

# MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE



LATVIJAS  
UNIVERSITĀTE  
ANNO 1919



Fazer



FIZMAT.LV

# Vai matemātika var būt neprecīza?

LU FMF profesors  
Aleksandrs Šostaks

# Saturs

Nestrikta kopas

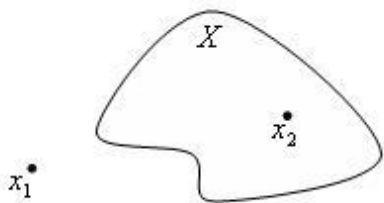
Nestriktie skaitļi

Nestriktā loģika

# Nestriktas kopas

# Klasiskās kopas

Katrs punkts pieder kopai vai nepieder.

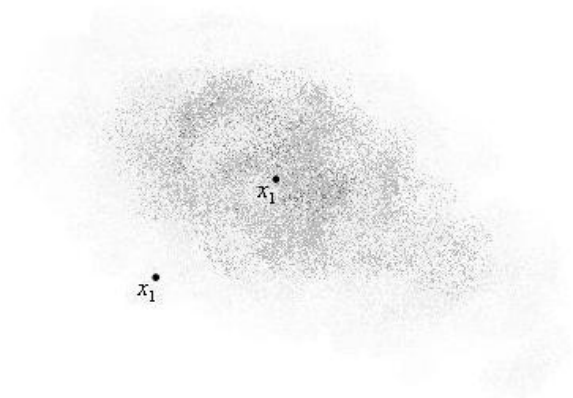


$$x_1 \notin X$$

$$x_2 \in X$$

# Miglainās jeb nestriktās kopas

Cik lielā mērā katrs punkts pieder mākonim?



# Nestrikto kopu teorijas pamatlicējs



Professor Lotfi A. Zadeh

Dzimis 1921. gadā Baku (Azerbaidžānā) uzņēmēja ģimenē.

1931.-1944. Zadē ģimene dzīvo Irānā.

1942. gadā Lofti ieguva bakalaura grādu elektriskajā inženierijā Teherenas universitātē.

1944. gadā Zadē ģimene emigrē uz ASV.

1946. Lofti ieguva maģistra grādu, bet 1951.gadā - doktora grādu elektriskajā inženierijā Kolumbijas universitātē

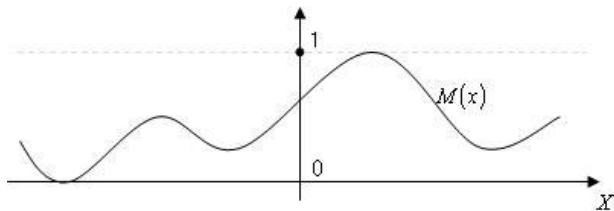
1963. gadā Lofti Zadē ievēl par Berklijas universitātes elektriskās inženierijas nodaļas vadītāju.

# Nestriktās kopas definīcija

## Definīcija

Par kopas  $X$  nestriktu apakškopu sauc attēlojumu (funkciju)

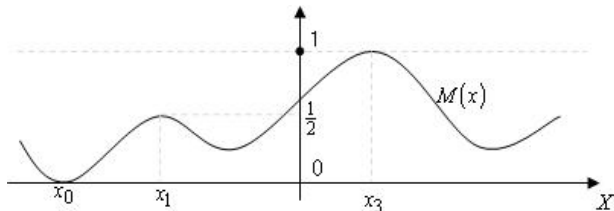
$$M : X \rightarrow [0; 1].$$



Vērtība  $M(x)$  raksturo cik lielā mērā punkts  $x$  pieder kopas  $X$  nestriktai apakškopai  $M$ .



# Nestriktās kopas piemērs

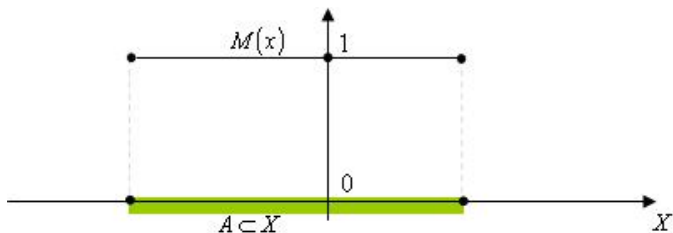


$$M(x_0) = 0$$

$$M(x_1) = \frac{1}{2}$$

$$M(x_3) = 1$$

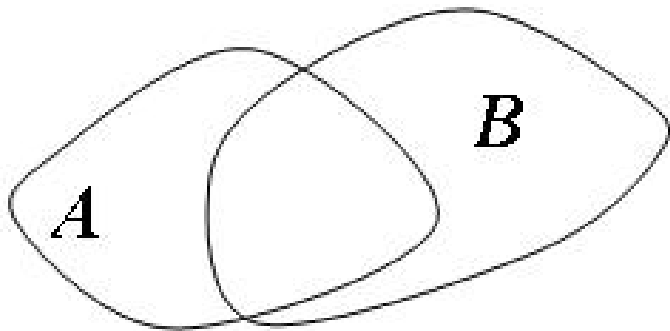
Kā parastas kopas aprakstīt ar nestriktām kopām?



$$M(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \in A \\ 0, & \text{citādi.} \end{cases}$$

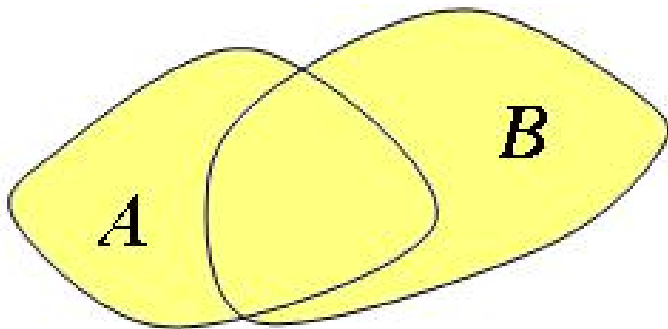
# Darbības ar kopām

# Parasto kopu universāls novietojums plaknē



Apvienojums parastām kopām.

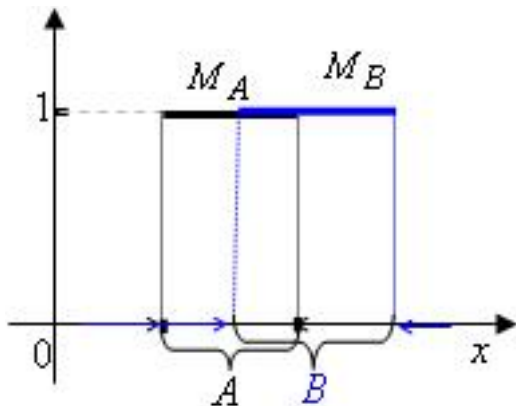
$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ vai } x \in B \}$$



## Parastās kopas kā nestriktās kopas.

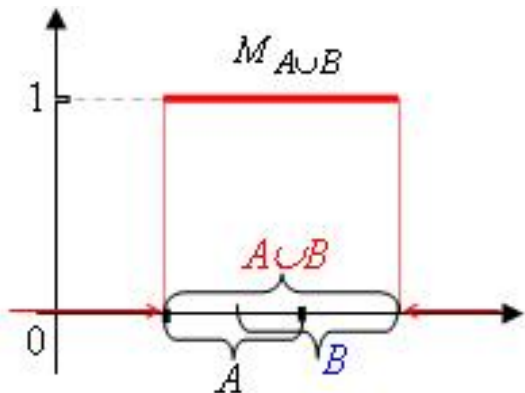
$$M_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \in A \\ 0, & \text{citādi.} \end{cases}$$

$$M_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \in B \\ 0, & \text{citādi.} \end{cases}$$

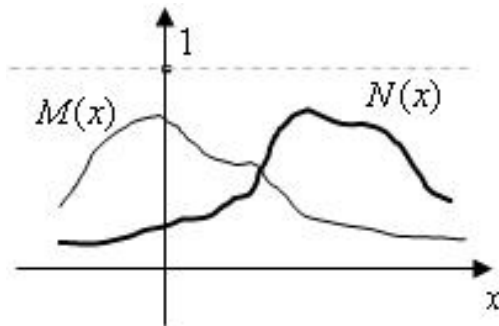


Apvienojums parastām kopām kā nestriktām kopām.

$$M_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \in A \cup B \\ 0, & \text{citādi.} \end{cases}$$



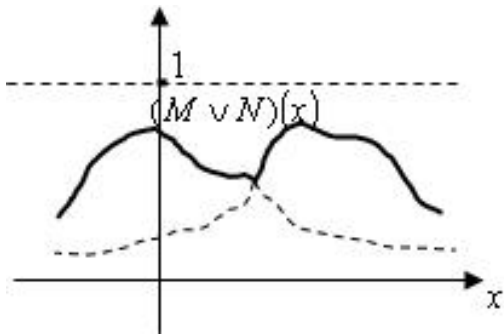
Dotas divas nestrikas kopas.





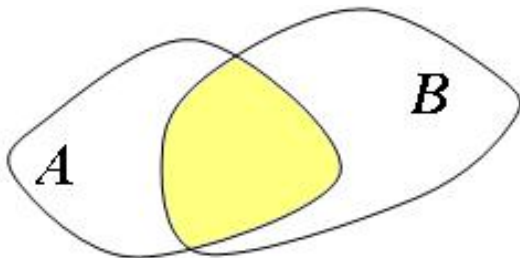
# Apvienojums nestriktām kopām.

$$(M \vee N)(x) = \max(M(x), N(x))$$



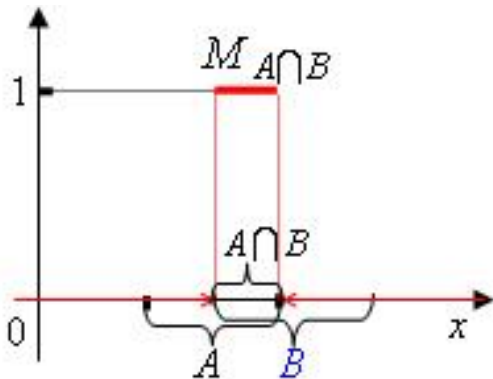
# Šķēlums parastām kopām

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ un } x \in B\}$$



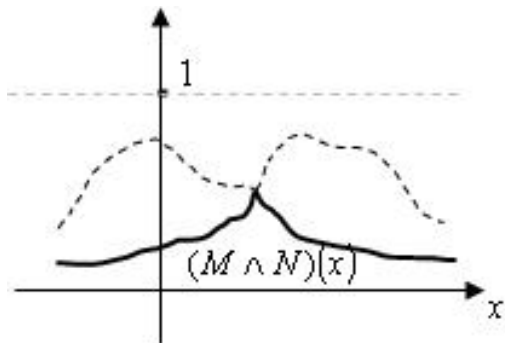
Šķēlums parastām kopām kā nestriktām kopām.

$$M_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \in A \cap B \\ 0, & \text{citādi.} \end{cases}$$



# Šķēlums nestriktām kopām.

$$(M \wedge N)(x) = \min(M(x), N(x))$$

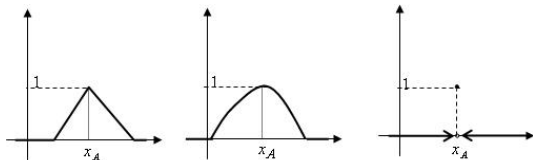


# Nestriktie skaitļi

# Nestrikie skaitļi

## Definīcija

Par nestriktu skaitli sauc kopas  $X$  nestriktu apakškopu  $A(x)$  tādu, kurai eksistē viens vienīgs punkts  $x_A$  tāds, ka  $A(x_A) = 1$ . Šo punktu  $x_A$  sauc par nestrikta skaitļa virsotni.



# Darbības ar nestriktiem skaitļiem

## Teorēma

Ja doti nestriktie skaitļi  $A$  un  $B$ , tad

$$(A + B)(x) = \sup_{s+t=x} (A(s) \wedge B(t))$$

$$(A \cdot B)(x) = \sup_{s \cdot t=x} (A(s) \wedge B(t))$$

$$(A^2)(x) = \sup_{t^2=x} A(t)$$

# Darbības ar nestriktiem skaitļiem

## Teorēma

Ja  $A$  un  $B$  ir nestriktie skaitļi, tad  $A + B$ ,  $A \cdot B$  un  $-A$  arī ir nestriktie skaitļi.

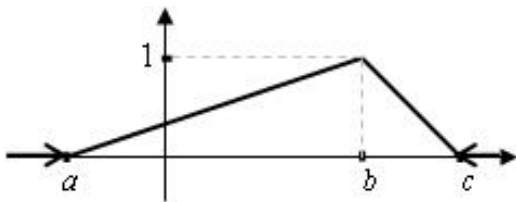


# Trīsstūrveida nestriktie skaitļi

## Definīcija

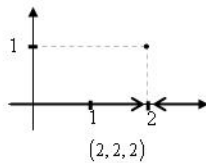
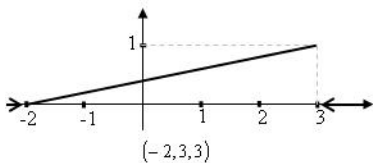
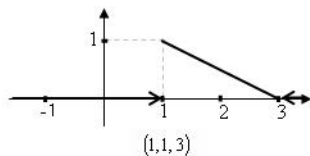
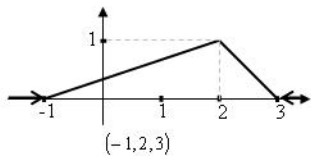
Par trīsstūrveida nestriktu skaitli sauc nestrikto skaitli  $A$ , kuru var uzdot ar formulu

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ja } a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{ja } b < x \leq c \\ 0, & \text{ja } c < x \end{cases}$$



Trīsstūrveida nestriktu skaitli ērti var pierakstīt kā trīs reālo skaitļu kortežu  $(a, b, c)$ .

# Trīsstūrveida nestrikto skaitļu piemēri



# Trīsstūrveida nestrikto skaitļu summa un starpība

## Teorēma

Trīsstūrveida nestrikto skaitļu saskaitīšanai ir spēkā šāda formula

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f).$$

Lai definētu trīsstūrveida nestrikto skaitļu starpību, izmanto formulu

$$A - B = A + (-B),$$

kur  $-B = (-c, -b, -a)$ , ja  $B = (a, b, c)$ .

# Trīsstūrveida nestrikto skaitļu reizināšana

## Teorēma

Trīsstūrveida nestrikto skaitļu reizinājumu aprēķina pēc formulas

$$(A \cdot B)(x) = \sup_{s \cdot t = x} (A(s) \wedge B(t)).$$

## Piezīme

Trīsstūrveida nestrikto skaitļu reizinājums, kaut ir nestrikts skaitlis, var nebūt trīsstūrveida

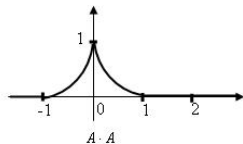
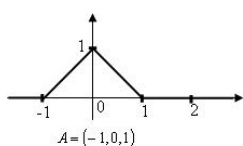
# Trīsstūrveida nestrikto skaitļu reizināšanas piemēri

$A = (-1, 0, 1)$  jeb pilnā formā

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \leq -1 \text{ vai } x \geq 1 \\ 1 + x, & \text{ja } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{ja } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$(A \cdot A)(x) = \sup_{s \cdot t = x} (A(s) \wedge A(t)) = A(\sqrt{|x|})$$

$$(A \cdot A)(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \leq -1 \text{ vai } x \geq 1 \\ 1 - \sqrt{|x|}, & \text{ja } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

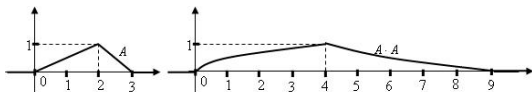


# Trīsstūrveida nestrikto skaitļu reizināšanas piemēri

$A = (0, 2, 3)$  jeb pilnā formā

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \leq 0 \text{ vai } x \geq 3 \\ \frac{1}{2}x, & \text{ja } 0 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{ja } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$(A \cdot A)(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \leq 0 \text{ vai } x \geq 9 \\ \frac{1}{2}\sqrt{|x|}, & \text{ja } 0 \leq x \leq 4 \\ 3 - \sqrt{|x|}, & \text{ja } 4 \leq x \leq 9 \end{cases}$$



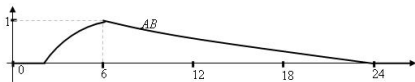
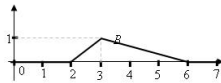
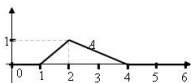
# Trīsstūrveida nestrikto skaitļu reizināšanas piemēri

$A = (1, 2, 4)$  un  $B = (2, 3, 6)$  jeb pilnā formā

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \leq 1 \text{ vai } x \geq 4 \\ x - 1, & \text{ja } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{4-x}{2}, & \text{ja } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \leq 2 \text{ vai } x \geq 6 \\ x - 2, & \text{ja } 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{6-x}{3}, & \text{ja } 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$(A \cdot B)(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \leq 2 \text{ vai } x \geq 24 \\ \frac{-3 + \sqrt{1+4x}}{2}, & \text{ja } 2 \leq x \leq 6 \\ \frac{6 - \sqrt{\frac{3}{2}x}}{3}, & \text{ja } 6 \leq x \leq 24 \end{cases}$$



# Nestriktā loģika



# Nestriktā loģika

Klasiskajā loģikā katrs izteikums ir vai nu patiess vai aplams, līdz ar to tam var piekārtot patiesuma vērtības atbilstoši 1 vai 0.

Nestriktajā loģikā izteikums var būt daļēji patiess, tātad tam tiks piekārtota patiesuma vērtība no intervāla  $[0; 1]$ .

# Loģikas operācijas. Konjunktija

klasislā loģika

$\&$	0	1	$\ A\ $
0	0	0	
1	0	1	
$\ B\ $			

# T-norma

Nestriktajā loģikā konjunktiju definē, izmantojot  $t$ -normu

$$\|A\| \text{ un } \|B\| = \|A\| * \|B\|.$$

## $t$ -normas definīcija

Operāciju  $*$  intervālā  $[0, 1]$  sauc par  $t$ -normu, ja katram  $a, b, c \in [0, 1]$

- 1)  $a * b = b * a$
- 2)  $(a * b) * c = a * (b * c)$
- 3)  $a \leq b$ , tad  $a * c \leq b * c$
- 4)  $a * 1 = a$

# $t$ -normas pamatpiemēri

1) minimuma  $t$ -norma

$$a *_M b = a \wedge b$$

2) reizinājuma  $t$ -norma

$$a *_P b = a \cdot b$$

3) Lukasieviča  $t$ -norma

$$a *_L b = \max\{a + b - 1, 0\}$$

# Konjunkcija nestritajā loģikā

$$\|A\| \& \|B\| = \|A\| *_{\rho} \|B\|$$

$$\|A\| \& \|B\| = \|A\| \cdot \|B\|$$

$\&$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\ A\ $
0	0	0	0	
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
1	0	$\frac{1}{2}$	1	
$\ B\ $				

# Konjunkcija nestritajā loģikā

$$\|A\| \text{un} \|B\| = \|A\| *_L \|B\|$$

$$\|A\| \text{un} \|B\| = \max\{\|A\| + \|B\| - 1, 0\}$$

<b>&amp;</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	<b>1</b>	<b><math>\ A\ </math></b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	
$\frac{1}{2}$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	
<b>1</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	<b>1</b>	
<b><math>\ B\ </math></b>				

# Mājās, ja ir iedvesma, varat izdomāt

- 1) nestriktu kopu piemērus un kādas funkcijas tām būtu atbilstošas;
- 2) savu personīgo t-normu un pārdomāt konjunkciju nestriktajā loģikā ar četrām patiesuma vērtībām.

Mana e-pasta adrese:  
[aleksandrs.sostaks@lu.lv](mailto:aleksandrs.sostaks@lu.lv)