2017. gada 14. janvārī Rīga

Jānis Buls
Latvijas Universitāte
Matemātikas nodaļa
Matemātiskās analīzes katedra
Vispārīgās matemātikas katedra

ALGORITMU TEORIJA

Kādas funkcijas

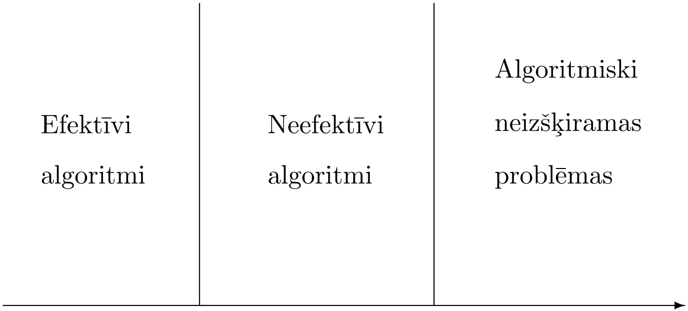
var **izrēķināt**

ar datoru?

Ko

spēj dators un

ko dators **nespēj?**


Efektīvi algoritmi
Neefektīvi algoritmi
Algoritmiski neizšķiramas problēmas

Lai

kaut ko pierādītu

vajadzīga teorija.

Kāpēc

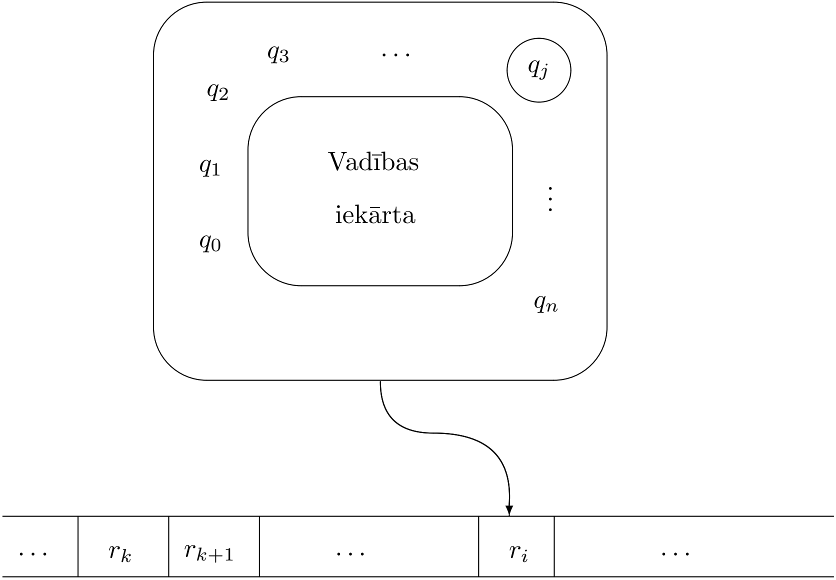
nepieciešams

formalizēt

algoritma

jēdzienu?

Tjūringa mašīna



q_3
$\dots$
q_j
q_2
Vadības
iekārta
q_1
$\vdots$
q_0
q_n
$\dots$
r_k
r_{k+1}
$\dots$
r_i
$\dots$

Tjūringa mašīnas būtiska sastāvdaļa ir

bezgalīga atmiņas iekārta,

kas sadalīta šūnās:

$$\ldots, R_{-1}, R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$$

Šo atmiņas iekārtu sauc par **lentu**.

Tā ir abpusēji bezgalīga.
Katrā šūnā R_i ierakstīts patvaļīgs kādas fiksētas galīgas kopas

$$A = \{t, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

elements.
Kopu A sauc par Tjūringa mašīnas **ārējo alfabētu**, kopas A elementus — par **burtiem**.

Otra Tjūringa mašīnas būtiska sastāvdaļa ir tās **iekšējais alfabēts** jeb **stāvokļu kopa Q.**

Tāpat kā ārējais alfabēts

arī iekšējais alfabēts ir **galīgs**,
proti, kopa Q ir galīga.

Tjūringa mašīna **vienmēr** atrodas kādā no

kopas Q stāvokļiem.

Citiem vārdiem sakot katrā laika momentā

ir aktivizēts kāds no stāvokļiem $q_j \in Q$.

Visbeidzot

trešā sastādaļa ir

vadības iekārta,

kas funkcionē saskaņā

ar ievietoto

programmu.

Programma — tā ir galīga komandu kopa

$$\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}.$$

Katra komanda K_ν ir simbolu virkne izskatā

$$q_j r_i \mapsto a\bigstar q$$

Te

- q_j un q ir stāvokļu kopas Q elementi;
- r_i un a ir alfabēta A burti;
- $\bigstar$ ir viens no kopas $\{\Lsh, \top, \Rsh\}$ elementiem.

Shematiski tas viss attēlots zīmējumā. Attēlā Tjūringa mašīnai aktivizēts iekšējais stāvoklis q_j (tā atrodas stāvoklī q_j). Tai pašā laikā vadības iekārtas galviņa aplūko i–to šūnu, kurā ierakstīts alfabēta A burts r_i.

Tagad aprakstīsim Tjūringa mašīnas

vadības iekārtas darbību.

Tjūringa mašīna darbojas diskrētos laika momentos

$$0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots$$

Pieņemsim, ka laika momentā τ Tjūringa mašīnas galviņa aplūko šūnu ar ierakstu r_i un tā atrodas stāvoklī q_j (ilustrāciju skatīt zīmējumā). Tas nozīmē, ka laika momentā τ Tjūringa mašīna izpilda komandu

$$q_j r_i \mapsto a \bigstar q$$

$$q_j r_i \mapsto a \bigstar q$$

- Tjūringa mašīna šai laika momentā τ aizstāj ierakstu r_i ar ierakstu a un aktivizē stāvokli q;
- izlemj, kuru šūnu galviņa aplūkos nākošajā laika momentā $\tau + 1$:

a) ja $\bigstar = \Lsh$, tad nākošajā laika momentā galviņa aplūkos $i - 1$–mo šūnu, t.i., galviņa pārvietojas vienu šūnu pa kreisi;

b) ja $\bigstar = \top$, tad nākošajā laika momentā galviņa aplūkos to pašu i–to šūnu, t.i., galviņa nepārvietojas;

c) ja $\bigstar = \Rsh$, tad nākošajā laika momentā galviņa aplūkos $i + 1$–mo šūnu, t.i., galviņa pārvietojas vienu šūnu pa labi.

Mēs tomēr ne katru galīgu komandu kopu atzīsim par Tjūringa mašīnas programmu. Pieņemsim, ka

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\} \qquad \text{un} \qquad Q_0 = Q \setminus \{q_0\},$$

tad

- $q_j \neq q_0$, proti, stāvokli q_0 uzskatīsim par beigu stāvokli, t.i., ja Tjūringa mašīna aktivizē stāvokli q_0, tad tas nozīmē, ka tā darbu ir beigusi (apstājusies);
- $q_0 \neq q_1$. Stāvokli q_1 mēs izmantosim kā Tjūringa mašīnas sākuma stāvokli, proti, Tjūringa mašīna vienmēr darbu uzsāk atrodoties stāvoklī q_1. Tātad $|Q| \geq 2$.
- Mēs prasam, lai katram pārim $(q_j, r_i) \in Q_0 \times A$ atbilstu tieši viena programmas komanda

  $$q_j r_i \mapsto a \bigstar q\,.$$

  Tā rezultātā katra Tjūringa mašīnas programma P sastāv no $m(n+1)$ komandas, t.i., $|P| = m(n+1)$.

Tagad mēs varam atbildēt uz jautājumu:
— Kā lietojama Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}$?

Lietotājs, teiksim Alise, vispirms uzraksta Tjūringa mašīnas programmu

$$\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}.$$

Šo programmu ievieto mašīnā. Konkrētas Tjūringa mašīnas realizācijas gadījumā konstruktoram saprotams jāparedz, kā šī programma tiks ievadīta mašīnā, taču mūs neinteresē konkrēta Tjūringa mašīnas realizācija, tāpēc mēs uzskatīsim, ka Alises vienīgais pienākums ir korekti uzrakstīt Tjūringa mašīnas programmu, piemēram, uz papīra.

Nākošais solis: Alise ievada Tjūringa mašīnas atmiņas visās šūnās R_i sākuma datus, t.i., burtus $r_i \in A$.

Visbeidzot konstruktori ir paredzējuši, ka nospiežot starta pogu Tjūringa mašīna aktivizē stāvokli q_1, t.i., Tjūringa mašīna sāk darbu; sākas diskrētu laika momentu

$$0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots$$

atskaite. Laika momentā $\tau = 0$ Tjūringa mašīnas galviņa aplūko šūnu, kurā ierakstīts burts

$$r_\varkappa \neq t, \qquad \text{piedevām}, \qquad \forall j < \varkappa \, (r_j = t).$$

Šai situācijā mēs teiksim, ka galviņa atrodas uz ieraksta sākuma.

Ja kādā laika momentā Tjūringa mašīna beidz darbu un tās galviņa atrodas uz ieraksta sākuma, tad vārdu (t.i, burtu virkni)

$$\varrho_k, \varrho_{k+1}, \ldots, \varrho_{k+\iota}$$

uzskatīsim par Tjūringa mašīnas darba rezultātu.

Turpmāk mēs Tjūringa mašīnu identificēsim ar tās vienu būtisku sastāvdaļu, proti, programmu. Tā, piemēram, tai vietā, lai teiktu, ka mūsu rīcībā ir Tjūringa mašīna, kuras programma ir

$$\begin{array}{lcl} q_1\, t & \mapsto & t \top q_0 \\ q_1\, 0 & \mapsto & 0 \top q_0 \\ q_1\, 1 & \mapsto & 1 \top q_0 \end{array}$$

mēs teiksim:

— Pieņemsim, ka dota Tjūringa mašīna

$$\begin{array}{lcl} q_1\, t & \mapsto & t \top q_0 \\ q_1\, 0 & \mapsto & 0 \top q_0 \\ q_1\, 1 & \mapsto & 1 \top q_0 \end{array}$$

Šādi mēs reprezentējam Tjūringa mašīnu ar programmu

$$\{K_1, K_2, K_3\},$$

kur

$$K_1 = q_1\ t \mapsto t \top q_0, \quad K_2 = q_1\ 0 \mapsto 0 \top q_0, \quad K_3 = q_1\ 1 \mapsto 1 \top q_0\,.$$

Dažkārt ērtības labad to visu mēs noformēsim kā tabulu:

	t	0	1
q_1	$t \top q_0$	$0 \top q_0$	$1 \top q_0$

Uzskatīsim, ka $A = \{t, 0, 1\}$.

Tjūringa mašīna $\mathfrak{T}_1$

$$\begin{array}{rcl} q_1\ t & \mapsto & 0 \top q_0 \\ q_1\ 0 & \mapsto & 0 \ \Lsh \ q_1 \\ q_1\ 1 & \mapsto & 1 \ \Lsh \ q_1 \end{array}$$

vārdam $u \in A_t^*$ priekšā pieraksta 0, proti, $\mathfrak{T}_1(u) = 0u$.

Pateicos

par uzmanību!