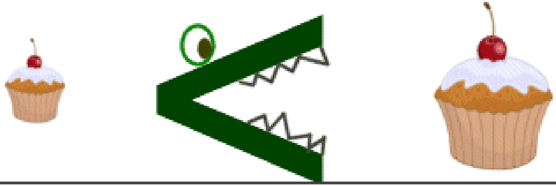
Nevienādības starp vidējiem

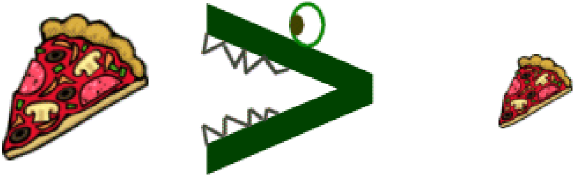
Mārtiņš Kokainis

Latvijas Universitāte, NMS

Rīga, 2017



levads



- **Atrisināt nevienādību** nozīmē atrast visus tās atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu nav.

- **Pierādīt nevienādību** ar vienu vai vairākiem mainīgajiem nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa pie jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

Galvenās nevienādību pierādīšanas metodes

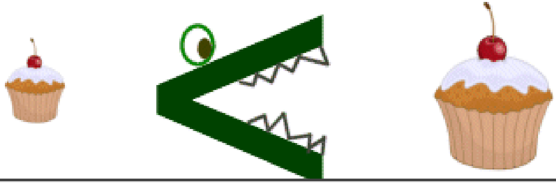
- Ekvivalenti pārveidojumi:
  - algebriski pārveidojumi (nevienādības vienas puses vai abu pušu sadalīšana reizinātājos);
  - pilno kvadrātu atdalīšana;
- Nevienādību pastiprināšana:
  - saskaitāmo / reizinātāju novērtēšana;
  - **sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko**;
  - klasisko nevienādību izmantošana (Koši, Jensena, utt).

Pilno kvadrātu atdalīšana

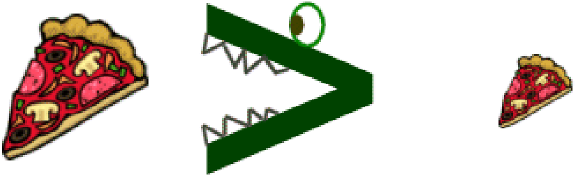
- Ja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes un $c_1, \ldots, c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, tad
$$c_1 A_1^2 + c_2 A_2^2 + \ldots + c_n A_n^2 \geq 0.$$

- Daudzas sarežģītākas nevienādības būtu grūti pierādīt, neizmantojot speciālas nevienādības un teorēmas.

- Daudzas sarežģītākas nevienādības būtu grūti pierādīt, neizmantojot speciālas nevienādības un teorēmas.
- Klasiskākā un visnozīmīgākā ir t.s. nevienādība starp nenegatīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.



Vidējo lielumu definīcijas



Vidējais aritmētiskais (arithmetic mean, AM)

Par n skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējo aritmētisko sauc lielumu

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Vidējais ğeometriskais (geometric mean, GM)

Par n **nenegatīvu** skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējo ğeometrisko sauc n-tās pakāpes sakni no šo skaitļu reizinājuma, t.i., lielumu

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}.$$

- Skaitļu 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

- Skaitļu 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

- Vidējais ğeometriskais nav definēts, jo starp dotajiem ir arī nenegatīvi skaitļi (ceturtās pakāpes sakne no negatīva skaitļa??)!

- Skaitļu 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

- Vidējais ğeometriskais nav definēts, jo starp dotajiem ir arī nenegatīvi skaitļi (ceturtās pakāpes sakne no negatīva skaitļa??)!

- Cits piemērs: ja doti skaitļi 1, 3, 2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3+2+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

- Skaitļu 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

- Vidējais ğeometriskais nav definēts, jo starp dotajiem ir arī nenegatīvi skaitļi (ceturtās pakāpes sakne no negatīva skaitļa??)!

- Cits piemērs: ja doti skaitļi 1, 3, 2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3+2+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

- Šo skaitļu vidējais ğeometriskais ir

$$\sqrt[4]{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[4]{24} \approx 2.213.$$

1. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ğeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.04; \quad 0.5; \quad 1; \quad 15; \quad 45; \quad 54.$$

1. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ğeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.04; \quad 0.5; \quad 1; \quad 15; \quad 45; \quad 54.$$

- Vidējais aritmētiskais:

1. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.04; \quad 0.5; \quad 1; \quad 15; \quad 45; \quad 54.$$

- Vidējais aritmētiskais:

$$\frac{0.04 + 0.5 + 1 + 15 + 45 + 54}{6} = \frac{115.54}{6} = 19\,\frac{154}{600} \approx 19.25666.$$

1. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ğeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.04;\quad 0.5;\quad 1;\quad 15;\quad 45;\quad 54.$$

- Vidējais aritmētiskais:

$$\frac{0.04+0.5+1+15+45+54}{6} = \frac{115.54}{6} = 19\,\frac{154}{600} \approx 19.25666.$$

- Vidējais ğeometriskais:

1. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.04;\quad 0.5;\quad 1;\quad 15;\quad 45;\quad 54.$$

- Vidējais aritmētiskais:

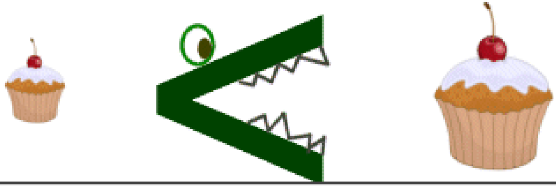
$$\frac{0.04+0.5+1+15+45+54}{6} = \frac{115.54}{6} = 19\,\frac{154}{600} \approx 19.25666.$$

- Vidējais ģeometriskais:

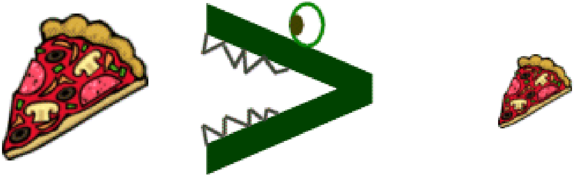
$$\sqrt[6]{0.04\cdot 0.5\cdot 1\cdot 15\cdot 45\cdot 54} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(3\cdot 5)\cdot(3^2\cdot 5)\cdot(3^3\cdot 2)} =$$

$$= \sqrt[6]{3^6} = 3.$$



AM-GM nevienādība



AM-GM nevienādība

Ja a_1, a_2, ..., a_n ir nenegatīvi skaitļi, tad

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n},$$

t.i., nenegatīvu skaitļu
vidējais aritmētiskais ir lielāks vai vienāds ar šo skaitļu **vidējo ğeometrisko**, turklāt vienādība ir tad un tikai tad, ja visi skaitļi ir vienādi, t.i., $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 2$

- Ja $n = 2$, tad iegūstam: visiem nenegatīviem a_1, a_2 izpildās

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

jeb

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 2$

Pierādījums

- Apzīmē $x = \sqrt{a_1}$ un $y = \sqrt{a_2}$, tad ir jāpierāda

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 2$

Pierādījums

- Apzīmē $x = \sqrt{a_1}$ un $y = \sqrt{a_2}$, tad ir jāpierāda
$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$
- Taču šī nevienādība ir patiesa, jo tā ir ekvivalenta nevienādībai
$$(x - y)^2 \geq 0,$$
kas ir patiesa, tā kā tās kreisajā pusē ir reāla skaitļa kvadrāts.
- Ievērosim, ka $(x - y)^2 = 0$ tikai gadījumā, ja $x = y$, t.i., $a_1 = a_2$!!

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 3$

- Ja $n = 3$, tad iegūstam: visiem nenegatīviem a_1, a_2 izpildās

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

jeb

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 3$

Pierādījums

- Apzīmē $x = \sqrt[3]{a_1}$ un $y = \sqrt[3]{a_2}$ un $z = \sqrt[3]{a_3}$, tad ir jāpierāda

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 3$

Pierādījums

- Apzīmē $x = \sqrt[3]{a_1}$ un $y = \sqrt[3]{a_2}$ un $z = \sqrt[3]{a_3}$, tad ir jāpierāda
$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$
- Izmantosim identitāti
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\left(\frac{(x-y)^2}{2} + \frac{(y-z)^2}{2} + \frac{(z-x)^2}{2}\right).$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 3$

Pierādījums

- Apzīmē $x = \sqrt[3]{a_1}$ un $y = \sqrt[3]{a_2}$ un $z = \sqrt[3]{a_3}$, tad ir jāpierāda

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

- Izmantosim identitāti

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(\frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(y-z)^2}{2}+\frac{(z-x)^2}{2}\right).$$

- Tā kā $x, y, z \geq 0$, tad $x + y + z \geq 0$.
- Arī katrs no saskaitāmajiem $\frac{(x-y)^2}{2}$, $\frac{(y-z)^2}{2}$, $\frac{(z-x)^2}{2}$ ir nenegatīvs.

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 3$

Pierādījums

- Apzīmē $x = \sqrt[3]{a_1}$ un $y = \sqrt[3]{a_2}$ un $z = \sqrt[3]{a_3}$, tad ir jāpierāda
$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$
- Izmantosim identitāti
$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(\frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(y-z)^2}{2}+\frac{(z-x)^2}{2}\right).$$
- Tā kā $x, y, z \geq 0$, tad $x + y + z \geq 0$.
- Arī katrs no saskaitāmajiem $\frac{(x-y)^2}{2}$, $\frac{(y-z)^2}{2}$, $\frac{(z-x)^2}{2}$ ir nenegatīvs.
- Secinām, ka $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$, kas ir ekvivalenti pierādāmajai nevienādībai.
- Vienādība pastāv tikai tad, ja $x = y = z$.

1. piemērs

Pierādīt, ka pozitīviem x un y pastāv nevienādība

$$x^2y + x + y + xy^2 \geq 4xy.$$

1. piemērs

Pierādīt, ka pozitīviem x un y pastāv nevienādība

$$x^2y + x + y + xy^2 \geq 4xy.$$

- No AM-GM nevienādības seko, ka

$$x^2y + y \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy.$$

un

$$xy^2 + x \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy.$$

1. piemērs

Pierādīt, ka pozitīviem x un y pastāv nevienādība

$$x^2y + x + y + xy^2 \geq 4xy.$$

- No AM-GM nevienādības seko, ka

$$x^2y + y \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy.$$

un

$$xy^2 + x \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy.$$

- Tātad

$$x^2y + x + y + xy^2 \geq 4xy,$$

kas arī bija jāpierāda.

2. piemērs

Pierādīt, ka jebkura pozitīva skaitļa summa ar tā apgriezto skaitli ir vismaz 2!

2. piemērs

Pierādīt, ka jebkura pozitīva skaitļa summa ar tā apgriezto skaitli ir vismaz 2!

- Pieņemsim, ka $x > 0$; jāpierāda

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

2. piemērs

Pierādīt, ka jebkura pozitīva skaitļa summa ar tā apgriezto skaitli ir vismaz 2!

- Pieņemsim, ka $x > 0$; jāpierāda

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

- No AM-GM nevienādības seko, ka

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \cdot \sqrt{1} = 2,$$

kas arī bija jāpierāda.

2. uzdevums

Pierādīt, ka visām pozitīvām a, b, c vērtībām abi skaitļi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{un} \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

ir ne mazāki par 3.

2. uzdevums

Pierādīt, ka visām pozitīvām a, b, c vērtībām abi skaitļi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{un} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

ir ne mazāki par 3.

- Pielietosim AM-GM nevienādību skaitļiem $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$:

2. uzdevums

Pierādīt, ka visām pozitīvām a, b, c vērtībām abi skaitļi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{un} \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

ir ne mazāki par 3.

- Pielietosim AM-GM nevienādību skaitļiem $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}.$$

2. uzdevums

Pierādīt, ka visām pozitīvām a, b, c vērtībām abi skaitļi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{un} \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

ir ne mazāki par 3.

- Pielietosim AM-GM nevienādību skaitļiem $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}.$$

- Iegūtās nevienādības labajā pusē ir $\sqrt[3]{1}=1$; reizina nevienādību ar 3, iegūstot ...

2. uzdevums

Pierādīt, ka visām pozitīvām a, b, c vērtībām abi skaitļi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{un} \quad \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

ir ne mazāki par 3.

- Pielietosim AM-GM nevienādību skaitļiem $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$:

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}.$$

- Iegūtās nevienādības labajā pusē ir $\sqrt[3]{1}=1$; reizina nevienādību ar 3, iegūstot ...

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3.$$

- Analoģiski pamato, ka arī $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geq 3$.

3. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

3. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Dala abas nevienādības puses ar 8, iegūstot ekvivalentu nevienādību:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq 1.$$

3. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Dala abas nevienādības puses ar 8, iegūstot ekvivalentu nevienādību:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq 1.$$

- No AM-GM seko nevienādības

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}; \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

3. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = abc.$$

3. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq \sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca} = abc.$$

- Izmantojot nosacījumu $abc = 1$, secinām

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq abc = 1.$$

3. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Pierādīta nevienādība

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq 1;$$

  tātad arī sākotnējā, ekvivalentā nevienādība ir patiesa.

4. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

4. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

- Apzīmē $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$, tad pierādāmā nevienādība kļūst

  $$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \leq 1$$

  jeb, ekvivalenti,

  $$\frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \leq \frac{x}{x+1}.$$

- Reizinām iegūto nevienādību ar pozitīvu skaitli $(x+1)(y+1)(z+1)$, iegūstot ...

4. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

- Reizinām iegūto nevienādību ar pozitīvu skaitli $(x+1)(y+1)(z+1)$, iegūstot

  $$(z+1)(x+1) + (y+1)(x+1) \leq x(y+1)(z+1)$$

  jeb

  $$x + y + z + 2 \leq xyz.$$

- Atgriežamies pie mainīgajiem a, b, c, iegūstot ...

4. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

- Atgriežamies pie mainīgajiem a, b, c, iegūstot ...

  $$2(a+b+c) + 2 \leq (a+b)(b+c)(c+a)$$

  jeb

  $$2(a+b+c) + 2 \leq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc.$$

- No dotā $abc = 1$ izriet, ka dotā nevienādība ir ekvivalenta ar ...

4. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

- No dotā $abc = 1$ izriet, ka dotā nevienādība ir ekvivalenta ar ...

$$2(a+b+c) \leq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

- No AM-GM nevienādības izriet, ka $a^2b + a^2c + 1 \geq \ldots$

4. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

- No AM-GM nevienādības izriet, ka $a^2b + a^2c + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot a^2c \cdot 1} = 3\sqrt[3]{a^3 \cdot abc} = 3a$.
- Līdzīgi iegūst

$$b^2c + b^2a + 1 \geq 3b \quad \text{un} \quad c^2a + c^2b + 1 \geq 3c.$$

- Tātad pierādāmās nevienādības labā puse $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$ apmierina

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 \geq 3(a+b+c) - 3.$$

- Vai var parādīt, ka $2(a+b+c) \leq 3(a+b+c) - 3$?

4. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

- Pietiekami parādīt, ka $3 \leq a + b + c$.
- Taču tas izriet no AM-GM nevienādības:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1.$$

- Tātad

$$2(a+b+c) \leq 3(a+b+c) - 3 \leq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2,$$

un arī sākotnējā nevienādība, kas ir ekvivalenta iegūtajai, ir patiesa.

3. uzdevums

Dots polinoms

$$P(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

Pierādīt, ka $P(x,y) \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x, y.

3. uzdevums

Dots polinoms

$$P(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

Pierādīt, ka $P(x, y) \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x, y.

- Pārveido:

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

- Šķirosim divus gadījumus:
  - $x^2 + y^2 \geq 1$ un
  - $x^2 + y^2 < 1$.

3. uzdevums

Dots polinoms

$$P(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

Pierādīt, ka $P(x,y) \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x, y.

- Ja $x^2 + y^2 \geq 1$, tad
  - $(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$ pēc pieņēmuma;
  - $x^2y^2 = (xy)^2 \geq 0$ kā reāla skaitļa kvadrāts;
  - $1/27 > 0$,

  tātad $P(x,y) > 0$.

3. uzdevums

Dots polinoms

$$P(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

Pierādīt, ka $P(x,y) \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x, y.

- Apskata gadījumu $x^2 + y^2 < 1$.

3. uzdevums

Dots polinoms

$$P(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

Pierādīt, ka $P(x,y) \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x, y.

- Apskata gadījumu $x^2 + y^2 < 1$.
- Pielietosim AM-GM nevienādību reizinājumam

$$(1 - x^2 - y^2)x^2y^2.$$

3. uzdevums

Dots polinoms

$$P(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

Pierādīt, ka $P(x, y) \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x, y.

- No AM-GM nevienādības izriet, ka

$$\sqrt[3]{(1 - x^2 - y^2)x^2y^2} \leq \frac{(1 - x^2 - y^2) + x^2 + y^2}{3} = \frac{1}{3},$$

t.i.,

$$(1 - x^2 - y^2)x^2y^2 \leq \frac{1}{27}.$$

3. uzdevums

Dots polinoms

$$P(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 + \frac{1}{27}.$$

Pierādīt, ka $P(x,y) \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem x, y.

- Taču tad

  $$P(x,y) = \frac{1}{27} - (1 - x^2 - y^2)x^2y^2 \geq 0,$$

  k.b.j.
- Vērts atzīmēt, ka $P(x,y)$ nevar izteikt kā vairāku polinomu (ar reāliem koeficientiem) kvadrātu summu:

$$P(x,y) \neq (Q_1(x,y))^2 + (Q_2(x,y))^2 + \ldots + (Q_n(x,y))^2.$$

5. piemērs

Pierādīt nevienādību

$$2^n n! \leq (n+1)^n,$$

kur $n!$ nozīmē skaitļa n faktoriālu: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

5. piemērs

Pierādīt nevienādību

$$2^n n! \leq (n+1)^n,$$

kur $n!$ nozīmē skaitļa n faktoriālu: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

- Pielietosim AM-GM nevienādību pirmajiem n naturāliem skaitļiem:

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}.$$

5. piemērs

Pierādīt nevienādību

$$2^n n! \leq (n+1)^n,$$

kur $n!$ nozīmē skaitļa n faktoriālu: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

- Pielietosim AM-GM nevienādību pirmajiem n naturāliem skaitļiem:

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}.$$

- Pirmo n naturālo skaitļu summa ir

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

tātad pamatota nevienādība

$$\frac{n+1}{2} \geq \sqrt[n]{n!}.$$

5. piemērs

Pierādīt nevienādību

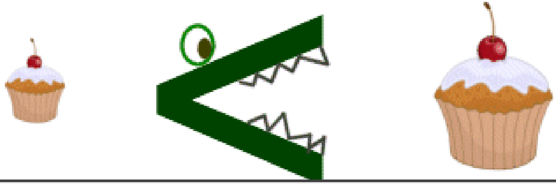
$$2^n n! \leq (n+1)^n,$$

kur $n!$ nozīmē skaitļa n faktoriālu: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

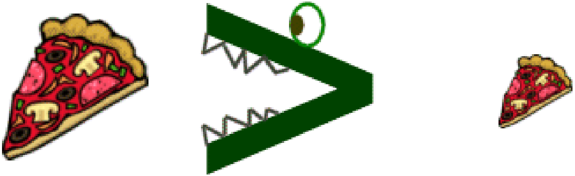
- Reizina iegūto nevienādību ar 2 un kāpina n-tajā pakāpē, iegūstot

$$(n+1)^n \geq \left(2\sqrt[n]{n!}\right)^n = 2^n\, n!,$$

kas bija jāpierāda.



$$\text{min} \leq \text{mean} \leq \text{max}$$



Ja n skaitļu a_1, a_2, ..., a_n vidējais aritmētiskais ir A, tad

1. mazākais no skaitļiem a_1, ..., a_n ir mazāks vai vienāds ar A;
2. lielākais no skaitļiem a_1, ..., a_n ir lielāks vai vienāds ar A.

Citiem vārdiem,

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

- Vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ja n nenegatīvu skaitļu a_1, a_2, ..., a_n vidējais ģeometriskais ir G, tad

1. mazākais no skaitļiem a_1, ..., a_n ir mazāks vai vienāds ar G;
2. lielākais no skaitļiem a_1, ..., a_n ir lielāks vai vienāds ar G.

Citiem vārdiem,

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

- Vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ja n nenegatīvu skaitļu a_1, a_2, ..., a_n vidējais ğeometriskais ir G, tad

1. mazākais no skaitļiem a_1, ..., a_n ir mazāks vai vienāds ar G;
2. lielākais no skaitļiem a_1, ..., a_n ir lielāks vai vienāds ar G.

Citiem vārdiem,

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

- Vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

- Analoğisks apgalvojums spēkā arī citiem vidējiem (QM, HM, m_α), sk. nākamo nodaļu.

6. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = abc$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir lielāks par 1,7.

6. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = abc$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir lielāks par 1,7.

- No AM-GM nevienādības seko, ka

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

  jeb, saskaņā ar doto,

$$abc \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

6. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = abc$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir lielāks par 1,7.

- No AM-GM nevienādības seko, ka

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

  jeb, saskaņā ar doto,

$$abc \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

- Apzīmē $x = \sqrt[3]{abc}$, tad x ir pozitīvs skaitlis, kas apmierina nevienādību $x^3 \geq 3x$.

6. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = abc$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir lielāks par 1,7.

- No AM-GM nevienādības seko, ka

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

  jeb, saskaņā ar doto,

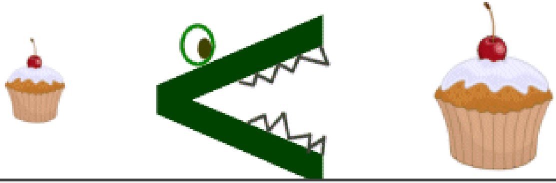
$$abc \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

- Apzīmē $x = \sqrt[3]{abc}$, tad x ir pozitīvs skaitlis, kas apmierina nevienādību $x^3 \geq 3x$.
- Tātad $x^2 \geq 3$ un $x \geq \sqrt{3}$ (jo x ir pozitīvs!!).
- Secinām, ka $\sqrt[3]{abc} \geq \sqrt{3}$.

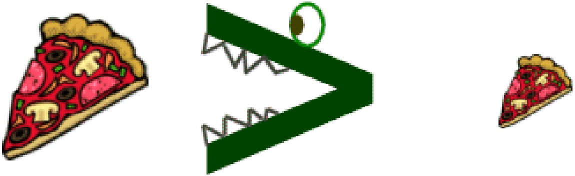
6. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = abc$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c ir lielāks par 1,7.

- Skaitļu a, b, c vidējais ģeometriskais ir vismaz $\sqrt{3}$; tātad arī lielākais no skaitļiem a, b, c ir vismaz $\sqrt{3} > \sqrt{2.89} = 1.7$, kas arī bija jāpierāda.



Citi vidējie lielumi



Vidējais harmoniskais (harmonic mean, HM)

Par n **pozitīvu** skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējo harmonisko sauc lielumu

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}}.$$

Vidējais kvadrātiskais (quadratic mean, QM)

Par n skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējo kvadrātisko sauc lielumu

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2}{n}}.$$

n pozitīviem skaitļiem $a_1, a_2, \dots, a_n$ ir spēkā nevienādības

$$\mathrm{QM} \geq \mathrm{AM} \geq \mathrm{GM} \geq \mathrm{HM},$$

t.i.,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \qquad \mathrm{QM} \geq \mathrm{AM}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \qquad \mathrm{AM} \geq \mathrm{GM}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \qquad \mathrm{GM} \geq \mathrm{HM}$$

Pieņemsim, ka $a_1, \ldots, a_n$ ir pozitīvi skaitļi, bet α ir reāls skaitlis.

α-vidējais (α-mean)

1. Ja $\alpha \neq 0$, par šo skaitļu α-vidējo sauc lielumu m_α, kas definēts kā
$$m_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_{n-1}^\alpha + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$
2. Ja $\alpha = 0$, par doto skaitļu 0-vidējo sauc šo skaitļu vidējo ģeometrisko:
$$m_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Nevienādības starp vidējiem

Ja $\alpha > \beta$, tad
$$m_\alpha \geq m_\beta,$$
turklāt vienādība pastāv tad un tikai tad, ja $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ievērosim:

- ja $\alpha = 2$, tad

$$m_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2}{n} \right)^{1/2}$$

  ir vidējais kvadrātiskais;

- ja $\alpha = 1$, tad

$$m_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

  ir vidējais aritmētiskais;

- ja $\alpha = 0$, tad m_0 ir vidējais ģeometriskais;

- ja $\alpha = -1$, tad

$$m_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_{n-1}^{-1} + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1}$$

  ir vidējais harmoniskais.

7. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = 1$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = 1$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}.$$

- Ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību:

$$\left(a - \frac{ab}{a+b}\right) + \left(b - \frac{bc}{b+c}\right) + \left(c - \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{1}{2};$$

7. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = 1$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}.$$

- Ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību:

$$\left(a - \frac{ab}{a+b}\right) + \left(b - \frac{bc}{b+c}\right) + \left(c - \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{1}{2};$$

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq a + b + c - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

7. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = 1$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}.$$

- Ekvivalenti pārveidojam doto nevienādību:

$$\left(a - \frac{ab}{a+b}\right) + \left(b - \frac{bc}{b+c}\right) + \left(c - \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{1}{2};$$

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq a + b + c - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq 1.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = 1$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}.$$

- No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo harmonisko izriet, ka visiem pozitīviem x, y izpildās

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2}$$

  jeb

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}.$$

- Ievietojot šajā nevienādībā x un y vietā skaitļus a un b; b un c; c un a, iegūstam, ka ...

7. piemērs

Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi, turklāt $a + b + c = 1$. Pierādīt nevienādību

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}.$$

- . . . iegūstam, ka

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{2}, \qquad \frac{2ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{2}.$$

- Saskaitot šīs trīs nevienādības, secinām, ka ir patiesa arī nevienādība

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} = 1.$$

- Tātad arī sākotnējā, tai ekvivalentā nevienādība ir patiesa.

4. uzdevums

Dots, ka $a+b+c+d=8$. Pierādīt, ka

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 \leq 8.$$

4. uzdevums

Dots, ka $a+b+c+d=8$. Pierādīt, ka

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 \le 8.$$

- Ievērosim, ka $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ var izteikt kā starpību

$$\frac{(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2}.$$

4. uzdevums

Dots, ka $a+b+c+d=8$. Pierādīt, ka

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 \leq 8.$$

- Ievērosim, ka $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ var izteikt kā starpību

$$\frac{(a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2)}{2}.$$

- Tātad jāpierāda nevienādība

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{2}-\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \leq 8.$$

4. uzdevums

Dots, ka $a+b+c+d=8$. Pierādīt, ka

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 \leq 8.$$

- No AM - QM nevienādības seko, ka

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$$

jeb

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4} \leq \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).$$

4. uzdevums

Dots, ka $a+b+c+d=8$. Pierādīt, ka

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2\leq 8.$$

- No AM - QM nevienādības seko, ka

$$\frac{a+b+c+d}{4}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$$

  jeb

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4}\leq\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).$$

- Tātad

$$-\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\leq-\frac{3}{8}(a+b+c+d)^2.$$

4. uzdevums

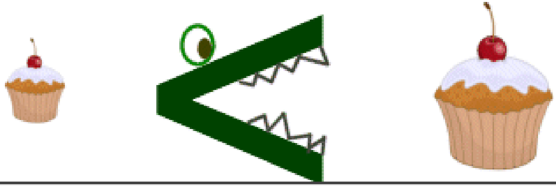
Dots, ka $a+b+c+d=8$. Pierādīt, ka

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 \leq 8.$$

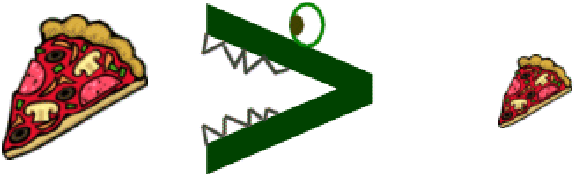
- Secinām, ka

$$\begin{aligned} ab+ac+ad+bc+bd+cd-a^2-b^2-c^2-d^2 &= \\ = \frac{(a+b+c+d)^2}{2} - \frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) &\leq \\ \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{2} - \frac{3}{8}(a+b+c+d)^2 &= \\ = \frac{8^2}{2} - \frac{3}{8}\cdot 8^2 = 8, \end{aligned}$$

kas arī bija jāpierāda.



Citas nevienādības



Košī – Švarca (Cauchy-Schwarz inequality)

Visiem reāliem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir spēkā šāda nevienādība:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Koši – Švarca (Cauchy-Schwarz inequality)

Visiem reāliem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir spēkā šāda nevienādība:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

- Pārkārtojuma nevienādība (Rearrangement inequality);
- Jensena nevienādība;
- Čebiševa un Bernulli nevienādības;
- ...

Materiāli algebrā (pie J. Smotrova)

- J.Smotrovs. Spējīgāko skolēnu sagatavošana matemātikas olimpiādēm. Algebra

A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Informācija skolēniem, skolotājiem, vecākiem par matemātikas olimpiādēm, konkursiem, kursiem

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

ANNO 1919

Fizikas un matemātikas fakultāte

Izlases nodarbības

Meklēt...

Materiāli algebrā (pie J. Smotrova)

- J.Smotrovs. Spējīgāko skolēnu sagatavošana matemātikas olimpiādēm. Algebra

Google

A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Informācija skolēniem, skolotājiem, vecākiem par matemātikas olimpiādēm, konkursiem, kursiem

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ANNO 1919

Fizikas un matemātikas fakultāte

OLIMPIĀDES / TVC / JMK / PCK / NNV / MMU / IZLASES NODARBĪBAS / KONTAKTI / PAR MUMS / IN ENGLISH

Izlases nodarbības

Meklēt...

Materiāli algebrā (pie J. Smotrova)

- J.Smotrovs. Spējīgāko skolēnu sagatavošana matemātikas olimpiādēm. Algebra

Google

Wikipedia
The Free Encyclopedia

Paldies par uzmanību!