Nevienādību pierādīšana –

pilno kvadrātu atdalīšana

MMU 3. nodarbība

Maruta Avotiņa

Matemātikas olimpiāžu uzdevumu komplekts

Algebra	**Ģeometrija**	**Kombinatorika**
Skaitļu teorija	**+**	

Algebras uzdevumu veidi matemātikas olimpiādēs

- Darbības ar skaitļiem
- Pārveidojumi
- Skaitļa pieraksts
- Skaitļu virknes
- Koordinātu plakne
- Vienādojumi
- **Nevienādības**
- Vienādojumu sistēmas
- Funkcijas
- Polinomi

Nevienādības

Atrisināt nevienādību nozīmē atrast visus tās atrisinājumus un pierādīt, ka citu atrisinājumu nav.

Pierādīt nevienādību ar vienu vai vairākiem mainīgajiem nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa pie jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

Skolā risina

- **Lineāras nevienādības**
- **Kvadrātnevienādības**
- Daļveida nevienādības
- Nevienādības ar moduļiem
- Eksponentnevienādības
- Logaritmiskās nevienādības
- Trigonometriskās nevienādības

Biežāk lietotās **nevienādību pierādīšanas metodes**

- **pilno kvadrātu atdalīšana**;
- nevienādības vienas puses vai abu pušu sadalīšana reizinātājos;
- saskaitāmo novērtēšana;
- sakarība starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko;
- *klasisko nevienādību izmantošana;*
- *matemātiskās indukcijas metode;*
- *matemātiskās analīzes metodes;*
- *interpretāciju metode*.

Ekvivalentas nevienādības

Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Piemēram,

$$x + 1 > 2017 \quad \text{un} \quad x > 2016$$

Pārveidojumus, kas nevienādību pārveido par tai ekvivalentu nevienādību, sauc par **ekvivalentiem pārveidojumiem**.

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

Nevienādības kādu pusi aizstāj ar tai identisku izteiksmi.

- $2x + 3x < 3 + 7 \quad \Rightarrow \quad 5x < 10$
- $2(x - 1) \geq 8 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2 \geq 8$
- $x^2 + 6x + 9 > 20 \quad \Rightarrow \quad (x + 3)^2 > 20$

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

Nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas apgabalu.

- $x - 9 < 5 \quad \Rightarrow \quad x - 9 + \mathbf{9} < 5 + \mathbf{9}$
- $2x \geq 8x + 30 \quad \Rightarrow \quad 2x - \boldsymbol{8x} \geq 8x - \boldsymbol{8x} + 30$

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir pozitīva visām mainīgo vērtībām).

- $\frac{1}{2}x < 5 \quad |\cdot 2 \qquad \Rightarrow \qquad x < 10$
- $\frac{1}{x^2+3} \leq 5 \quad |\cdot \boldsymbol{(x^2+3) > 0} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq 5(x^2+3)$
- $\frac{4}{x+5} < \frac{7x}{x+5}$ Nedrīkst reizināt ar $x+5$, jo $x+5$ var būt gan pozitīvs, gan negatīvs, gan 0.

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir negatīva visām mainīgo vērtībām).

- $-5x < 5 \quad |:(-5) \qquad \Rightarrow \qquad x > -1$
- $-\frac{1}{3}x \geq 7 \quad |\cdot(-3) \qquad \Rightarrow \qquad x \leq -21$

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Nevienādības abas puses kāpina kvadrātā vai velk kvadrātsakni, ja definīcijas apgabalā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls nepāra skaitlis.
- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls pāra skaitlis un definīcijas kopā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.

Nevienādību īpašības

- Vienāda veida nevienādības var saskaitīt (t. i., var attiecīgi saskaitīt to kreisās un labās puses):

Ja $\boldsymbol{a > b}$ un $\boldsymbol{c > d}$, tad $\boldsymbol{a + c > b + d}$.

- Vienāda veida nevienādības var sareizināt (t. i., var attiecīgi sareizināt to kreisās un labās puses), ja visas puses ir pozitīvas:

Ja $\boldsymbol{a > 0, b > 0, c > 0, d > 0}$ un $\boldsymbol{a > b}$, $\boldsymbol{c > d}$, tad $\boldsymbol{ac > bd}$.

Vai noteikti izpildās?

- Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a - c > b - d$.
- Ja $a > b$ un $c > d$, tad $ac > bd$.

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar „jā” vai „nē” un jāpamato sava atbilde

2) „**Vai visiem...?**”; „**Vai vienmēr... ?**”;
„**Vai noteikti... ?**”; „**Vai katram... ?**”

Ja atbilde ir

- „jā”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem;
- „nē”, tad pietiek uzrādīt **vienu pretpiemēru.**

Vai dotās nevienādības vienmēr ir patiesas?

- $x^2+4 > 0$
- $x^2+2x > 7$
- $x^2-0{,}18x + 0{,}0005 > 0$
- $x^8+x^4 \geq 0$
- $x^2+2x + 3 > 0$

Kvadrātfunkcija $y = ax^2 + bx + c$

- Zari vērsti uz augšu, ja $a > 0$, zari vērsti uz leju, ja $a < 0$
- Parabolas virsotne ir punktā $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$
- Grafiks krusto y asi punktā $(0; c)$
- Ja $D > 0$, tad grafiks krusto x asi divos punktos
- Ja $D < 0$, tad grafiks nekrusto x asi

Nevienādību pierādīšana

Bieži vienkāršākās nevienādības ir iespējams pierādīt, tās ar ekvivalentiem pārveidojot par acīmredzamām patiesām nevienādībām.

Pilno kvadrātu atdalīšana

Saīsinātās reizināšanas formulas:

- $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

- $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ievēro, ka $(a-b)^2 = (b-a)^2$.

Pilno kvadrātu atdalīšana

- **Ja $\boldsymbol{A}$ ir algebriska izteiksme, tad $\boldsymbol{A^2 \geq 0}$.**
- **Ja $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ ir algebriskas izteiksmes, tad $\boldsymbol{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 \geq 0}$.**

Piezīme. $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2 = 0$ tad un tikai tad,

ja $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$.

Pilno kvadrātu atdalīšana

- Ja $A_1, A_2, \dots, A_n$ ir algebriskas izteiksmes un $c_1, c_2, \dots, c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, tad

$$c_1 A_1^2 + c_2 A_2^2 + \cdots + c_n A_n^2 \geq 0 \,.$$

Noteikti jāuzraksta secinājums par doto nevienādību!

Uzdevums. Dotā nevienādība.

Risinājums

. . .

Iegūta patiesa nevienādība. ***Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa.***

Piemērs

Pierādīt nevienādību

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 34 \geq 0.$$

Atrisinājums. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$(x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2) + (y^2 - 2 \cdot 3y + 3^2) \geq 0;$$

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 \geq 0.$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad pēdējās nevienādības kreisajā pusē ir divu nenegatīvu skaitļu summa, kas arī ir nenegatīvs skaitlis. Tātad pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem x un y.

Piemērs

Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b un c izpildās nevienādība

$$a + \frac{bc}{a} \geq \frac{4bc}{b + c}.$$

Atrisinājums. Abas nevienādības puses reizinām ar pozitīvu izteiksmi $a(b+c)$:

$$a^2(b+c)+bc(b+c)\geq 4abc;$$

$$a^2b+a^2c+b^2c+bc^2-4abc\geq 0;$$

$$a^2b-2abc+bc^2+a^2c-2abc+b^2c\geq 0;$$

$$b(a^2-2ac+c^2)+c(a^2-2ab+b^2)\geq 0;$$

$$b(a-c)^2+c(a-b)^2\geq 0.$$

Secinājums

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs un $b > 0, c > 0$, tad $b(a-c)^2 \geq 0$ un $c(a-b)^2 \geq 0$.

Divu nenegatīvu skaitļu summa ir nenegatīva, tāpēc pēdējā iegūtā nevienādība ir patiesa.

Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī dotā nevienādība ir patiesa visiem pozitīviem skaitļiem a, b un c.

Raksturīgākās kļūdas risinājumos

- Daži piemēri vispārīga pierādījuma vietā
- Viena vai dažu speciālgadījumu apskatīšana
- Nepareizi algebriski pārveidojumi
- Neekvivalentu pārveidojumu veikšana
- Nepareizi izteiksmju novērtējumi
- Neuzmanības kļūdas

Ieraugi formulu!

$$a^2 - 40a + 400 =$$

$$16b^2 - 24b + 9 =$$

$$c^8 + 8c^6 + 16c^4 =$$

$$(d-1)^2 + 2(d-1)e + e^2 =$$

Ieraugi formulu!

$$a^2 - 40a + 400 = (\boldsymbol{a} - \mathbf{20})^{\mathbf{2}}$$

$$16b^2 - 24b + 9 = (\mathbf{4}\boldsymbol{b} - \mathbf{3})^{\mathbf{2}}$$

$$c^8 + 8c^6 + 16c^4 = \left(\boldsymbol{c}^{\mathbf{4}} + \mathbf{4}\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$$

$$(d-1)^2 + 2(d-1)e + e^2 = (\boldsymbol{d} - \mathbf{1} + \boldsymbol{e})^{\mathbf{2}}$$

Kas jāpieskaita?

$$a^2 - 7a + \qquad = (\qquad)^2$$

$$4b^2 + 20bc^4 + \qquad = (\qquad)^2$$

$$x^2 + x + \qquad = (\qquad)^2$$

$$y^2 - 2 + \qquad = (\qquad)^2$$

Kas jāpieskaita?

$$a^2 - 7a + \frac{49}{4} = \left(a - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$4b^2 + 20bc^4 + 25c^8 = (2b + 5c^4)^2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$y^2 - 2 + \frac{1}{y^2} = \left(y - \frac{1}{y}\right)^2$$

$\boldsymbol{a^2}$	$\boldsymbol{+2ab}$	$\boldsymbol{+b^2}$	$\boldsymbol{=(a+b)^2}$
x^2	$+x$	$+\frac{1}{4}$	$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
x^2	$+2x\sqrt{x}$	$+x$	$=(x+\sqrt{x})^2$

Uzdevumi

1. Pierādīt nevienādību $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
2. Pierādīt nevienādību $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.
3. Pierādīt, ka $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.
4. Pierādīt, ka $xy^2 + x + y + x^2y \geq 4xy$, ja x un y ir pozitīvi skaitļi.
5. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y izpildās nevienādība
$$x^2 + y^2 + 4 \geq 2x + 2y + xy.$$

Uzdevumi

6. Pierādīt, ka $(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) \leq (a^3 - b^3)^2$.
7. Pierādīt, ka $x + \frac{2017}{x} \geq 2\sqrt{2017}$, ja $x > 0$?
8. Dots, ka x un y – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
9. Pierādīt, ka $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$.
10. Pierādīt, ka $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$.

11. Kāda ir izteiksmes $a^{20} + a^4 + \frac{1}{a^4+1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja a ir reāls skaitlis?

Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā iespējamā vērtība

„Kāds lielākais (mazākais)...?”; „Atrast vislielāko (vismazāko)...!”.

Uzdevuma risinājumam jāsastāv no divām daļām:

a. **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda **piemērs**, kurā izpildās visas prasības;

b. **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība **nevar būt.**