

MAGISKIE DAUDZSTŪRI

Andrejs Cibulis
cibulis@lanet.lv

MMU, 8.10.2016.

Saturs

2016. gada ZPD tēmas un iespējas tās turpināt

Vienai no tām - maģiskie daudzstūri - tiks pievērsta īpaša uzmanība.

ZPD prezentācija

Ar tēmu saistīti jēdzieni:

perfekti maģiskie daudzstūri;
atbilstība; permutācijas; transformācijas, laukumi,
polimino, polimondi.

Praktiskā daļa

Daži uzdevumi par maģiskajiem daudzstūriem

2016. gada ZPD tēmas

Minimālā mīnu skaita problēma pentakingu bloķēšanai (Dundaga)

Salikumu problēma T-tetramino gadījumā (Bauska)

Maksimālā laukuma taisnstūru pārklāšana ar polimino kopijām

Minimālie polimino, kuru izliektā čaula ir n -stūris

Heksamondņu trīnītes

Taisnstūra sadalīšana 2 vienādos daudzstūros ar maksimāli iespējamo virsotņu skaitu

Binārās attiecības un grafi

Maģisko astoņstūru laukumi

Figūru veidošana no heksamondiem

Slēgtas līnijas ar uzdotu krustpunktu skaitu

Māju numuru kopas un matemātikas uzdevumu krājuma uzdevumu atbilžu kopas atbilstība Benforda likumam

Geogēbras izmantošanas iespējas stereometrijas pamatu apguvei

Par Būla funkciju polinomu izteiksmju pakāpēm (RV1Ģ)

Der zināt labus avotus

Сгибнев А. И. Исследовательские задачи для начинающих,
2-е изд., испр. и доп. Москва, Издательство МЦНМО, 2015, 136 с.
(1. izd. 2013)

...der ne jau kurš katrs uzdevums, bet tādi, kuriem ir turpinājuma, vispārinājuma iespējas, saistība ar citiem uzdevumiem.

Skolā un pat universitātē mācīšana notiek virzienā no teorijas uz uzdevumiem

Mācot «no teorijas» mēs audzinām zinātnes «patērētāju», kurš var sekmīgi lietot zināmas risināšanas metodes zināmās situācijās. Mācot «no uzdevumiem» – audzinām zinātnes radītāju, kurš spēs izgudrot jaunas metodes, formulēt jaunus uzdevumus. /97/

ZPD problēmas risināšanā nereti teorija vispār nav zināma, tā pa fragmentiem jāveido pašam pētniekam.

Izrādās, ka tēma par lauztajām līnijām ir piedāvāta Sgibņeva grāmatā, 56-57.

g) Vai eksistē šāda tipa laužas līnijas: (6, 2)? (7, 2)? (6, 3)?

Der zināt labus avotus

Белов А. Я.,

Научное творчество школьников: где миф и где реальность?

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 18, 2014 (231–247).

«Laba ZPD pazīme – rezultāts iepriekš nav zināms ne skolēnam, ne skolotājam. Pētījums var ilgt no dažām dienām līdz dažiem gadiem.»

Svarīgi ir apgūt prasmes lasīt citu rakstus, atšķirt *graudus no pelavām*. Matemātikā šai ziņā ir īpaši grūta.

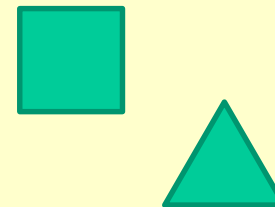
«Ļoti svarīga ir prakse citu darbu lasīšanā un analizēšanā, kā arī patstāvīgā materiāla izkāstā. No mēģinājumiem «tikai vienkārši un saprotami» izklāstīt citu autoru sacerējumus bieži ir radušies ļoti nopietni atklājumi (piemēram, Šrēdingera vienādojumi, Dinkina shēmas).»

Tēma var būt gandrīz jebkāda, par aktualitāti nav jāuztraucas

«... Stingri jāvēršas tikai pret «**ufoloģiju**» и **ļoti vājiem darbiem**. /B, 240/

Uzdevums

Kārlītim ir vienības kvadrātu maisiņš,
bet Trīnītei – regulāru vienības trijstūru
maisiņš, Viņiem jāsaliek **sešstūris**,
kura malu garumi ir 1, 2, 3, 4, 5, 6,
ne obligāti šajā secībā.



Kuram no viņiem ir lielākas cerības
pirmajam salikt šādu daudzstūri?

Vai var salikt šādu četrstūri ar malu garumiem 1, 2, 3, 4?

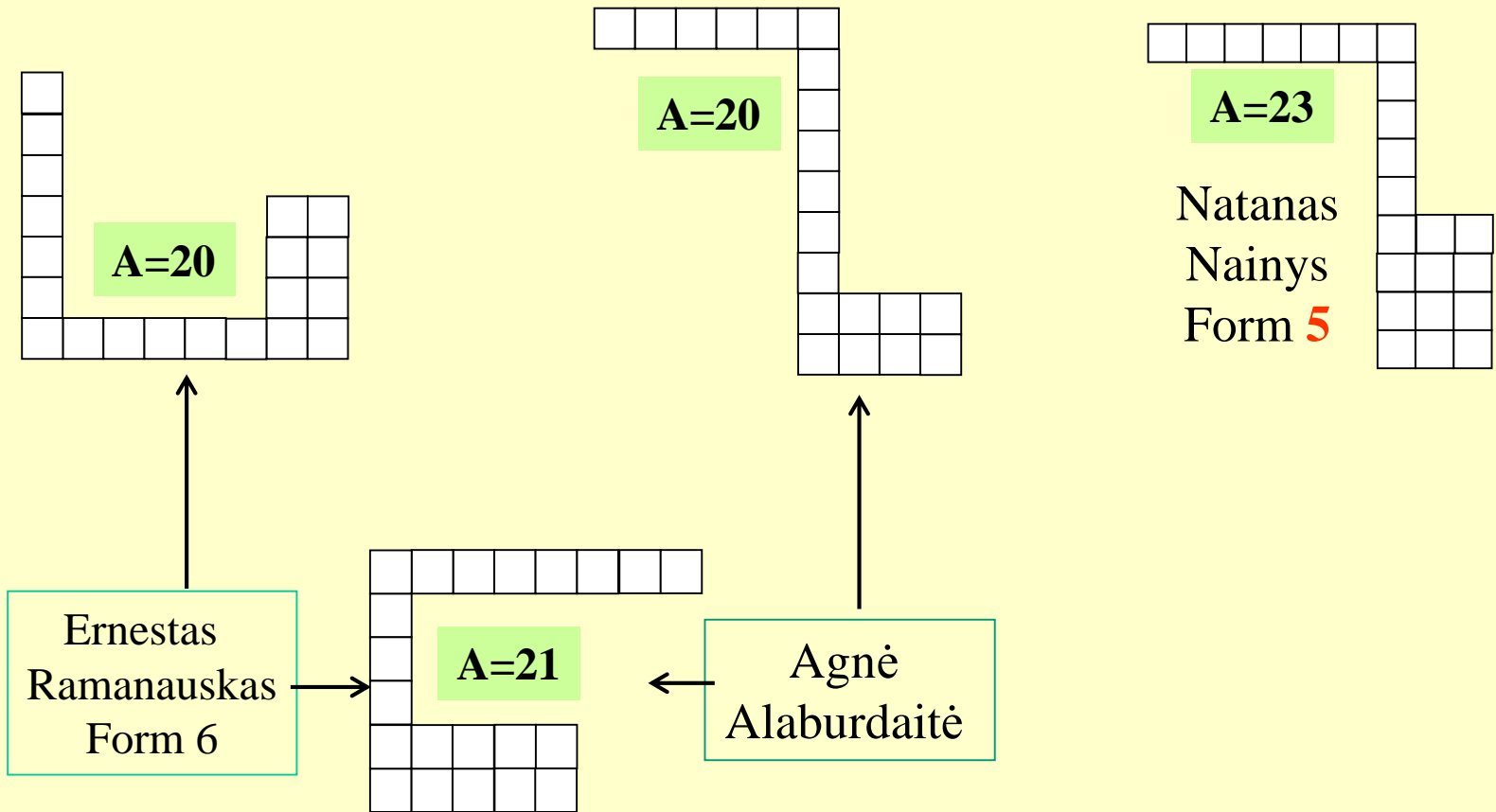


a, b, a, b

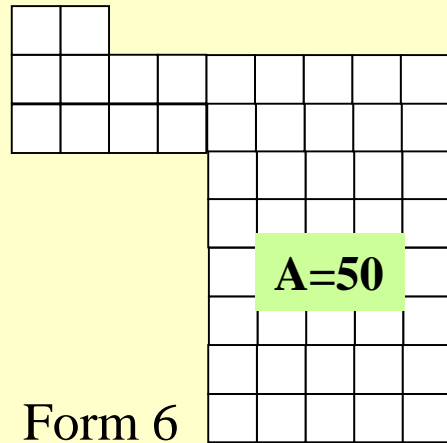


1, 2, 1, 3

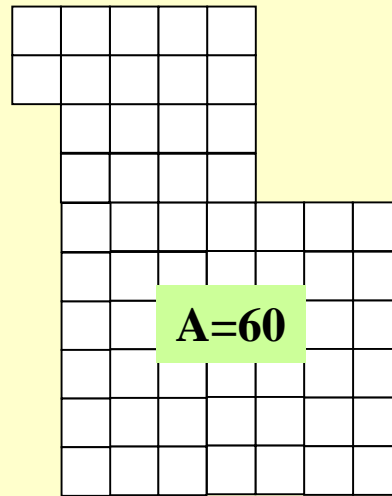
Kangaroo Camp, Moletai, 2014



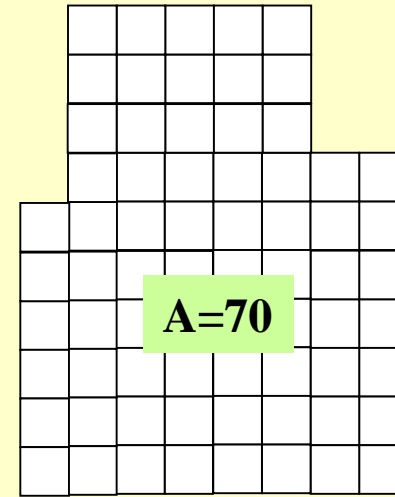
Kangaroo Camp, Moletai, 2014



1-2-3-4-6-5-8-7



1-8-7-6-3-4-5-2



1-5-8-7-2-3-5-4

Nedas
Domkus
Form 5

Skolēni atrada (36 laukuma vērtības un 52 astonstūrus):

20(2), 21, 22, 23, 25, 31, 35(2), 37, 38, 39, 40, 41, 42, 45, 47(2), 48, 49,
50(2), 51, 52, 53, 54(4), 55(2), 57(2), 58, 59(2), 60, 62, 64(4), 65, 66(2),
67, 68, 69, 70(3), 71.

Neatrada 16 vērtības:

24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 43, 44, 46, 56, 61, 63.

Nākamais progress

Ezernieku vidusskolas 10. klases skolnieces ZPD, 2016

ZPD nav tas pats, kas nodarbība.

ZPD atrasti **144** maģiskie 8-stūri
un **49** dažādas laukumu vērtības.

Metode: 8-stūrus iegūst, izgriežot
pretējos stūrus no šādiem taisnstūriem:
 9×9 , 8×10 , 7×11 , 5×13 .

Ievērot, ka šeit nav taisnstūra $6 \times k$.

Minimālais laukums **20**

Maksimālais laukums **71**

Nav trīs vērtību: **21, 63, 69**



Magisko astoņstūru laukumi

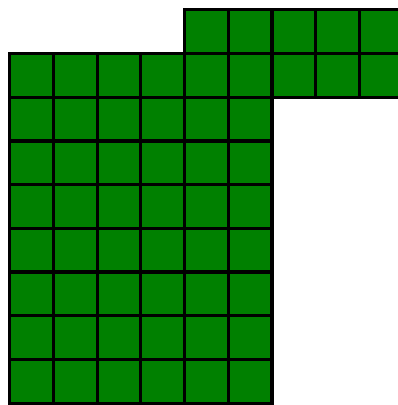
Darba autore:

Loreta Ieva Dārzniece

10.klase

Kas ir maģiskais astoņstūris?

Maģiskais astoņstūris – astoņstūris, kura malu garumi ir attiecīgi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 un 8, un malas iet tikai pa rūtiņu līnijām.





Darba mērķis: noskaidrot, kādas vērtības var pieņemt maģisko 8-stūru laukumi.

Darba uzdevumi:

- 1) atrast metodi astoņstūru veidošanai;
- 2) atrast iespējamās astoņstūrus un aprēķināt to laukumu vērtības;
- 3) noskaidrot maģisko astoņstūru laukumu biežumu.

Uzdevumi par maģiskajiem astņstūriem

- Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1 vienība, pa rūtiņu līnijām uzzīmē astņstūri tā, lai tā malu garumi pēc kārtas ir 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 vienības!

http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/66_mat_olimp_2posms_uzd_atris_5-8.pdf

- Pierādīt, ka katram naturālam n rūtiņu lapā, kura rūtiņas malas garums ir 1, pa rūtiņu līnijām ir iespējams uzzīmēt astņstūri tā, ka tā malu garumi pēc kārtas ir

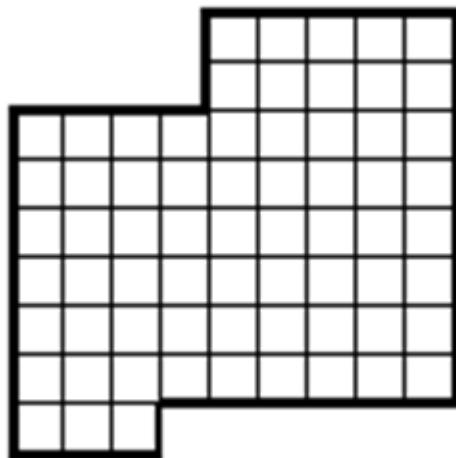
$n; n + 1; n + 2; n + 3; n + 4; n + 5; n + 6; n + 7.$

http://nms.lu.lv/wp-content/uploads/2016/02/66_mat_olimp_2posms_uzd_atris_9-12.pdf

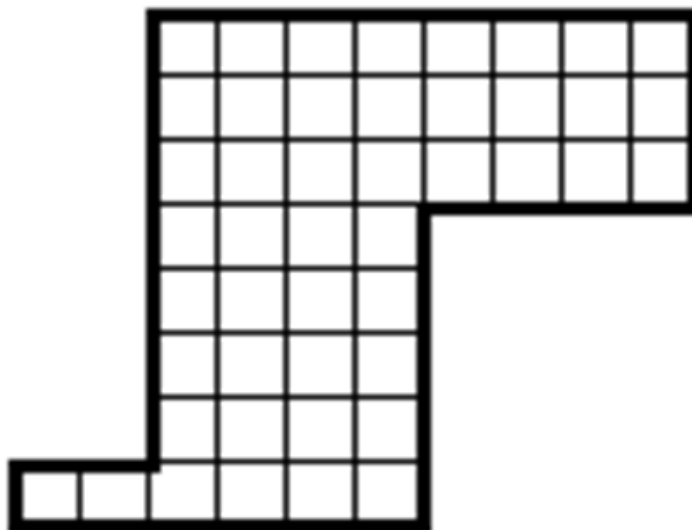
Astoņstūru veidošana, «izgriežot» taisnstūru pretējos stūrus:

$$P = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$



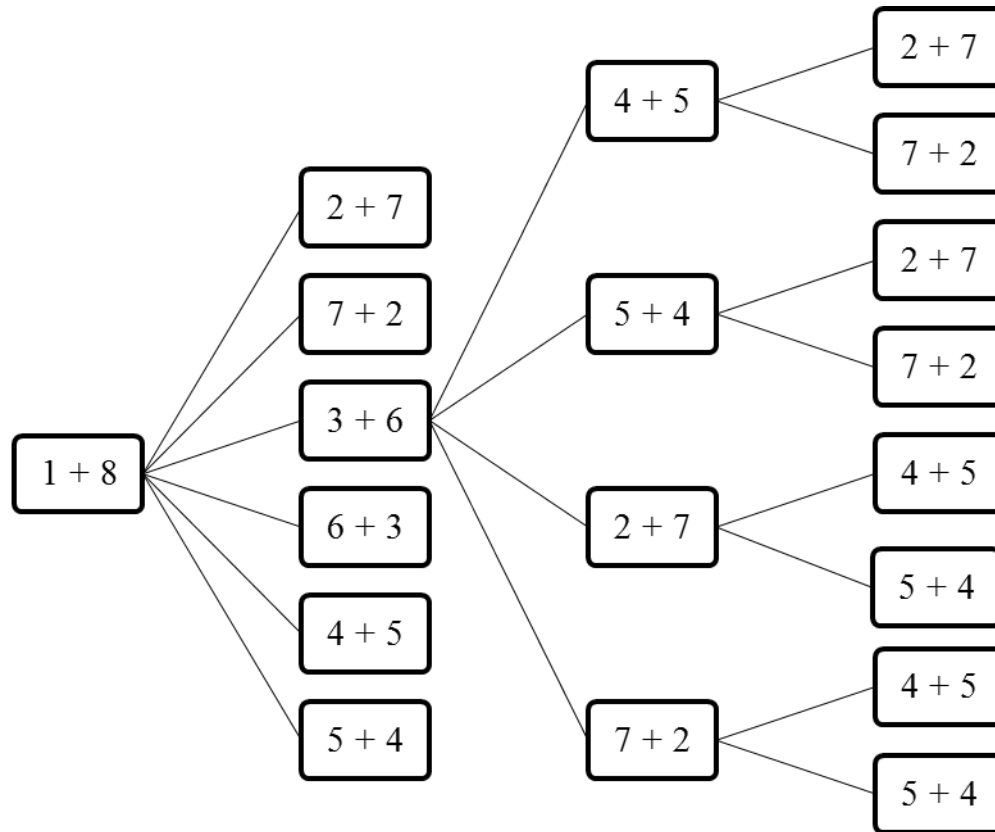
Taisnstūris 8×10



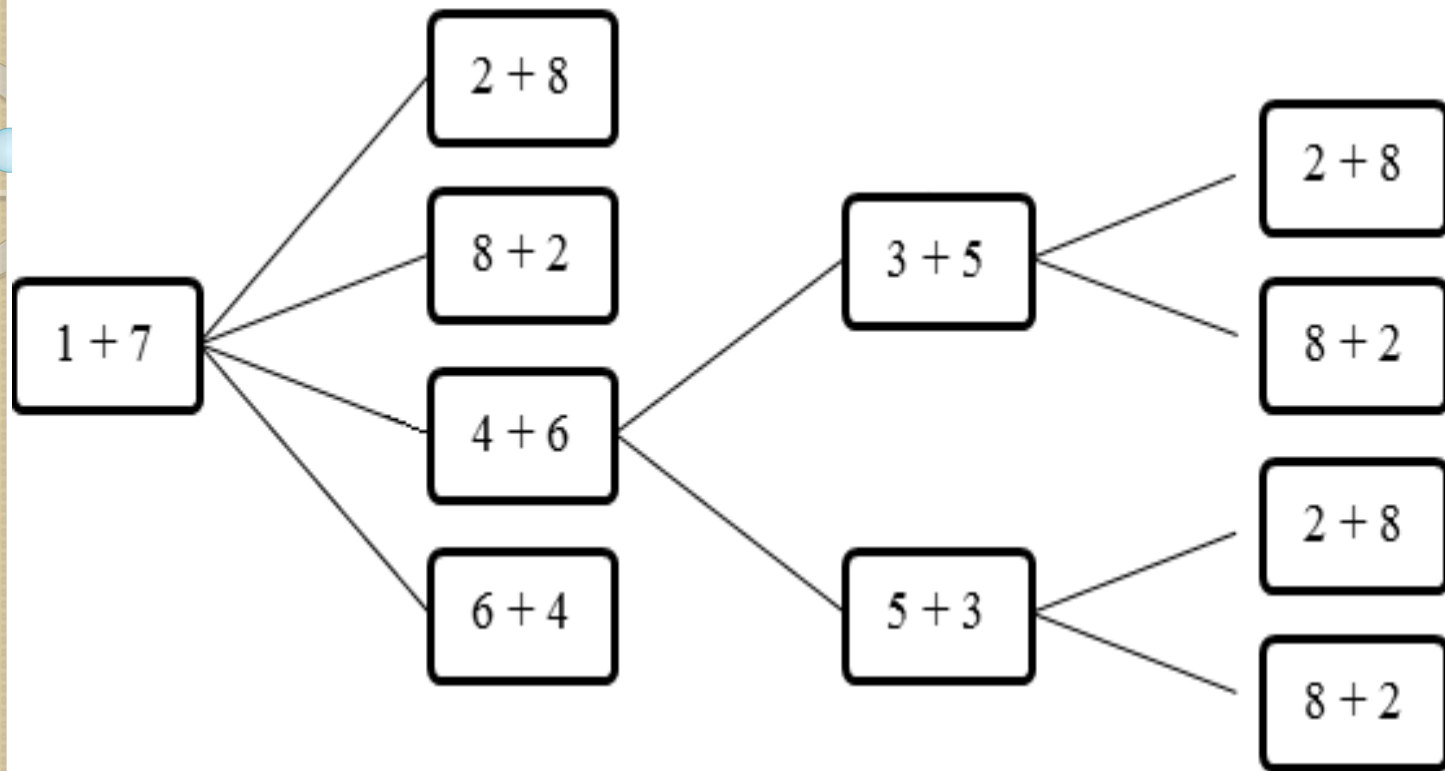
$$8 = 1 + 7 = 3 + 5$$

$$10 = 2 + 8 = 4 + 6$$

Maģisko astoņstūru veidi

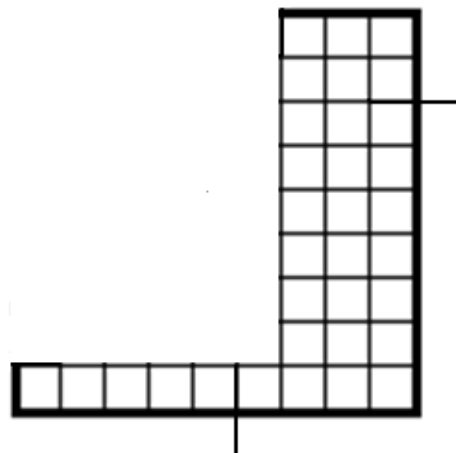
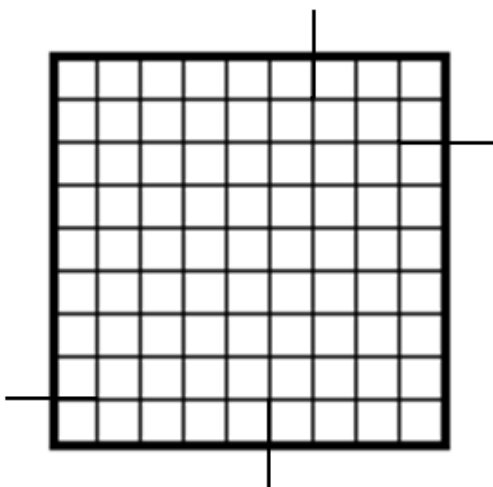


$$(1 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2) \cdot 2 = 48 \cdot 2 = 96$$



$$(1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2 = 32$$

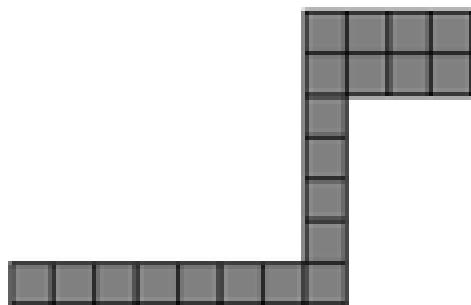
Kā nevar uzzīmēt



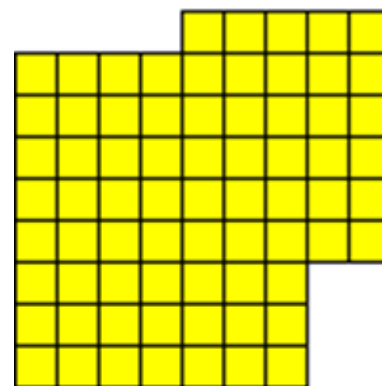
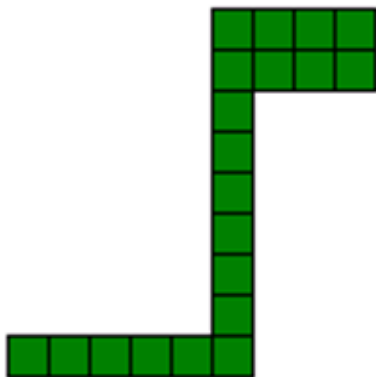
Maģisko astoņstūru laukumu biežums

Nr.p.k.	Astoņstūru laukuma vērtības	Biežums
1.	23 ; 25 ; 26 ; 30 ; 32 ; 37 ; 38 ; 51 ; 57 ; 61 ;	1
2.	20 ; 22 ; 27 ; 28 ; 31 ; 33 ; 40 ; 41 ; 45 ; 52 ; 53 ; 56 ; 58 ; 59 ; 62 ; 71	2
3.	29 ; 36 ; 44 ; 46 ; 60 ; 66 ; 68	3
4.	39 ; 42 ; 48 ; 54 ; 65 ;	4
5.	34 ; 47 ; 67 ; 70	5
6.	49 ; 55 ; 64	6
7.	35 ; 43 ; 50	7

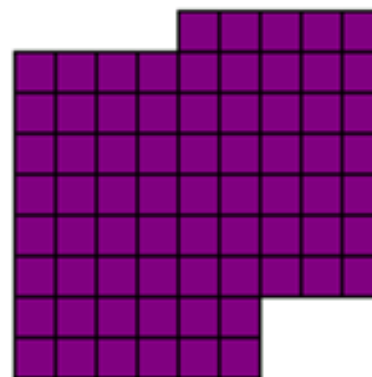
Maģiskie astoņstūri ar vislielāko un vismazāko laukumu



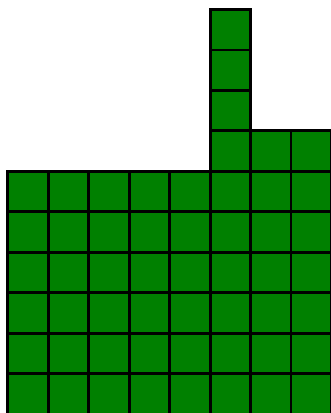
$$S = 20$$



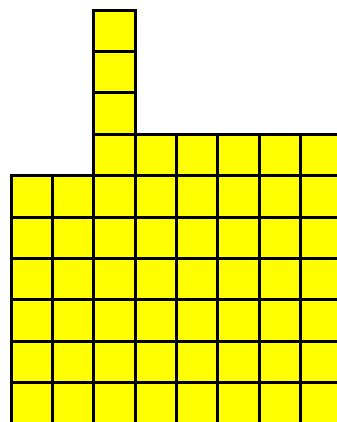
$$S = 71$$



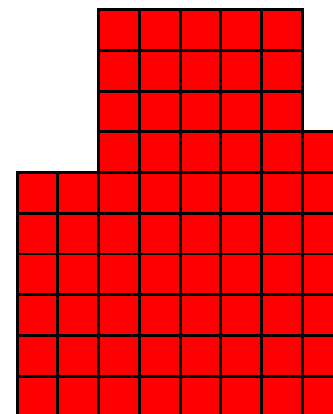
Taisnstūru "izgriešana" no blakus stūriem



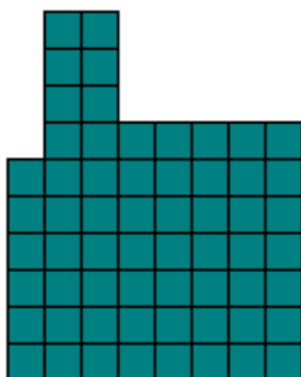
$S = 54$



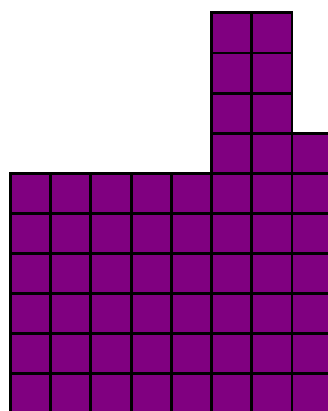
$S = 57$



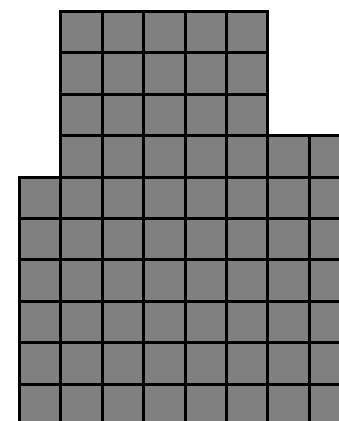
$S = 69$



$S = 61$

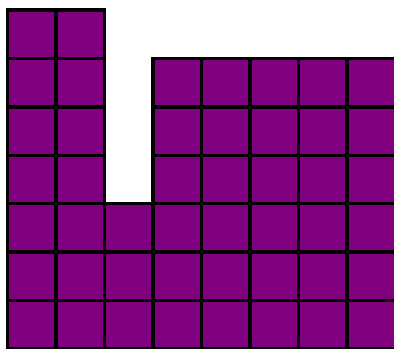


$S = 57$

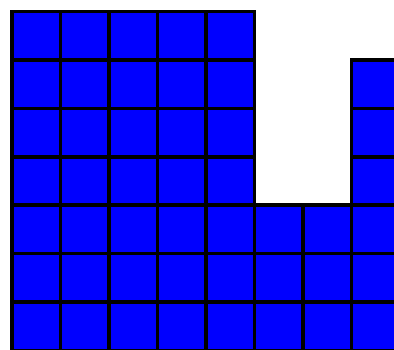


$S = 70$

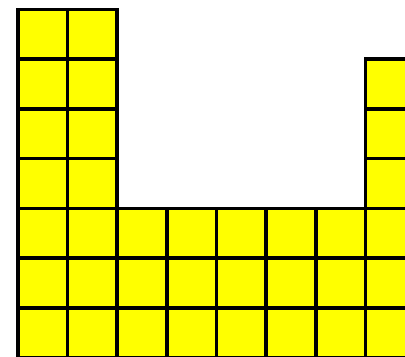
Taisnstūru "izgriešana" no viena stūra



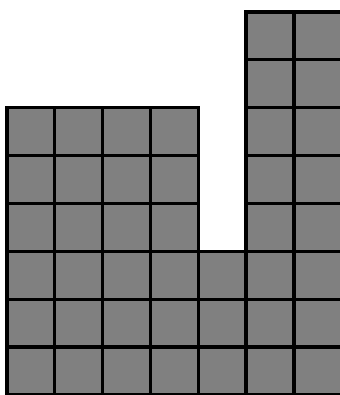
$$S = 47$$



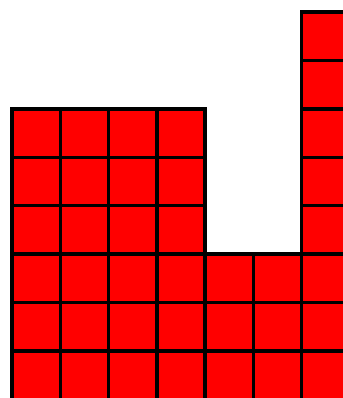
$$S = 47$$



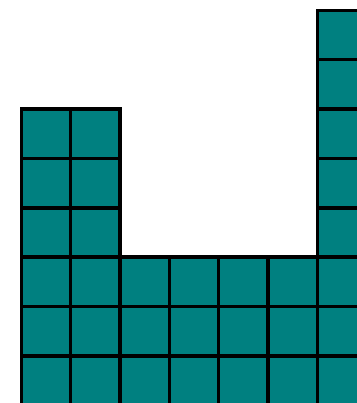
$$S = 35$$



$$S = 43$$



$$S = 38$$

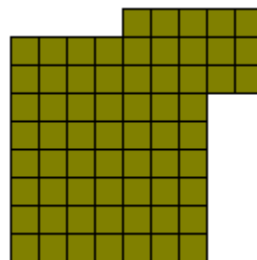
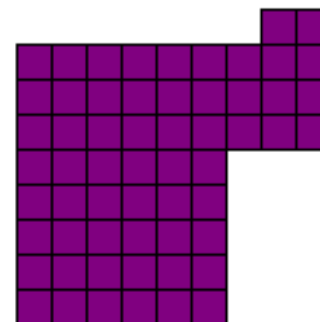
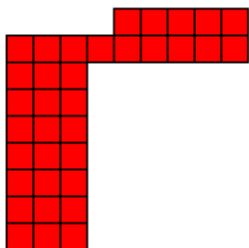
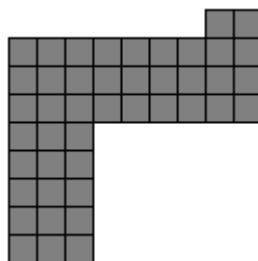
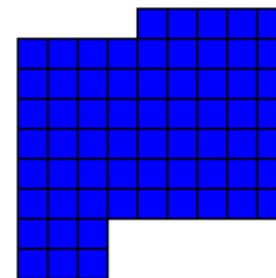
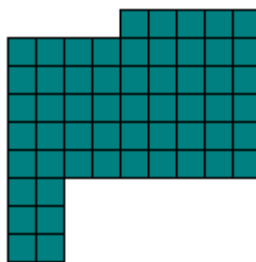
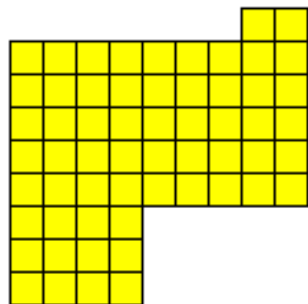


$$S = 32$$

Secinājumi

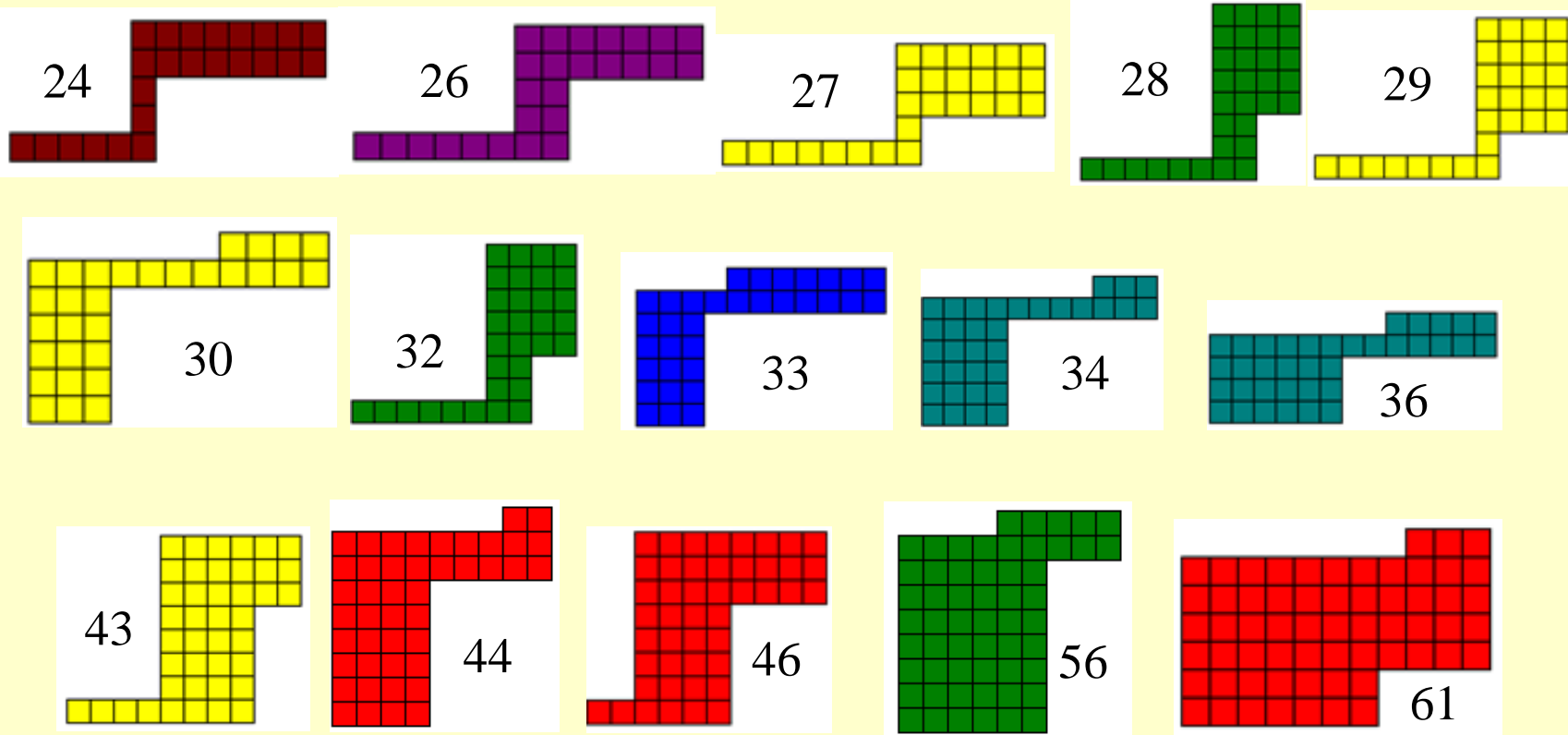
1. Astonstūru veidošanai, izmantota kvadrāta, ar malas garumu 9 vienības un taisnstūru 8×10 , 7×11 , 5×13 , pretējo stūru „izgriešana”.
2. Uzzīmēti 144 maģiskie astonstūri un aprēķinātas to laukumu vērtības.
3. Visvairāk maģisko astonstūru ir ar laukumu 35, 50 un 43 rūtiņas – 7 maģiskie astonstūri. Vismazāk maģisko astonstūru ir ar laukumiem, 23, 25, 26, 30, 32, 37, 38, 51, 57 un 61 rūtiņas – tikai pa vienai figūrai. Ir 3 laukuma vērtības 21, 63 un 69, kuras nevarēja iegūt, zīmējot astonstūrus ar iepriekš minēto paņēmieni.
4. Vismazākais laukums ir 20 rūtiņas. Šādi astonstūri ir divi. Vislielākais laukums ir 71 rūtiņa. Šādi astonstūri arī ir divi. Kopā iegūtas 49 atšķirīgas laukumu vērtības.
5. Zinātniski pētnieciskā darba rezultātus var izmantot ārpusklases nodarbībās matemātikā.
6. Tālāk varētu pētīt, kā var veidot citus dažādmalu maģiskos daudzstūrus.

Paldies par uzmanību!



24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 43, 44, 46, 56, 61, 63

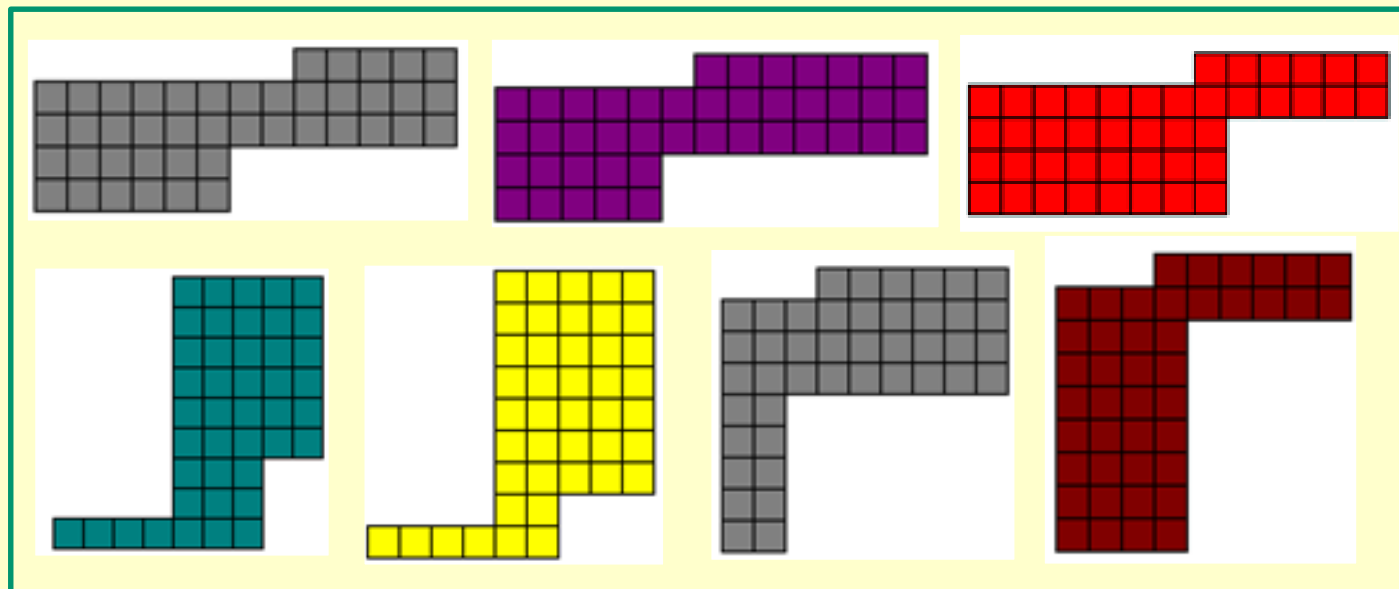
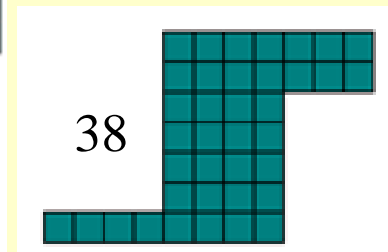
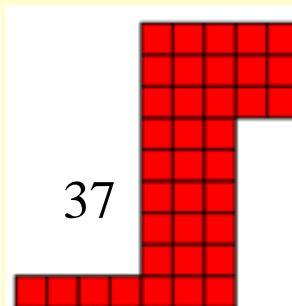
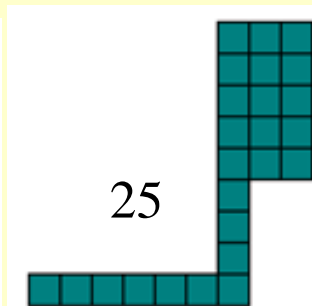
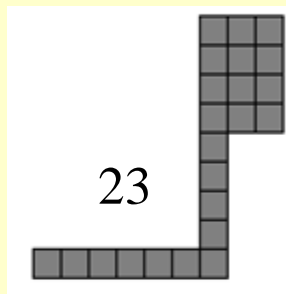
Netika atrastas «Kenguru» nometnes nodarbību laikā, Moletai, 2014 .



Tikai trīs vērtības: **21, 63, 69** netika atrastas skolnieces ZPD.

Kā veidot jaunus uzdevumus?

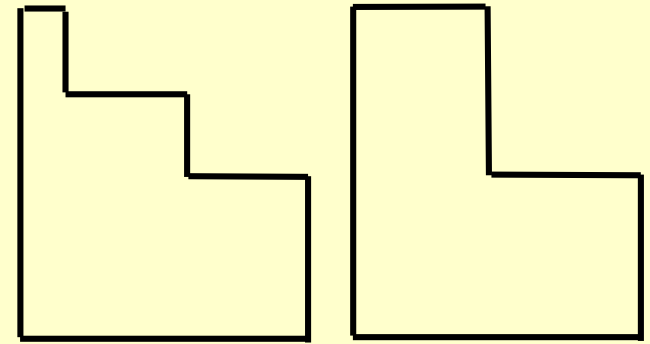
Uzdotai laukuma vērtībai atrast visus maģiskos 8-stūrus.



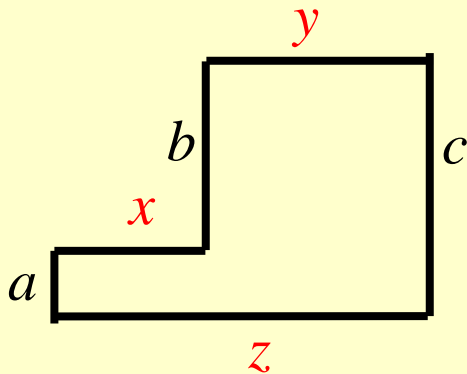
Septiņi astoņstūri ar laukumu 43

Neizmantotās iespējas

ZPD nesatur dažus vajadzīgos pierādījumus. Piemēram, pierādīt, ka maģiskie daudzstūri nevar būt tāda veida kā zīmējumā.



Sešstūra neeksistences pamatojums ir ļoti pamācošs.



$$P = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$a + b = c \Rightarrow a + b + c = 2c$$

$$x + y = z \Rightarrow x + y + z = 2z$$

$$P = 2(c + z) \neq 21$$

Atrodiet patstāvīgi īsu zīmējumā redzamā maģiskā 8-stūra neeksistences pamatojumu.

Neizmantotās iespējas

**Pēc ZPD iesniegšanas skolniece *atklāj*,
ka ir arī cita metode maģisko 8-stūru iegūšanai.**

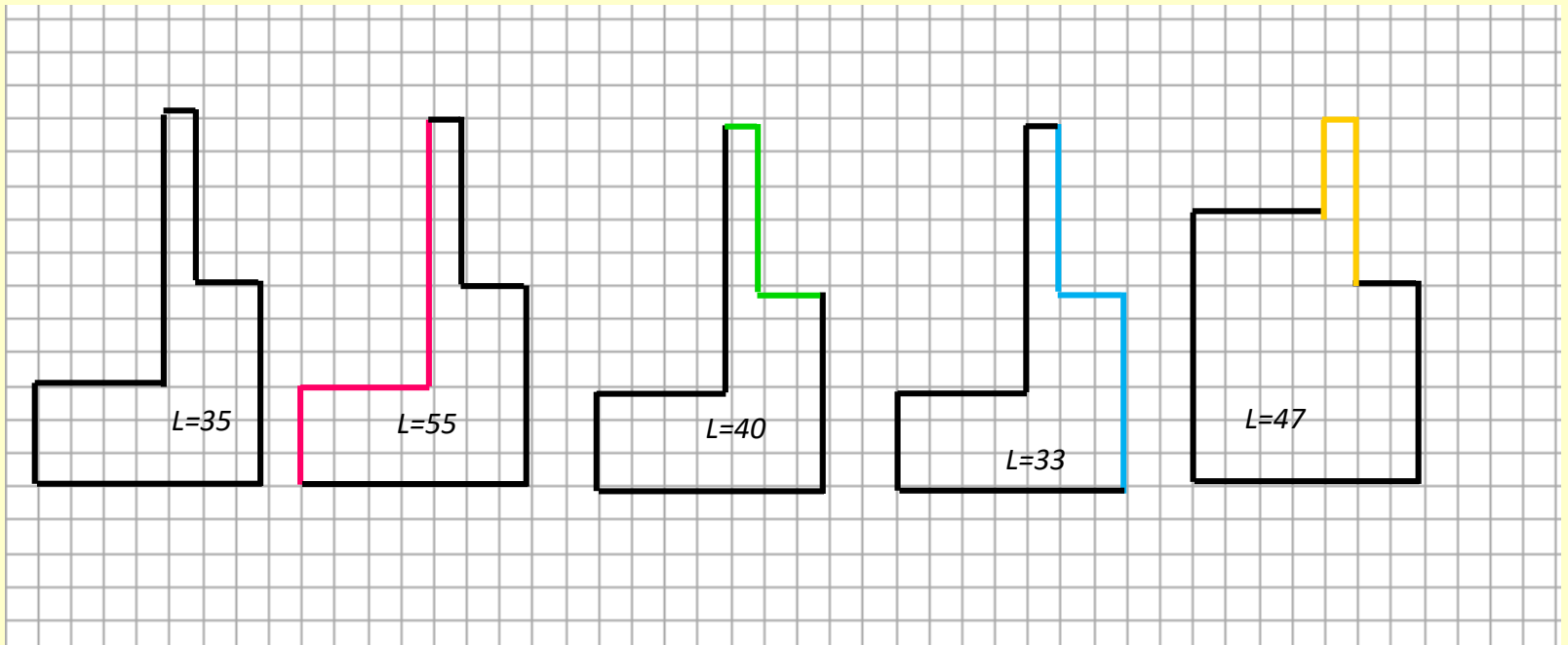
Atklājums faktiski ir triviāls, bet pamācošs ir pats attīstības process, ja cilvēks vispār kaut ko pēta.

Tas, kas pieredzējušam pētniekam jau pats par sevi var būt saprotams, iepriekš zināms, iesācējam var prasīt pamatīgu piepūli. **Saprašana nenāk viegli.**

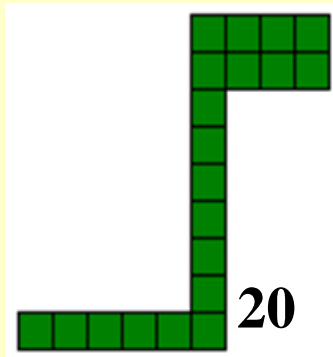
ZPD nesatur vispārinājumus.

**ZPD nav saskatītas vienkāršas transformācijas
(nākamais slaidis), kas saglabā *maģiskuma* īpašību.**

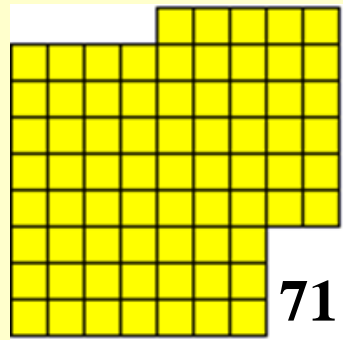
Transformācijas



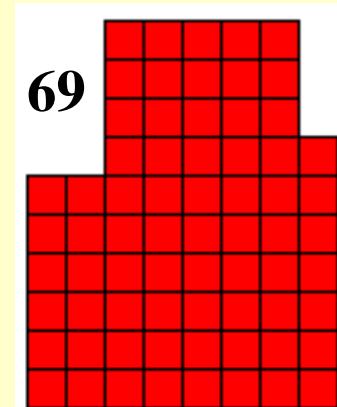
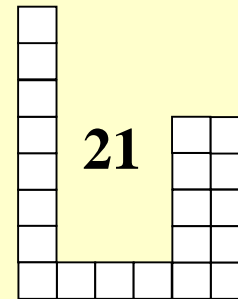
Tikai viens izņēmums [20, 71]



**Minimālais
laukums**



**Maksimālais
laukums**



63

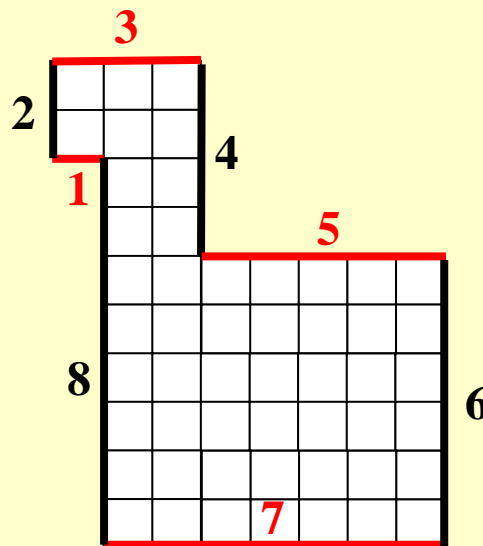
SMO līmenis

Definīcijas

D1. Par maģisku n -stūri sauc kvadrātveida vai trijstūrveida režģa n -stūri, kuram visu malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz n .

D2. Par maģisku n -stūri sauc polimino vai polimondu, kuram visu malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz n .

D3. Maģisko daudzstūri sauc par **perfektu**, ja tam malu garumi ir augošā vai dilstošā secībā.



Perfekts maģiskais 8-stūris

Vispārinājumi

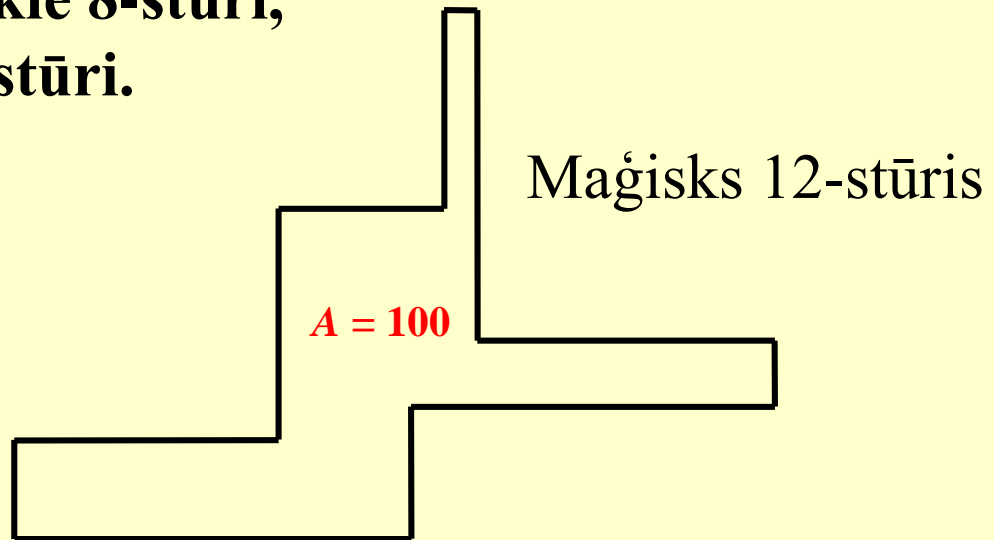
Nepieciešamais nosacījums: malu skaita n dalāmība ar 4.

Vai tas ir arī maģiskā polimino eksistences pietiekamais nosacījums?

Pierādījums vienkāršs. Ja nevarat to atrast saviem spēkiem,
sk. Elīnas Buliņas bakalaura darbu

MAGĪSKIE DAUDZSTŪRI UN TO ĪPAŠĪBAS, LU, Rīga, 2016

**Atrasti visi (252) maģiskie 8-stūri,
un visi (3) perfektie 16-stūri.**

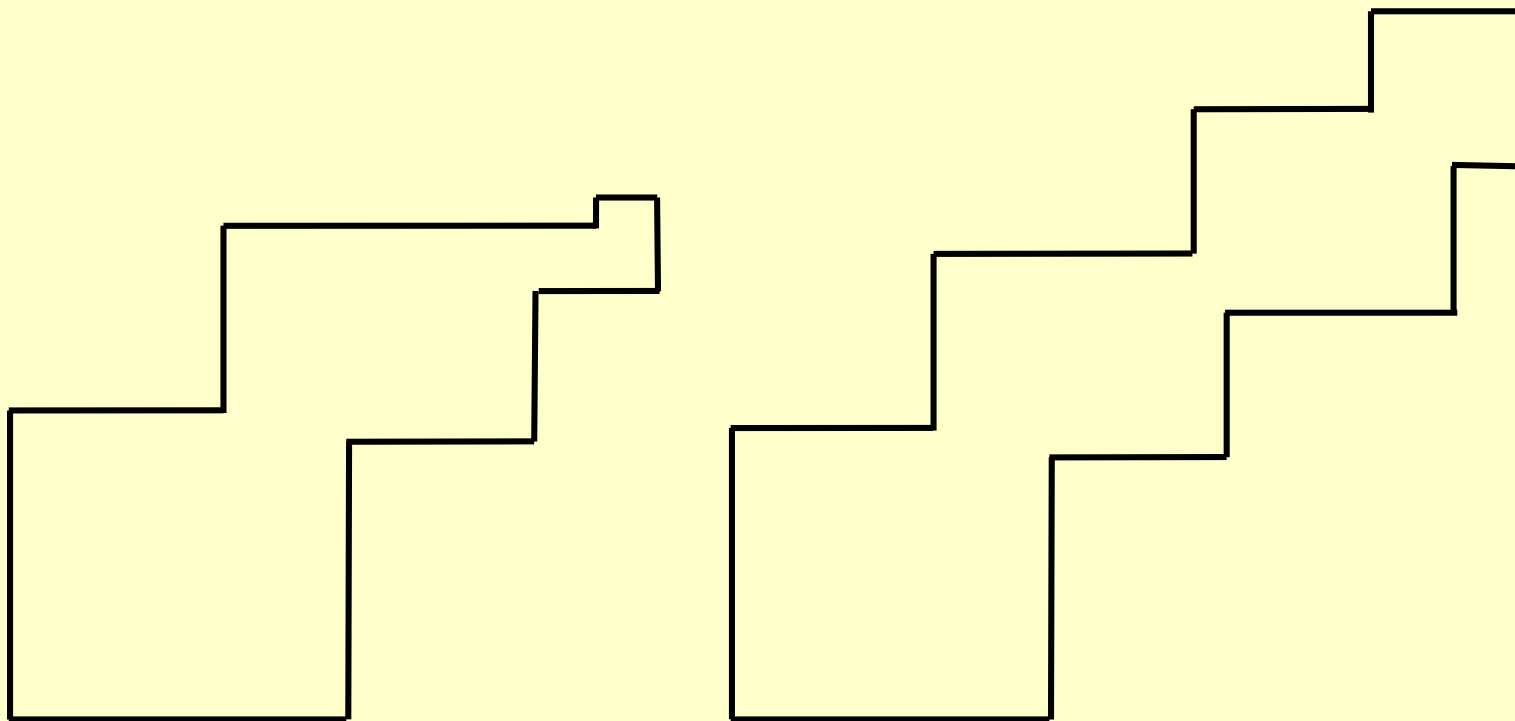


1-6-5-7-8-3-12-4-11-2-9-10

Vispārinājumi

4n-stūri

Vai kāpņveida 4n-stūri der kā atrisinājums?

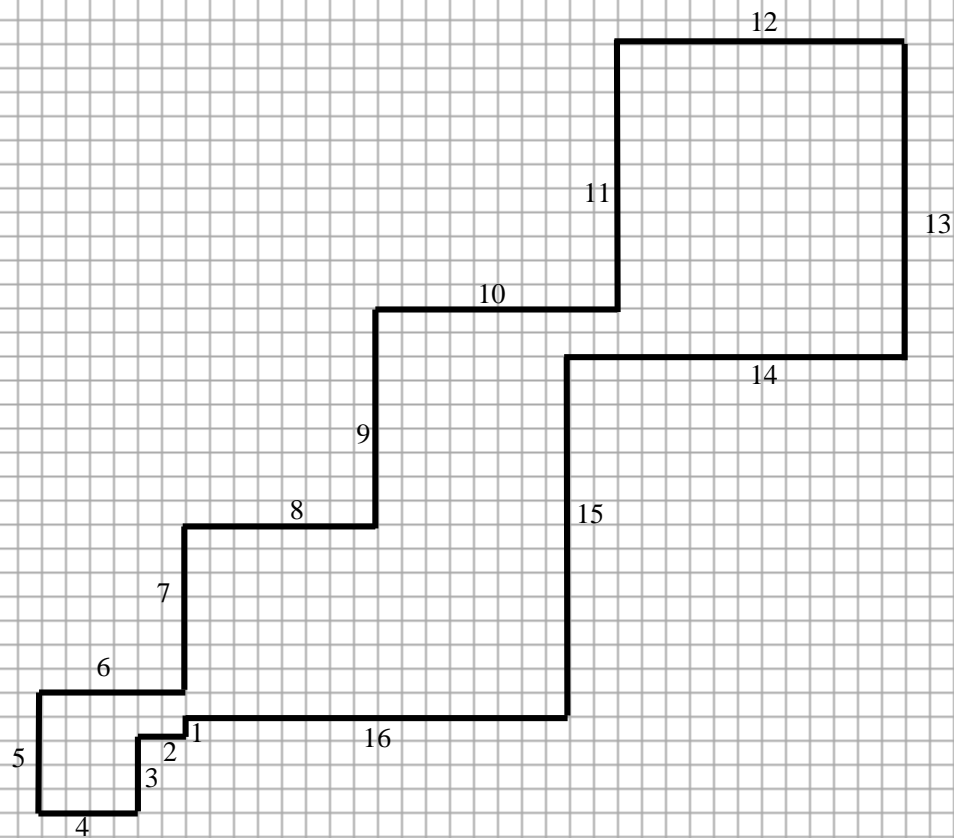


Perfekti maģiskie n -stūri

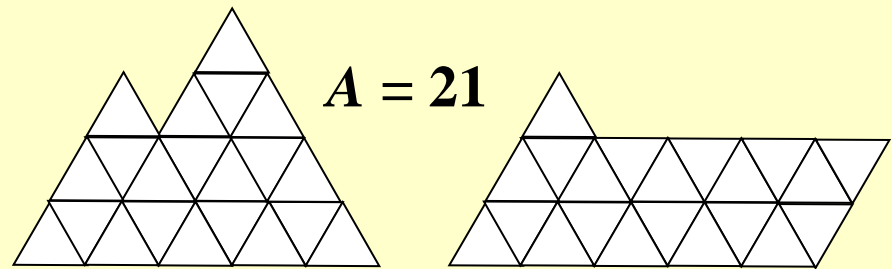
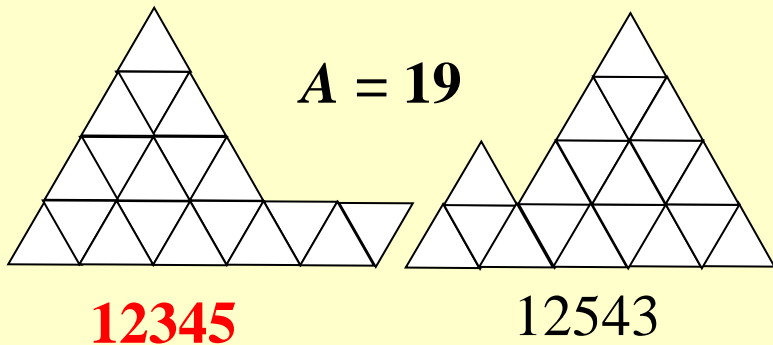
Perfekts 16-stūris

$V = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$

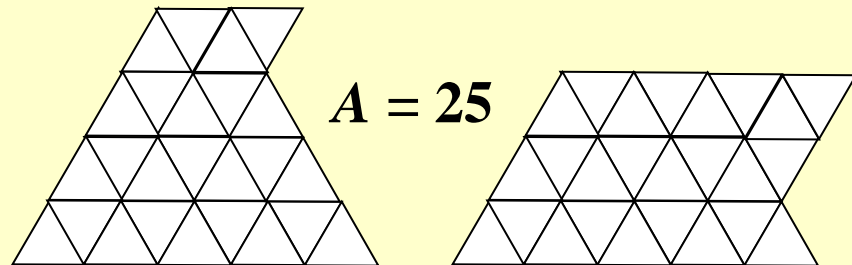
$H = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16\}$



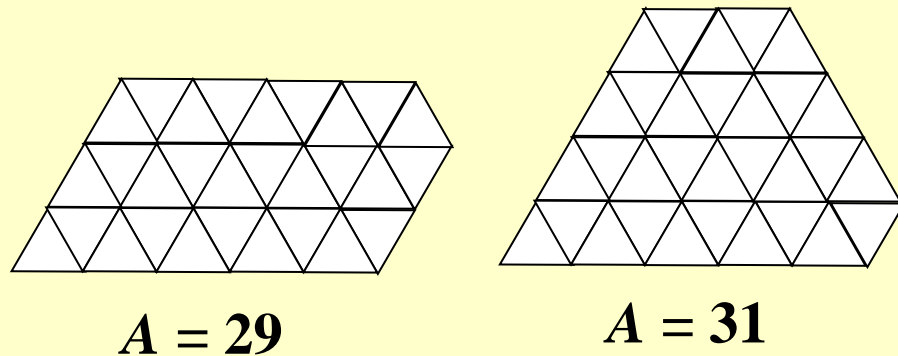
Maģiskie 5-stūri



**Katram piecstūrim
atbilst kāda permutācija.**



**Ir permutācijas, kurām
neatbilst neviens
maģiskais 5-stūris**



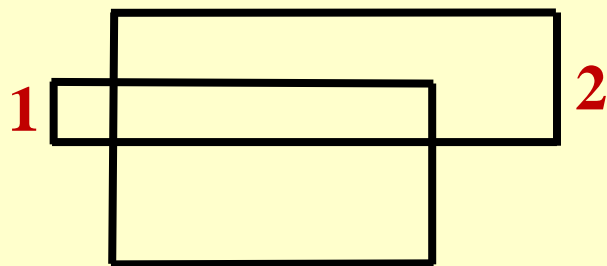
Atbilstība: daudzstūri - permutācijas

Katram 8-stūrim atbilst permutācija.

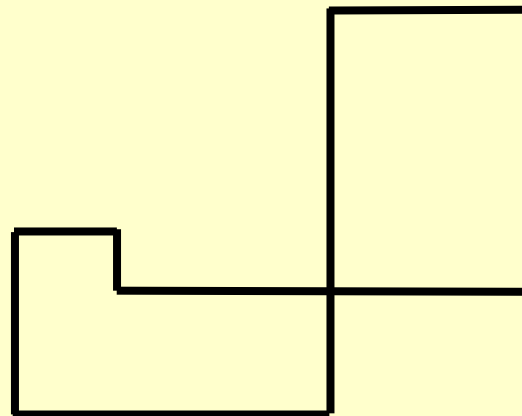
Vai ir otrādi, ka katrai permutācijai var piekārtot maģisku daudzstūri, ja nē, tad vismaz slēgtu lauztu līniju?

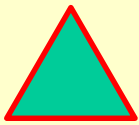
Piemēri:

18274536

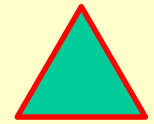


12358467

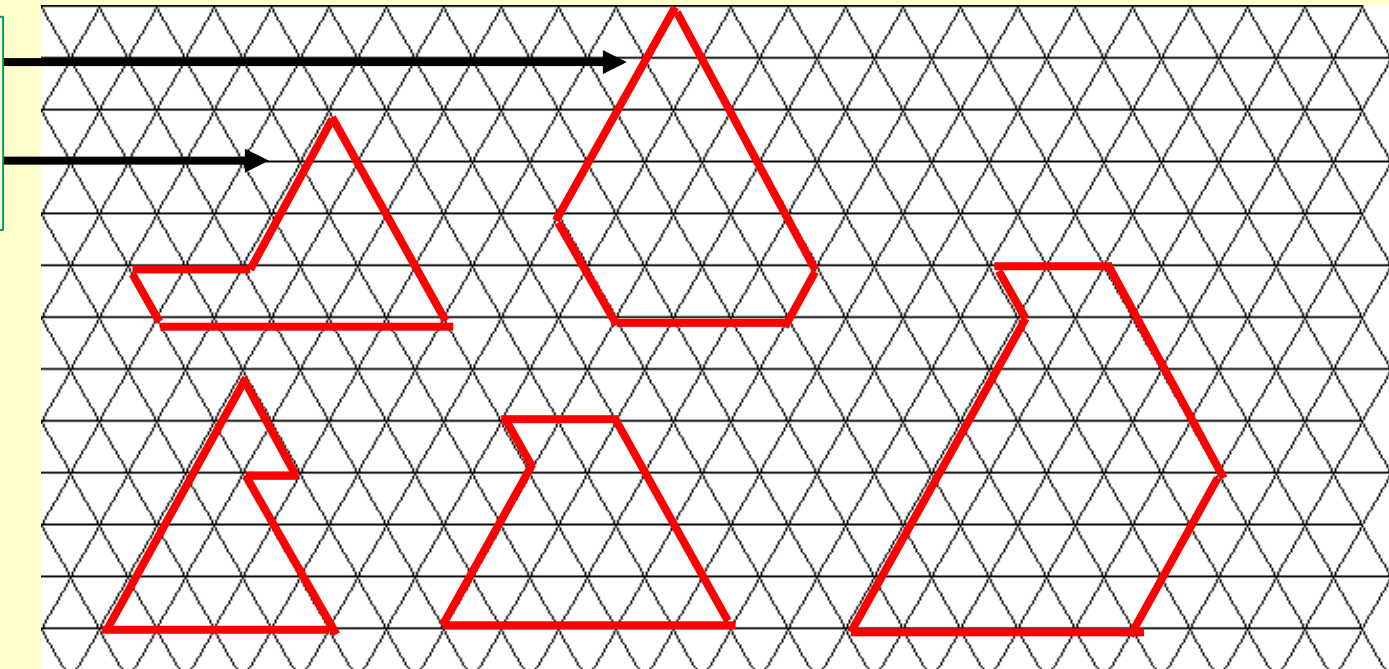




Maģiskie polimondi

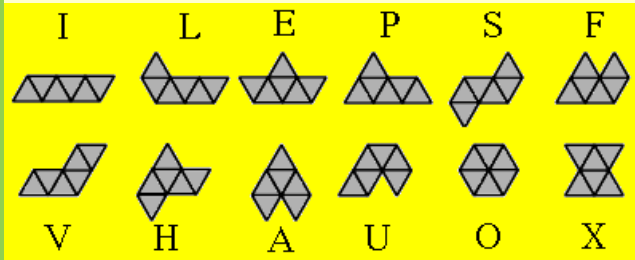


Maijs
2016
6. klase



Kādām n vērtībām eksistē maģiskais n -stūris, kurš ir polimonds?

Salikt no heksamondiem maģisku polimonu.
Kāds ir mazākais heksamonu skaits, lai šim uzdevumam eksistētu atrisinājums?



Praktiskais darbs

Trijstūra režģis

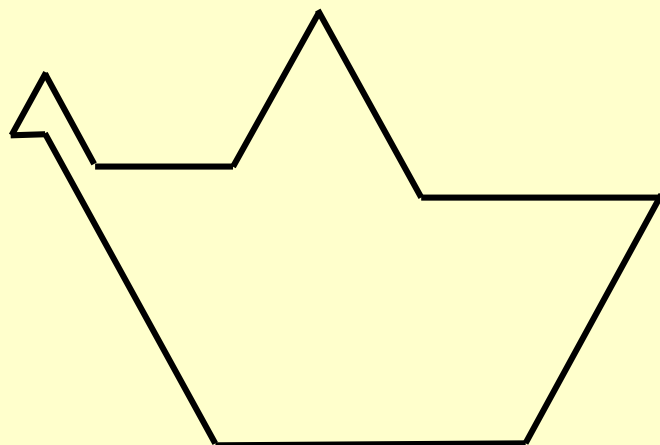
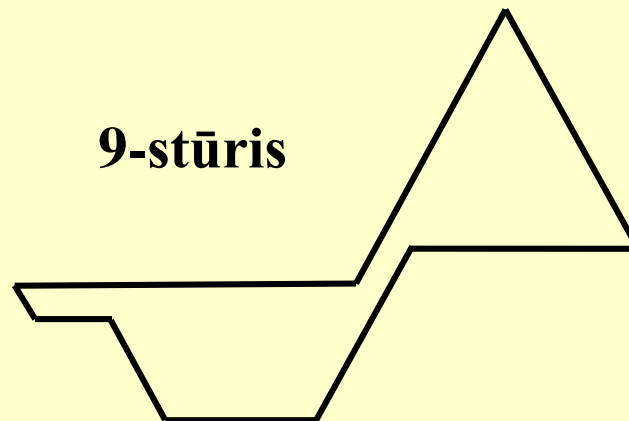
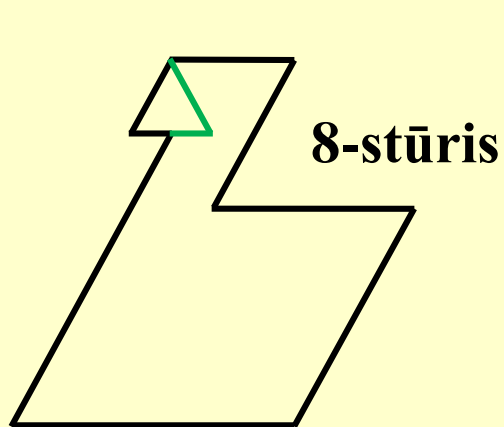
Uzzīmēt maģiskus 6-stūrus

Cik dažādas laukuma vērtības ir iespējamās?

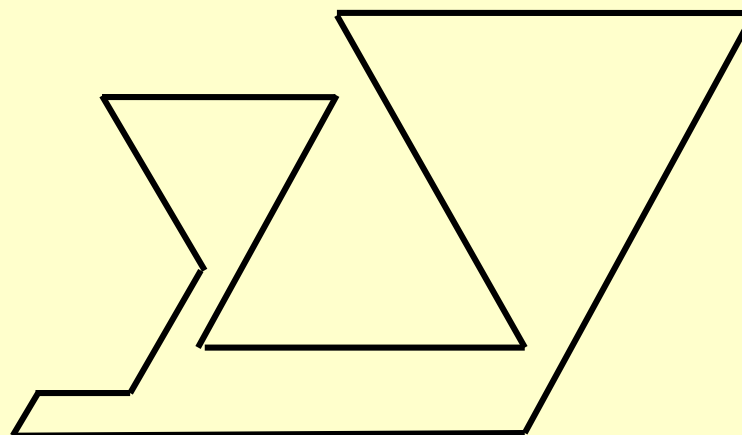
Atrast perfektus n -stūrus, ja $n = 8, 9, 10, 11$ utt.

Perfekti polimondi

Pierādīt, ka katram $n \geq 5$ eksistē n -stūris, kas ir perfekts polimonds.



10-stūris



11-stūris

Paldies par uzmanību!