdot 2 = 2.$

Sekas

$$\mathrm{ld}(a, b) = 1 \ \Leftrightarrow \ \exists x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} \quad ax + by = 1\,.$$

Piemērs

Izvēlēsimies $a = 16$ *un* $b = 21,$ *tad* $\mathrm{ld}(16, 21) = 1$ *un*
$\exists x = 4, \exists y = -3 : \quad 16 \cdot 4 + 21 \cdot (-3) = 1.$

Eiklīda algoritms.

Definīcija

Katru veselu pozitīvu skaitli, kas ir visu doto skaitļu daudzkārtnis sauc par šo skaitļu kopīgo dalāmo.

Sekas

Skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eksistē kopīgais dalāmais.

Definīcija

Mazāko no skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kopīgajiem dalāmajiem sauc par skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mazāko kopīgo dalāmo. *Skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mazākā kopīgā dalāmā apzīmēšanai lietosim pierakstu $\mathrm{md}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

Eiklīda algoritms.

Apgalvojums

$$\frac{ab}{\mathrm{ld}(a,b)} = \mathrm{md}(a,b) \;\; \textit{jeb} \; ab = \mathrm{ld}(a,b) \cdot \mathrm{md}(a,b) \quad .$$

Piemērs

Ja $a = 15$ *un* $b = 21$, *tad* $\mathrm{ld}(15,21) = 3$ *un* $\mathrm{md}(15,21) = 105$.
Tiešām izpildās apgalvojumā teiktais: $\frac{15 \cdot 21}{3} = \frac{315}{3} = 105$.

Ķēžu daļas.

Definīcija

Vektoru pāri $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ *sauc par galīgu ķēžu daļu, ja:*
(i) $\forall i > 1\ q_i > 0$;
(ii)

$$\delta_i = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{i-1} + \cfrac{1}{q_i}}}}.$$

q_i sauc par i–to *nepilno dalījumu*;
δ_i sauc par i–to *tuvinājuma daļu*.

Ķēžu daļas.

Galīgas ķēžu daļas apzīmēšanai lieto pierakstu $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$.

Definīcija

Galīgu ķēžu daļu $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ *sauc par skaitļa* $\alpha \in \mathbb{R}$ reprezentāciju, *ja* $\alpha = \delta_n$.

Definīcija

Šai gadījumā mēs arī teiksim, ka ķēžu daļa $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ *reprezentē skaitli* α.

Ķēžu daļas.

$\lfloor x \rfloor$ - veselā daļa no apakšas, bet $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

Piemērs

$\lfloor 14,23 \rfloor = 14,$ *bet* $\{14,23\} = 14,23 - 14 = 0,23.$

Eilera algoritms. Dots reāls skaitlis α.
Algoritma sākums. Definējam $\alpha_1 \leftharpoondown\!\!\!=\, \alpha$ Aprēķinam $q_1 \leftharpoondown\!\!\!=\, \lfloor \alpha_1 \rfloor$.
(i) Ja $\{\alpha_1\} = 0$, tad algoritms beidz darbu;
(ii) ja $\{\alpha_1\} \neq 0$, tad aprēķinam $\alpha_2 \leftharpoondown\!\!\!=\, \dfrac{1}{\{\alpha_1\}}$, un tālāk algoritms turpina darbu saskaņā ar induktīvo soli.
Induktīvais solis. Dots reāls skaitlis α_n. Aprēķinam $q_n \leftharpoondown\!\!\!=\, \lfloor \alpha_n \rfloor$.
(i) Ja $\{\alpha_n\} = 0$, tad algoritms beidz darbu;
(ii) ja $\{\alpha_n\} \neq 0$, tad aprēķinam $\alpha_{n+1} \leftharpoondown\!\!\!=\, \dfrac{1}{\{\alpha_n\}}$, un tālāk algoritms turpina darbu saskaņā ar induktīvo soli.

Ķēžu daļas.

Tā rezultātā katram reālam skaitlim α Eilera algoritms, ja tas ir beidzis darbu, tad ir uzģenerējis divas galīgas virknes:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n;$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Pretējā gadījumā Eilera algoritms ģenerē divas bezgalīgas virknes:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

Ķēžu daļas.

Piemērs

Pielietosim Eilera algoritmu skaitlim $\alpha = \frac{27}{10} = 2,7$. *Definē* $\alpha_1 = \frac{27}{10}$. *Tātad* $q_1 = \lfloor \frac{27}{10} \rfloor = 2$. *Iegūstam, ka*
$\alpha_2 = \dfrac{1}{\{\alpha_1\}} = \dfrac{10}{7}$. *Seko, ka* $q_2 = \lfloor \frac{10}{7} \rfloor = 1$. *Iegūstam, ka*
$\alpha_3 = \dfrac{1}{\{\alpha_2\}} = \dfrac{7}{3}$. *Seko, ka* $q_3 = \lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$. *Iegūstam, ka*
$\alpha_4 = \dfrac{1}{\{\alpha_3\}} = \dfrac{3}{1} = 3$. *Seko, ka* $q_4 = \lfloor 3 \rfloor = 3$. *Iegūstam, ka*
$\{\alpha_4\} = 0$ *un algoritms beidz darbu.*

Ķēžu daļas.

Apgalvojums

Ja q_i skaitlim α ģenerēti saskaņā ar Eilera algoritmu un $\{\alpha_n\} \neq 0$, tad

$$[q_1; q_2, \ldots, q_n, \alpha_{n+1}]$$

ir skaitļa α reprezentācija.

Apgalvojums

Ja q_i skaitlim α ģenerēti saskaņā ar Eilera algoritmu un $\{\alpha_n\} = 0$, tad

$$[q_1; q_2, \ldots, q_n]$$

ir skaitļa α reprezentācija.

Ķēžu daļas.

Piemērs

Pielietosim Eilera algoritmu skaitlim $\alpha = \frac{27}{10} = 2,7$. *Definēsim* $\alpha_1 = \frac{27}{10}$. *Tātad* $q_1 = \lfloor \frac{27}{10} \rfloor = 2$. *Iegūstam, ka* $\alpha_2 = \dfrac{1}{\{\alpha_1\}} = \dfrac{10}{7}$. *Seko, ka* $q_2 = \lfloor \frac{10}{7} \rfloor = 1$. *Iegūstam, ka* $\alpha_3 = \dfrac{1}{\{\alpha_2\}} = \dfrac{7}{3}$. *Seko, ka* $q_3 = \lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$. *Iegūstam, ka* $\alpha_4 = \dfrac{1}{\{\alpha_3\}} = \dfrac{3}{1} = 3$. *Seko, ka* $q_4 = \lfloor 3 \rfloor = 3$. *Iegūstam, ka* $\{\alpha_4\} = 0$ *un algoritms beidz darbu.*

Tātad skaitļa $\frac{27}{10} = 2,7$ reprezentācija ir ķēžu daļa $[2; 1; 2; 3]$.

Teorēma

Eilera algoritms skaitlim α *beidz darbu galīgā soļu skaitā tad un tikai tad, ja* $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Rekurences virknes. Katrai reālo skaitļu virknei $(q_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ definēsim virkņu pāri $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} P_0 &\coloneqq 1, \quad P_1 \coloneqq q_1, \quad P_n \coloneqq q_n P_{n-1} + P_{n-2};\\ Q_0 &\coloneqq 0, \quad Q_1 \coloneqq 1, \quad Q_n \coloneqq q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\,. \end{aligned}$$

Definīcija

Virknes (P_n), (Q_n) sauc par virknes (q_n) rekurences virknēm.

Teorēma

Katrai ķēžu daļai $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ tuvinājuma daļa

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}\,.$$

Piemērs

Skaitļa $\alpha = \dfrac{105}{38}$ *izvirzījums ķēžu daļā.*

Risinājums. Izmantojam Eiklīda algoritmu:

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rl}
105 & : 38 = 2 \\
- \quad 76 &
\end{array}
$$

Vienlaicīgi sastādīsim tabulu izmantojot

$$
P_0 \leftharpoondown 1, \quad P_1 \leftharpoondown q_1, \quad P_n \leftharpoondown q_n P_{n-1} + P_{n-2};
$$
$$
Q_0 \leftharpoondown 0, \quad Q_1 \leftharpoondown 1, \quad Q_n \leftharpoondown q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\,.
$$

q_i		2				
P_i	1	2				
Q_i	0	1				

Ķēžu daļas.

$$\begin{array}{rrrl} & 105 & : 38 = 2 \\ - & 76 & \\ \hline 38 & : 29 & = 1 \\ - \ 29 & & \end{array}$$

Vienlaicīgi sastādīsim tabulu izmantojot

$$P_0 \leftharpoondown 1, \quad P_1 \leftharpoondown q_1, \quad P_n \leftharpoondown q_n P_{n-1} + P_{n-2};$$
$$Q_0 \leftharpoondown 0, \quad Q_1 \leftharpoondown 1, \quad Q_n \leftharpoondown q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\,.$$

q_i		2	1			
P_i	1	2	3			
Q_i	0	1	1			

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 105 & :38 = 2 & \\
 & - & 76 & & \\
\hline
 & 38 & :29 & = 1 & \\
- & 29 & & & \\
\hline
29 & :9 & = 3 & & \\
- \; 27 & & & &
\end{array}$$

Vienlaicīgi sastādīsim tabulu izmantojot

$$P_0 \leftrightharpoons 1, \quad P_1 \leftrightharpoons q_1, \quad P_n \leftrightharpoons q_n P_{n-1} + P_{n-2};$$
$$Q_0 \leftrightharpoons 0, \quad Q_1 \leftrightharpoons 1, \quad Q_n \leftrightharpoons q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

q_i		2	1	3		
P_i	1	2	3	11		
Q_i	0	1	1	4		

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & 105 & :38 = 2 & \\
 & & & - & 76 & & \\
\hline
 & & & 38 & :29 & = 1 & \\
 & & - & 29 & & & \\
\hline
 & & 29 & :9 & = 3 & & \\
 & - & 27 & & & & \\
\hline
 & 9 & :2 & = 4 & & & \\
- & 8 & & & & &
\end{array}
$$

Vienlaicīgi sastādīsim tabulu izmantojot

$$P_0 = 1, \quad P_1 = q_1, \quad P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2};$$
$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1, \quad Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\,.$$

q_i		2	1	3	4	
P_i	1	2	3	11	47	
Q_i	0	1	1	4	17	

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & 105 & :38 = 2 & \\
 & & & - & 76 & & \\
\hline
 & & & 38 & :29 & = 1 & \\
 & & - & 29 & & & \\
\hline
 & & 29 & :9 & = 3 & & \\
 & - & 27 & & & & \\
\hline
 & 9 & :2 & = 4 & & & \\
- & 8 & & & & & \\
\hline
2 & :1 & = 2 & & & &
\end{array}
$$

Vienlaicīgi sastādīsim tabulu izmantojot

$$
P_0 := 1, \quad P_1 := q_1, \quad P_n := q_n P_{n-1} + P_{n-2};
$$

$$
Q_0 := 0, \quad Q_1 := 1, \quad Q_n := q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}\,.
$$

q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Ķēžu daļas.

$$105 : 38 = 2$$
$$-\ 76$$
$$38 : 29 = 1$$
$$-\ 29$$
$$29 : 9 = 3$$
$$-\ 27$$
$$9 : 2 = 4$$
$$-\ 8$$
$$2 : 1 = 2$$

q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Tā rezultātā ķēžu daļa $[2; 1, 3, 4, 2]$ reprezentē skaitli $\dfrac{105}{38}$.

Ķēžu daļas.

q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Pārbaudīsim, vai izpildās teorēma, ka katrai ķēžu daļai $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ tuvinājuma daļa

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}\,.$$

$\delta_1 = q_1 = 2 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1}$.

Ķēžu daļas.

q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Pārbaudīsim, vai izpildās teorēma, ka katrai ķēžu daļai $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ tuvinājuma daļa

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$

$$\delta_2 = q_1 + \frac{1}{q_2} = 2 + \frac{1}{1} = 2 + 1 = 3 = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{3}{1}.$$

q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Pārbaudīsim, vai izpildās teorēma, ka katrai ķēžu daļai $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ tuvinājuma daļa

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}\,.$$

$$\delta_3 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4} = \frac{P_3}{Q_3}\,.$$

Ķēžu daļas.

q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Pārbaudīsim, vai izpildās teorēma, ka katrai ķēžu daļai $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ tuvinājuma daļa

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}\,.$$

$$\delta_4 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{4}{13}} =$$

$$2 + \frac{13}{17} = \frac{47}{17} = \frac{P_4}{Q_4}\,.$$

Ķēžu daļas.

q_i		2	1	3	4	2
P_i	1	2	3	11	47	105
Q_i	0	1	1	4	17	38

Pārbaudīsim, vai izpildās teorēma, ka katrai ķēžu daļai $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ tuvinājuma daļa

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}\,.$$

$$\delta_5 = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}} =$$

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{9}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{9}{29}} = 2 + \frac{29}{38} = \frac{105}{38} = \frac{P_4}{Q_4}\,.$$

Uzdevums

Atrast skaitļa $\alpha = \dfrac{257}{74}$ *izvirzījumu ķēžu daļā un pārbaudīt, vai ir spēkā, ka katrai ķēžu daļai* $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ *tuvinājuma daļa*

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n}\,.$$

Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$\begin{array}{rrl} & 257 & : 74 = 3 \\ - & 222 & \end{array}$$

Ķēžu daļas.

Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrrl}
 & & 257 & :74 = 3 \\
 & - & 222 & \\
\cline{2-3}
 & 74 & :35 & = 2 \\
- & 70 & &
\end{array}
$$

Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 257 & :74 = 3 & \\
 & - & 222 & & \\
\cline{2-3}
 & 74 & :35 & = 2 & \\
- & 70 & & & \\
\cline{1-2}
35 & :4 & = 8 & & \\
- \; 32 & & & &
\end{array}
$$

Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 257 & :74=3 & \\
 & - & 222 & & \\
\hline
 & 74 & :35 & =2 & \\
- & 70 & & & \\
\hline
35 & :4 & =8 & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr}
 & 35 & :4 \\
- & 32 & \\
\hline
 & 4 & :3 = 1 \\
- & 3 & \\
\end{array}
$$

Ķēžu daļas.

Izmantojam Eiklīda algoritmu:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & & 257 & :74 = 3 \\
 & & & - & 222 & \\
\cline{4-5}
 & & & 74 & :35 & = 2 \\
 & & - & 70 & & \\
\cline{3-4}
 & & 35 & :4 & = 8 & \\
 & - & 32 & & & \\
\cline{2-3}
 & 4 & :3 & = 1 & & \\
- & 3 & & & & \\
\cline{1-2}
3 & :1 & = 3 & & &
\end{array}
$$

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 257 & : 74 = 3 \\
 & & - & 222 & \\
\hline
 & & 74 & : 35 & = 2 \\
 & - & 70 & & \\
\hline
 & 35 & : 4 & = 8 & \\
- & 32 & & & \\
\hline
4 & : 3 & = 1 & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrr}
- & 3 & \\
\hline
3 & :1 & = 3
\end{array}
$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3				
P_i	1					
Q_i	0	1				

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & & 257 & :74 = 3 \\
 & & & & - & 222 & \\
\cline{4-6}
 & & & 74 & :35 & & = 2 \\
 & & - & 70 & & & \\
\cline{3-4}
 & & 35 & :4 & = 8 & & \\
 & - & 32 & & & & \\
\cline{2-3}
 & 4 & :3 & = 1 & & & \\
- & 3 & & & & & \\
\cline{1-2}
3 & :1 & = 3 & & & &
\end{array}
$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3				
P_i	1	3				
Q_i	0	1				

Ķēžu daļas.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & & 257 & :74=3 \\
 & & & & - & 222 & \\
\hline
 & & & 74 & :35 & =2 & \\
 & & - & 70 & & & \\
\hline
 & & 35 & :4 & =8 & & \\
 & - & 32 & & & & \\
\hline
 & 4 & :3 & =1 & & & \\
- & 3 & & & & & \\
\hline
3 & :1 & =3 & & & &
\end{array}$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3	2			
P_i	1	3				
Q_i	0	1				

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & 257 & : 74 = 3 & \\
 & & - & 222 & & \\
\hline
 & & 74 & : 35 & = 2 & \\
 & - & 70 & & & \\
\hline
 & 35 & : 4 & = 8 & & \\
- & 32 & & & & \\
\hline
4 & : 3 & = 1 & & & \\
- \; 3 & & & & & \\
\hline
3 \; :1 & = 3 & & & &
\end{array}
$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3	2	8		
P_i	1	3	7			
Q_i	0	1	2			

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & 257 & :74 = 3 \\
 & & & - & 222 & \\ \cline{4-5}
 & & & 74 & :35 & = 2 \\
 & & - & 70 & & \\ \cline{3-4}
 & & 35 & :4 & = 8 & \\
 & - & 32 & & & \\ \cline{2-3}
 & 4 & :3 & = 1 & & \\
- & 3 & & & & \\ \cline{1-2}
3 & :1 & = 3 & & &
\end{array}
$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3	2	8	1	
P_i	1	3	7	59		
Q_i	0	1	2	17		

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & 257 & : 74 = 3 & \\
 & & & - & 222 & & \\
\hline
 & & & 74 & : 35 & = 2 & \\
 & & - & 70 & & & \\
\hline
 & & 35 & : 4 & = 8 & & \\
 & - & 32 & & & & \\
\hline
 & 4 & : 3 & = 1 & & & \\
- & 3 & & & & & \\
\hline
3 & :1 & = 3 & & & &
\end{array}
$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3	2	8	1	3
P_i	1	3	7	59	66	
Q_i	0	1	2	17	19	

Ķēžu daļas.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 257 & :74 = 3 \\
 & & & - & 222 & \\
\hline
 & & & 74 & :35 & = 2 \\
 & & - & 70 & & \\
\hline
 & & 35 & :4 & = 8 & \\
 & - & 32 & & & \\
\hline
 & 4 & :3 & = 1 & & \\
- & 3 & & & & \\
\hline
3 & :1 & = 3 & & &
\end{array}$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3	2	8	1	3
P_i	1	3	7	59	66	257
Q_i	0	1	2	17	19	74

Ķēžu daļas.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & & 257 & :74 & = 3 \\
 & & & & - & 222 & & \\
\cline{5-6}
 & & & & 74 & :35 & = 2 & \\
 & & & - & 70 & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 35 & :4 & = 8 & & \\
 & & - & 32 & & & & \\
\cline{3-4}
 & & 4 & :3 & = 1 & & & \\
 & - & 3 & & & & & \\
\cline{2-3}
 & 3 & :1 & = 3 & & & &
\end{array}
$$

Tagad varam sastādīt tabulu:

q_i		3	2	8	1	3
P_i	1	3	7	59	66	257
Q_i	0	1	2	17	19	74

Tā rezultātā ķēžu daļa $[3; 2, 8, 1, 3]$ reprezentē skaitli $\dfrac{257}{74}$.

Ķēžu daļas.

Uzdevums

Kādu daļskaitli reprezentē ķēžu daļa $[1; 3, 2, 2, 4]$*? Sastādīt tabulu*

q_i						
P_i						
Q_i						

Ķēžu daļai $[1;3,2,2,4]$ atbilst skaitlis

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5}}}} =$$

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ atbilst skaitlis

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5}}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} =$$

Ķēžu daļai $[1;3,2,2,4]$ atbilst skaitlis

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5}}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{4}}}} =$$

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{4}{9}}} =$$

Ķēžu daļai $[1;3,2,2,4]$ atbilst skaitlis

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5}}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} =$$

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{4}{9}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \frac{9}{22}} =$$

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ atbilst skaitlis

$$\alpha = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cfrac{1}{q_5}}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} =$$

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \frac{4}{9}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \frac{9}{22}} = 1 + \frac{22}{75} = \frac{97}{75}.$$

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ varam sastādīt arī tabulu

q_i		1				
P_i	1					
Q_i	0	1				

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ varam sastādīt arī tabulu

q_i		1	3			
P_i	1	1				
Q_i	0	1				

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ varam sastādīt arī tabulu

q_i		1	3	2		
P_i	1	1	4			
Q_i	0	1	3			

Ķēžu daļas.

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ varam sastādīt arī tabulu

q_i		1	3	2	2	
P_i	1	1	4	9		
Q_i	0	1	3	7		

Ķēžu daļas.

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ varam sastādīt arī tabulu

q_i		1	3	2	2	4
P_i	1	1	4	9	22	
Q_i	0	1	3	7	17	

Ķēžu daļas.

Ķēžu daļai $[1; 3, 2, 2, 4]$ varam sastādīt arī tabulu

q_i		1	3	2	2	4
P_i	1	1	4	9	22	97
Q_i	0	1	3	7	17	75

Pasaulslavena problēma. Pieņemsim, ka ķēžu daļa $[q_1; q_2, \ldots, q_n, \ldots]$ skaitlim $\sqrt[3]{2}$ iegūta ar Eilera algoritmu. Vai virkne (q_n) ir ierobežota?

Paldies par uzmanību!