Lineārā programmēšana

Svetlana Asmuss

Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātikas nodaļa

2016. gada 6. februārī

Lineārā programmēšana ir . . .

Matemātikas nozare, kas nodarbojas ar

- lineāru funkciju minimālās un/vai maksimālās vērtību atrašanu
- tādās kopās, kuras tiek aprakstītas ar lineāriem nosacījumiem (lineārām vienādībām un/vai nevienādībām) .

- **L. V. Kantorovičs**
  - 1939: "Matemātiskās metodes ražošanas organizēšanā un plānošanā"
- **Dž. Dancigs**
  - 1947: Simpleksa metode
  - 1949: "Programming in Linear Structures"
  - 1963: "Linear Programming and Extensions"

Lineārās programmēšanas uzdevums: standartforma

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

- f – mērķa funkcija;

Lineārās programmēšanas uzdevums: standartforma

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

- f – mērķa funkcija;
- n – mainīgo skaits, m – mainīgo skaits;

Lineārās programmēšanas uzdevums: standartforma

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

- f – mērķa funkcija;
- n – mainīgo skaits, m – mainīgo skaits;
- $x_1, \ldots, x_n$ – mainīgie (nezināmie);

Lineārās programmēšanas uzdevums: standartforma

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

- f – mērķa funkcija;
- n – mainīgo skaits, m – mainīgo skaits;
- $x_1, \ldots, x_n$ – mainīgie (nezināmie);
- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ – nosacījumu koeficienti;

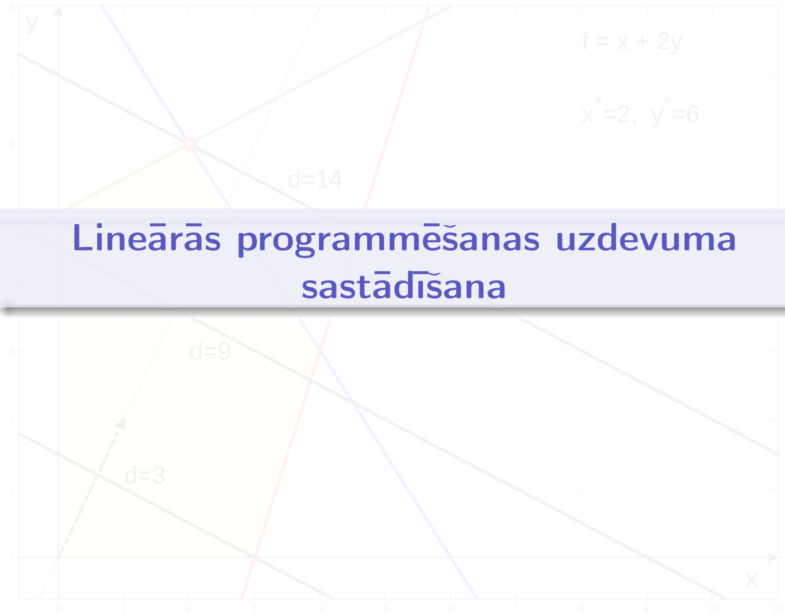
Lineārās programmēšanas uzdevums: standartforma

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

- f – mērķa funkcija;
- n – mainīgo skaits, m – mainīgo skaits;
- $x_1, \ldots, x_n$ – mainīgie (nezināmie);
- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ – nosacījumu koeficienti;
- $c_1, \ldots, c_n$ – mērķa funkcijas koeficienti.

- Ja nosacījumos parādās vienādības, pretējas nevienādības vai arī prasīts atrast funkcijas minimumu, uzdevumu var pārveidot standartformā.



Lineārās programmēšanas uzdevuma sastādīšana

Ražošanas plānošanas uzdevums

- Uzņēmumam, ražojot divu veidu produkciju P_1 un P_2, jāizmanto četri resursi R_1, R_2, R_3 un R_4.
- Jānosaka, cik daudz katra veida produkcijas ir jāražo, lai kopējā peļņa būtu vislielākā!

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3
R_2	16	2	1
R_3	5	0	1
R_4	21	3	0
Peļņa, ko dod produkcijas vienība		2	3

Produkcija	P_1	P_2
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	2	3

- Apzīmē:
  - x_1 – saražotās produkcijas P_1 daudzums
  - x_2 – saražotās produkcijas P_2 daudzums

Produkcija	P_1	P_2
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	2	3

- Apzīmē:
  - x_1 – saražotās produkcijas P_1 daudzums
  - x_2 – saražotās produkcijas P_2 daudzums
- Nevar saražot negatīvu produkcijas daudzumu, tāpēc $x_1 \geq 0$ un $x_2 \geq 0$.

Produkcija	P_1	P_2
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	2	3

- Apzīmē:
    - x_1 – saražotās produkcijas P_1 daudzums
    - x_2 – saražotās produkcijas P_2 daudzums
- Nevar saražot negatīvu produkcijas daudzumu, tāpēc $x_1 \geq 0$ un $x_2 \geq 0$.
- $f = 2x_1 + 3x_2$ – peļņas funkcija.

Produkcija	P_1	P_2
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	2	3

- Apzīmē:
  - x_1 – saražotās produkcijas P_1 daudzums
  - x_2 – saražotās produkcijas P_2 daudzums
- Nevar saražot negatīvu produkcijas daudzumu, tāpēc $x_1 \geq 0$ un $x_2 \geq 0$.
- $f = 2x_1 + 3x_2$ – peļņas funkcija.
- Ražošanas plānu apraksta vektors (x_1, x_2).

Produkcija	P_1	P_2
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	2	3

- Apzīmē:
  - x_1 – saražotās produkcijas P_1 daudzums
  - x_2 – saražotās produkcijas P_2 daudzums
- Nevar saražot negatīvu produkcijas daudzumu, tāpēc $x_1 \geq 0$ un $x_2 \geq 0$.
- $f = 2x_1 + 3x_2$ – peļņas funkcija.
- Ražošanas plānu apraksta vektors (x_1, x_2).
- Ražošanas plānošanas uzdevums ir uzdevums par peļņas funkcijas f maksimālo vērtību:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3

- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē viena resursa R_1 vienība.

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3

- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē viena resursa R_1 vienība.
- Lai saražotu vienu produkcijas P_2 vienību, jāpatērē trīs resursa R_1 vienības.

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3

- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē viena resursa R_1 vienība.
- Lai saražotu vienu produkcijas P_2 vienību, jāpatērē trīs resursa R_1 vienības.
- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības un x_2 produkcijas P_2 vienības, jāpatērē $1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$ resursa R_1 vienības.

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3

- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē viena resursa R_1 vienība.
- Lai saražotu vienu produkcijas P_2 vienību, jāpatērē trīs resursa R_1 vienības.
- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības un x_2 produkcijas P_2 vienības, jāpatērē $1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$ resursa R_1 vienības.
- Pieejamas tikai 18 resursa R_1 vienības, vairāk R_1 patērēt nevar!
- Iegūst nosacījumu
$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

Resursi	Resursu krājumi	Resursu patēriņš produkcijas vienības saražošanai	
		P_1	P_2
R_1	18	1	3
R_2	16	2	1
R_3	5	0	1
R_4	21	3	0

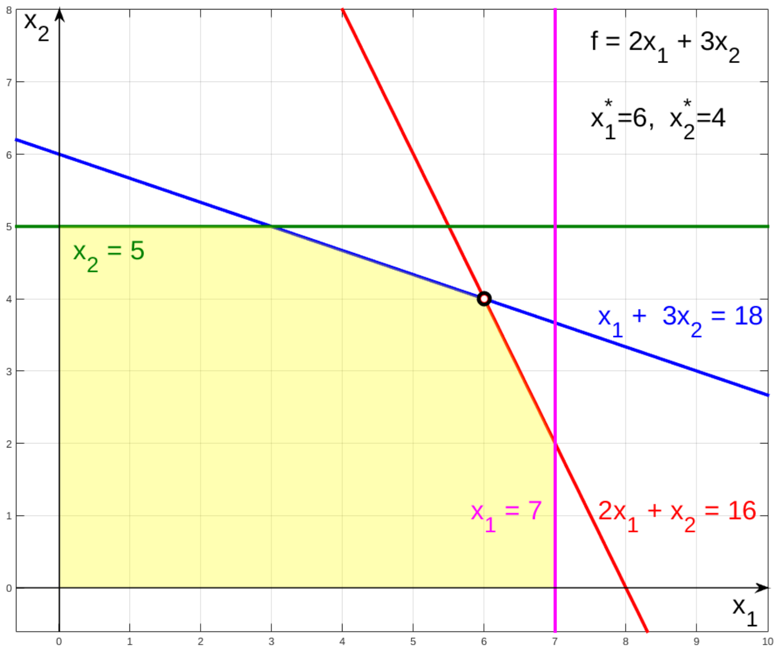
- Nosacījumu sistēma: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$

- Iegūts lineārās programmēšanas uzdevums:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Ja vektors (x_1, x_2) apmierina visus nosacījumus, to sauc par ražošanas plānu.
- Ja vektors (x_1^*, x_2^*) apmierina visus nosacījumus **un** maksimizē mērķa funkciju f, to sauc par **optimālo ražošanas plānu**.
- Šajā piemērā $x_1^* = 6$ un $x_2^* = 4$.



x_2
$f = 2x_1 + 3x_2$
$x_1^*=6, \; x_2^*=4$
$x_2 = 5$
$x_1 + 3x_2 = 18$
$x_1 = 7$
$2x_1 + x_2 = 16$
x_1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Uzdevums

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		Dīvāns	Tahta	Guļamkrēsls
Gobelēns (kv. m)	30 000	6	5	3
Porolons (kg)	24 000	3	4	3
Dekoratīvās naglas (gab.)	125 000	80	65	50
Peļņa, ko dod produkcijas vienība, EUR		80	65	50

- Mēbeļu kombināts ir apguvis triju mīksto mēbeļu veidu (dīvāni, tahtas, guļamkrēsli) ražošanu.

Uzdevums

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		Dīvāns	Tahta	Guļamkrēsls
Gobelēns (kv. m)	30 000	6	5	3
Porolons (kg)	24 000	3	4	3
Dekoratīvās naglas (gab.)	125 000	80	65	50
Peļņa, ko dod produkcijas vienība, EUR		80	65	50

- Mēbeļu kombināts ir apguvis triju mīksto mēbeļu veidu (dīvāni, tahtas, guļamkrēsli) ražošanu.
- Šo mīksto mēbeļu ražošanā tiek izmantoti trīs materiālu veidi: gobelēns, porolons un dekoratīvās naglas.

Uzdevums

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		Dīvāns	Tahta	Guļamkrēsls
Gobelēns (kv. m)	30 000	6	5	3
Porolons (kg)	24 000	3	4	3
Dekoratīvās naglas (gab.)	125 000	80	65	50
Peļņa, ko dod produkcijas vienība, EUR		80	65	50

- Mēbeļu kombināts ir apguvis triju mīksto mēbeļu veidu (dīvāni, tahtas, guļamkrēsli) ražošanu.
- Šo mīksto mēbeļu ražošanā tiek izmantoti trīs materiālu veidi: gobelēns, porolons un dekoratīvās naglas.
- Tabulā ir dots šo materiālu patēriņš vienas vienības izgatavošanai, kā arī esošais materiālu daudzums un peļņa no vienas vienības realizācijas.
- Sastādīt LPU, kas ļautu gūt maksimālo peļņu!

Uzdevums

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		Dīvāns	Tahta	Guļamkrēsls
Gobelēns (kv. m)	30 000	6	5	3
Porolons (kg)	24 000	3	4	3
Dekoratīvās naglas (gab.)	125 000	50	45	30
Peļņa, ko dod produkcijas vienība, EUR		80	65	50

- Trīs produkcijas veidi: P_1(dīvāni), P_2 (tahtas), P_3 (guļamkrēsli).
- x_i – saražotās produkcijas P_i daudzums, $i = 1, 2, 3$.

Produkcija	P_1	P_2	P_3
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	80	65	50

- Gūtā peļņa: $f = ?$
- Peļņa jāmaksimizē, tātad

$$f = ? \to \max$$

- Trīs produkcijas veidi: P_1(dīvāni), P_2 (tahtas), P_3 (guļamkrēsli).
- x_i – saražotās produkcijas P_i daudzums, $i = 1, 2, 3$.

Produkcija	P_1	P_2	P_3
Peļņa, ko dod produkcijas vienība	80	65	50

- Gūtā peļņa: $f = 80x_1 + 65x_2 + 50x_3$
- Peļņa jāmaksimizē, tātad

$$f = 80x_1 + 65x_2 + 50x_3 \to \max$$

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_1	30 000	6	5	3

- Trīs resursu veidi: R_1 (gobelēns), R_2 (porolons), R_3 (dekoratīvās naglas).
- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē ? resursa R_1 vienības

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_1	30 000	6	5	3

- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē 6 resursa R_1 vienības
- Lai saražotu vienu produkcijas P_2 vienību, jāpatērē ? resursa R_1 vienības
- Lai saražotu vienu produkcijas P_3 vienību, jāpatērē ? resursa R_1 vienības

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_1	30 000	6	5	3

- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē 6 resursa R_1 vienības
- Lai saražotu vienu produkcijas P_2 vienību, jāpatērē 5 resursa R_1 vienības
- Lai saražotu vienu produkcijas P_3 vienību, jāpatērē ? resursa R_1 vienības

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_1	30 000	6	5	3

- Lai saražotu vienu produkcijas P_1 vienību, jāpatērē 6 resursa R_1 vienības
- Lai saražotu vienu produkcijas P_2 vienību, jāpatērē 5 resursa R_1 vienības
- Lai saražotu vienu produkcijas P_3 vienību, jāpatērē 3 resursa R_1 vienības
- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

? resursa R_1 vienības

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_1	30 000	6	5	3

- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \quad \text{resursa } R_1 \text{ vienības}$$

- Pieejamas tikai ? resursa R_1 vienības.
- Iegūst nosacījumu

?

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_1	30 000	6	5	3

- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \quad \text{resursa } R_1 \text{ vienības}$$

- Pieejamas tikai 30 000 resursa R_1 vienības.
- Iegūst nosacījumu

?

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_1	30 000	6	5	3

- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \quad \text{resursa } R_1 \text{ vienības}$$

- Pieejamas tikai 30 000 resursa R_1 vienības.
- Iegūst nosacījumu

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 30000.$$

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_2	24 000	3	4	3

- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

  ? resursa R_2 vienības

- Pieejamas tikai ? resursa R_2 vienības.
- Iegūst nosacījumu

  ?

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_2	24 000	3	4	3

- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad \text{resursa } R_2 \text{ vienības}$$

- Pieejamas tikai 24 000 resursa R_2 vienības.
- Iegūst nosacījumu

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24000.$$

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_3	125 000	50	45	30

- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

  ? resursa R_3 vienības

- Pieejamas tikai ? resursa R_3 vienības.
- Iegūst nosacījumu

  ?

Materiāli	Materiālu daudzums	Materiālu patēriņš produkcijas vienības saražošanai		
		P_1	P_2	P_3
R_3	125 000	50	45	30

- Lai saražotu x_1 produkcijas P_1 vienības, x_2 produkcijas P_2 vienības un x_3 produkcijas P_3 vienības, jāpatērē

$$50x_1 + 45x_2 + 30x_3 \quad \text{resursa } R_3 \text{ vienības}$$

- Pieejamas tikai 125 000 resursa R_3 vienības.
- Iegūst nosacījumu

$$50x_1 + 45x_2 + 30x_3 \leq 125000.$$

- Iegūtais lineārās programmēšanas uzdevums:

$$f = 80x_1 + 65x_2 + 50x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 30000 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24000 \\ 50x_1 + 45x_2 + 30x_3 \leq 125000 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Uztura optimizēšanas uzdevums

- Pieņemsim, ka, ēdot divus dažādus produktus P_1 un P_2, nepieciešams uzņemt trīs dažādas uzturvielas U_1, U_2 un U_3.

Uzturvielas	Nepieciešamais minimums diennaktī	Uzturvielas daudzums produkta vienībā	
		P_1	P_2
U_1	9	3	1
U_2	8	1	2
U_3	12	1	6
Produkta vienības cena		4	6

Uztura optimizēšanas uzdevums

- Pieņemsim, ka, ēdot divus dažādus produktus P_1 un P_2, nepieciešams uzņemt trīs dažādas uzturvielas U_1, U_2 un U_3.
- Tabulā dots
    - uzturvielu nepieciešamais minimums diennaktī;
    - katras uzturvielas daudzums produkta vienībā;
    - katra produkta vienības cena.

Uzturvielas	Nepieciešamais minimums diennaktī	Uzturvielas daudzums produkta vienībā	
		P_1	P_2
U_1	9	3	1
U_2	8	1	2
U_3	12	1	6
Produkta vienības cena		4	6

Uztura optimizēšanas uzdevums

- Pieņemsim, ka, ēdot divus dažādus produktus P_1 un P_2, nepieciešams uzņemt trīs dažādas uzturvielas U_1, U_2 un U_3.
- Tabulā dots
  - uzturvielu nepieciešamais minimums diennaktī;
  - katras uzturvielas daudzums produkta vienībā;
  - katra produkta vienības cena.
- Jānosaka, cik daudz katra veida produktu jāpatērē, lai kopējās izmaksas diennaktī būtu vismazākās!

Uzturvielas	Nepieciešamais minimums diennaktī	Uzturvielas daudzums produkta vienībā	
		P_1	P_2
U_1	9	3	1
U_2	8	1	2
U_3	12	1	6
Produkta vienības cena		4	6

Uzturvielas	Nepieciešamais minimums diennaktī	Uzturvielas daudzums produkta vienībā	
		P_1	P_2
U_1	9	3	1
U_2	8	1	2
U_3	12	1	6

- No dotajiem nosacījumiem izriet šāda nosacījumu sistēma:

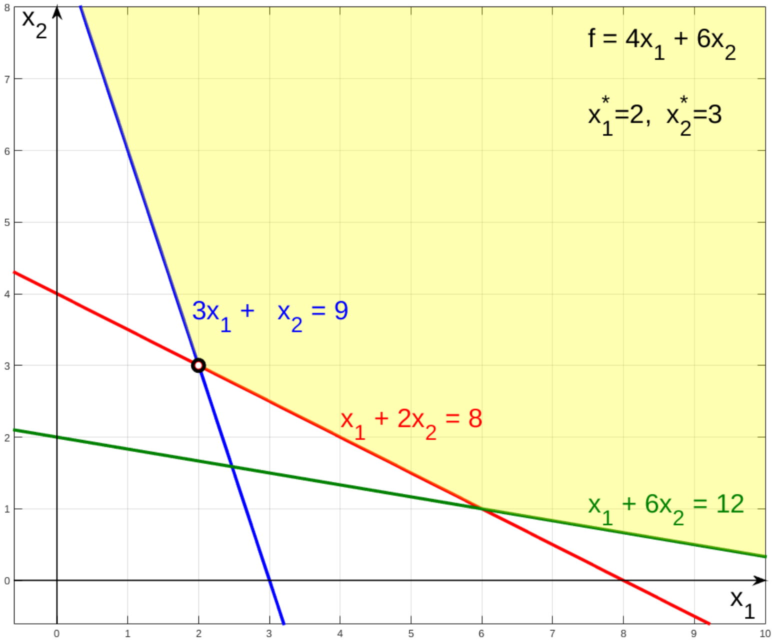
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Iegūts lineārās programmēšanas uzdevums:

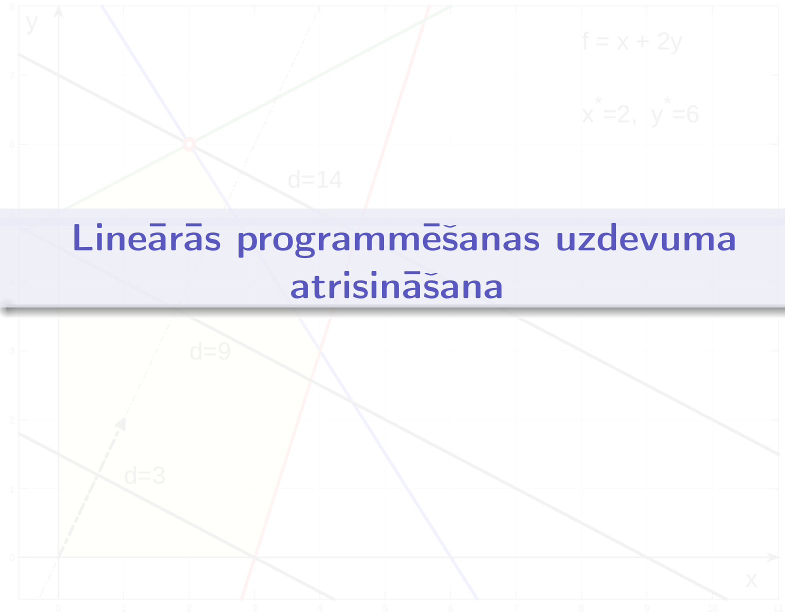
$$f = 4x_1 + 6x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Ja vektors (x_1^*, x_2^*) apmierina visus nosacījumus **un** minimizē mērķa funkciju f, to sauc par **optimālo** diennakts **plānu**.
- Šajā piemērā $x_1^* = 2$ un $x_2^* = 3$.



x_2
x_1
$f = 4x_1 + 6x_2$
$x_1^* = 2, \; x_2^* = 3$
$3x_1 + x_2 = 9$
$x_1 + 2x_2 = 8$
$x_1 + 6x_2 = 12$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



Lineārās programmēšanas uzdevuma atrisināšana

LPU atrisināšana

- Simpleksa metode
- Grafiskais paņēmiens
    - Var izmantot tikai, ja $n = 2$, t.i., ir tikai divi nezināmie: $f = c_1x_1 + c_2x_2$.

LPU atrisināšana

- Simpleksa metode
- Grafiskais paņēmiens
    - Var izmantot tikai, ja $n = 2$, t.i., ir tikai divi nezināmie: $f = c_1 x_1 + c_2 x_2$.
- Tādā gadījumā ērti apzīmēt x_1 ar x un x_2 ar y, t.i.,

$$f = c_1 x + c_2 y.$$

LPU atrisināšana

- Simpleksa metode
- Grafiskais paņēmiens
  - Var izmantot tikai, ja $n = 2$, t.i., ir tikai divi nezināmie: $f = c_1x_1 + c_2x_2$.
- Tādā gadījumā ērti apzīmēt x_1 ar x un x_2 ar y, t.i.,

$$f = c_1x + c_2y.$$

Grafiskais paņēmiens

Galvenie soļi:

- konstruē koordinātu plakni xOy;
- grafiski atrisina lineāru nevienādību sistēmu;
- atliek mērķa funkcijas līmeņlīnijas;
- atrod līmeņlīniju, kas dod optimālo atrisinājumu.

Taisnes $ax + by = c$ konstrukcija

- Konstruē koordinātu plakni xOy.

Taisnes $ax + by = c$ konstrukcija

- Konstruē koordinātu plakni xOy.
- Speciālgadījumi:
  - Ja $a = 0$, $b \neq 0$, tad taisne ir paralēla Ox asij (horizontāla);
  - Ja $b = 0$, $a \neq 0$, tad taisne ir paralēla Oy asij (vertikāla).
  - Ja $a \neq 0$, $b \neq 0$, tad taisne nav paralēla nevienai no asīm.
  - Ja $c = 0$, taisne iet caur koordinātu sākumpunktu $(0, 0)$.

Taisnes $ax + by = c$ konstrukcija

- Konstruē koordinātu plakni xOy.
- Speciālgadījumi:
  - Ja $a = 0$, $b \neq 0$, tad taisne ir paralēla Ox asij (horizontāla);
  - Ja $b = 0$, $a \neq 0$, tad taisne ir paralēla Oy asij (vertikāla).
  - Ja $a \neq 0$, $b \neq 0$, tad taisne nav paralēla nevienai no asīm.
  - Ja $c = 0$, taisne iet caur koordinātu sākumpunktu $(0, 0)$.
- Jebkuru taisni iespējams konstruēt, atrodot divus šīs taisnes punktus un savienojot tos ar taisni!

Piemērs

Konstruēt taisnes

- $x = -3$,
- $y = 4$,
- $x + 3y = 0$.

Risinājums:

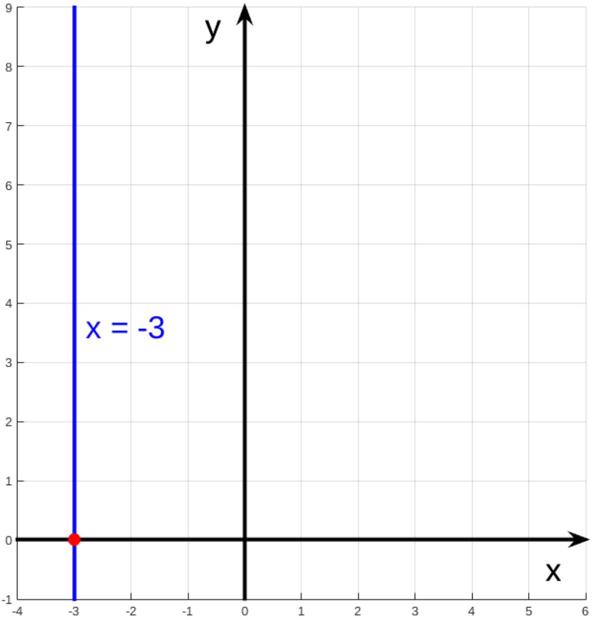
Piemērs

Konstruēt taisnes

- $x = -3$,
- $y = 4$,
- $x + 3y = 0$.

Risinājums:

- Taisne $x = -3$ ir paralēla Oy asij un iet caur punktu $(-3, 0)$.

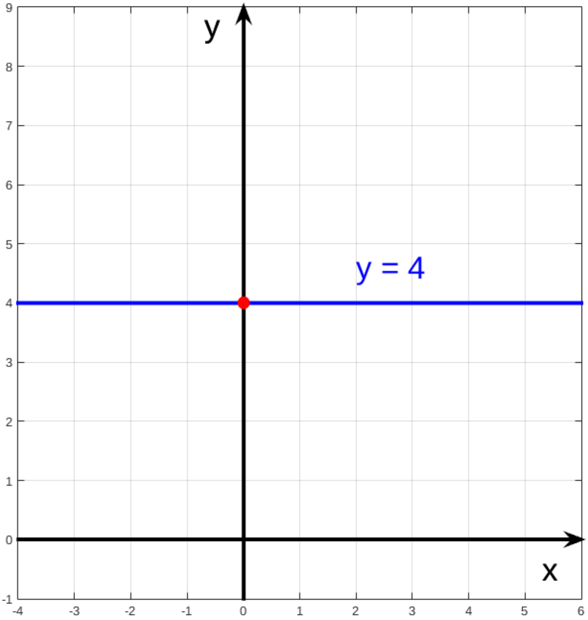

y
x
x = -3
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Konstruēt taisnes

- $x = -3$,
- $y = 4$,
- $x + 3y = 0$.

Risinājums:

- Taisne $y = 4$ ir paralēla Ox asij un iet caur punktu $(0, 4)$.



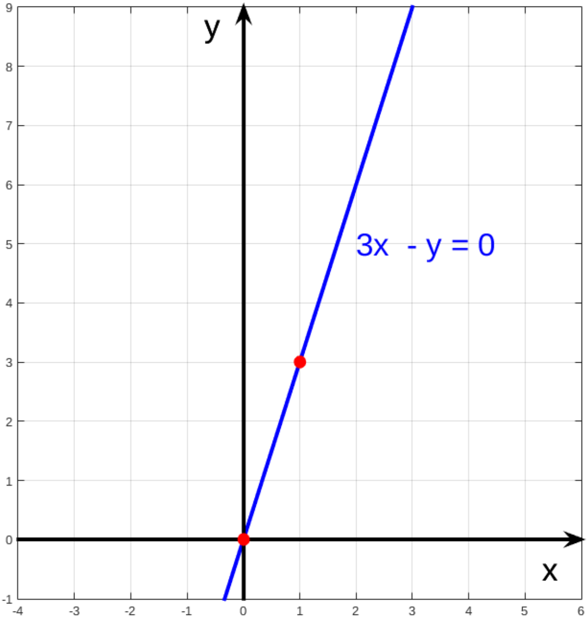
y
x
y = 4
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Konstruēt taisnes

- $x = -3$,
- $y = 4$,
- $x + 3y = 0$.

Risinājums:

- Taisne $x + 3y = 0$ nav paralēla nevienai no koordinātu asīm, taču iet caur koordinātu sākumpunktu.
- Ja $y = 1$, tad iegūst vienādojumu $x + 3 = 0$ jeb $x = -3$. Tātad taisne iet arī caur punktu $(3, -1)$.



y
x
3x - y = 0
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Piemērs

Konstruēt taisni $3x + 2y = 18$!

Risinājums:

Piemērs

Konstruēt taisni $3x + 2y = 18$!

Risinājums:

- Ja $x = 0$, tad iegūst vienādojumu $2y = 18$ jeb $y = 9$; tātad taisne iet caur punktu $(x, y) = (0, 9)$.

Piemērs

Konstruēt taisni $3x + 2y = 18$!

Risinājums:

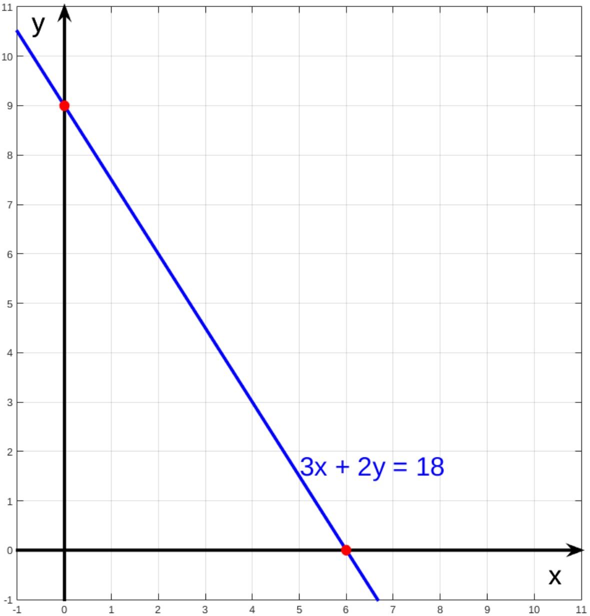
- Ja $x = 0$, tad iegūst vienādojumu $2y = 18$ jeb $y = 9$; tātad taisne iet caur punktu $(x, y) = (0, 9)$.
- Ja $y = 0$, tad iegūst vienādojumu $3x = 18$ jeb $x = 6$; tātad taisne iet caur punktu $(x, y) = (6, 0)$.

Piemērs

Konstruēt taisni $3x + 2y = 18$!

Risinājums:

- Ja $x = 0$, tad iegūst vienādojumu $2y = 18$ jeb $y = 9$; tātad taisne iet caur punktu $(x, y) = (0, 9)$.
- Ja $y = 0$, tad iegūst vienādojumu $3x = 18$ jeb $x = 6$; tātad taisne iet caur punktu $(x, y) = (6, 0)$.
- Novelk taisni caur abiem punktiem $(0, 9)$ un $(6, 0)$.
- Alternatīvi, taisni varēja izteikt formā $y = 9 - 1.5x$ un konstruēt attiecīgās funkcijas grafiku.



y
x
3x + 2y = 18
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Nevienādības $ax + by \geq c$ (vai $\leq c$) grafiskā atrisināšana

- Konstruē koordinātu plakni xOy.

Nevienādības $ax + by \geq c$ (vai $\leq c$) grafiskā atrisināšana

- Atliek taisni $ax + by = c$. Šī taisne sadala koordinātu plakni divās pusplaknēs:
    - vienā no pusplaknēm visi punkti (x, y) apmierina nevienādību $ax + by \geq c$,
    - otrā pusplaknē visi punkti (x, y) apmierina nevienādību $ax + by \leq c$.

Nevienādības $ax + by \geq c$ (vai $\leq c$) grafiskā atrisināšana

- Atliek taisni $ax + by = c$. Šī taisne sadala koordinātu plakni divās pusplaknēs:
  - vienā no pusplaknēm visi punkti (x, y) apmierina nevienādību $ax + by \geq c$,
  - otrā pusplaknē visi punkti (x, y) apmierina nevienādību $ax + by \leq c$.
  - Lai atrastu vajadzīgo pusplakni, izvēlas patvaļīgu punktu kādā no pusplaknēm un pārbauda, kura nevienādība izpildās.
  - ja taisne neiet caur koordinātu sākumpunktu, izdevīgi izmantot punktu $(0, 0)$!

Nevienādības $ax + by \geq c$ (vai $\leq c$) grafiskā atrisināšana

- Atliek taisni $ax + by = c$. Šī taisne sadala koordinātu plakni divās pusplaknēs:
  - vienā no pusplaknēm visi punkti (x, y) apmierina nevienādību $ax + by \geq c$,
  - otrā pusplaknē visi punkti (x, y) apmierina nevienādību $ax + by \leq c$.
  - Lai atrastu vajadzīgo pusplakni, izvēlas patvaļīgu punktu kādā no pusplaknēm un pārbauda, kura nevienādība izpildās.
  - ja taisne neiet caur koordinātu sākumpunktu, izdevīgi izmantot punktu $(0, 0)$!
- Speciālgadījumi:
  - $x \geq 0$ atrisinājums ir visa pusplakne, kas ir pa kreisi no taisnes Oy (ieskaitot šīs taisnes punktus);
  - $y \geq 0$ atrisinājums ir visa pusplakne, kas ir virs taisnes Ox (ieskaitot šīs taisnes punktus).

Piemērs

Grafiski atrisināt nevienādību $3x + 2y \leq 18$.

Risinājums:

Piemērs

Grafiski atrisināt nevienādību $3x + 2y \leq 18$.

Risinājums:

- Konstruē taisni $3x + 2y = 18$.

Piemērs

Grafiski atrisināt nevienādību $3x + 2y \leq 18$.

Risinājums:

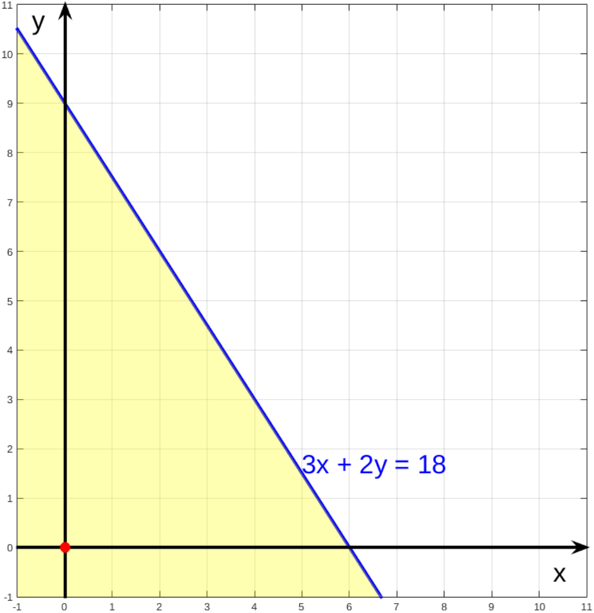
- Konstruē taisni $3x + 2y = 18$.
- Izvēlas punktu $(0, 0)$, kas nepieder šai taisnei.

Piemērs

Grafiski atrisināt nevienādību $3x + 2y \leq 18$.

Risinājums:

- Konstruē taisni $3x + 2y = 18$.
- Izvēlas punktu $(0, 0)$, kas nepieder šai taisnei.
- Tā kā $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 18$, tad vajadzīgā nevienādība izpildās tajā pusplaknē, kas **satur** šo punktu.


y
x
3x + 2y = 18
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

- Jākonstruē taisnes grafiks $-2x + y = -1$.
- Divas iespējas: atrast divus punktus uz taisnes vai arī konstruēt funkcijas $y = 2x - 1$ grafiku. Atradīsim divus taisnes punktus.

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

- Jākonstruē taisnes grafiks $-2x + y = -1$.
- Divas iespējas: atrast divus punktus uz taisnes vai arī konstruēt funkcijas $y = 2x - 1$ grafiku. Atradīsim divus taisnes punktus.
- Ja $x = 0$, tad $y = ?$. Taisne iet caur punktu $(0, ?)$.

Uzdevums

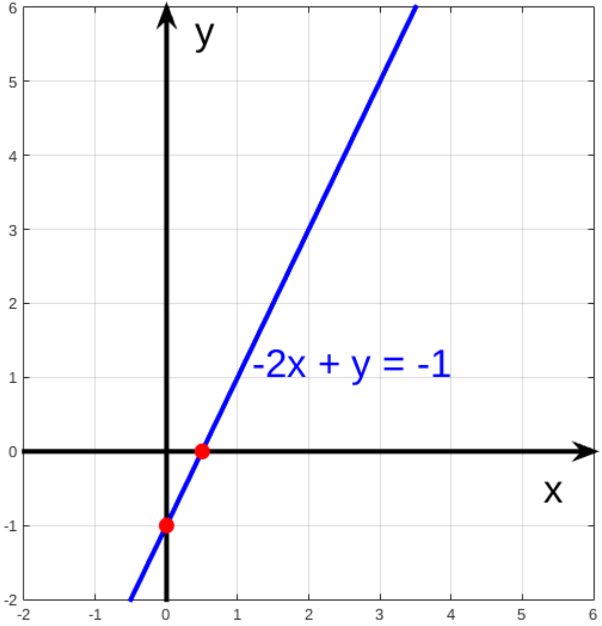
Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

- Jākonstruē taisnes grafiks $-2x + y = -1$.
- Divas iespējas: atrast divus punktus uz taisnes vai arī konstruēt funkcijas $y = 2x - 1$ grafiku. Atradīsim divus taisnes punktus.
- Ja $x = 0$, tad $y = -1$. Taisne iet caur punktu $(0, -1)$.
- Ja $y = 0$, tad $x = ?$. Taisne iet caur punktu $(?, 0)$. Novelk taisni caur abiem iegūtajiem punktiem.

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

- Jākonstruē taisnes grafiks $-2x + y = -1$.
- Divas iespējas: atrast divus punktus uz taisnes vai arī konstruēt funkcijas $y = 2x - 1$ grafiku. Atradīsim divus taisnes punktus.
- Ja $x = 0$, tad $y = -1$. Taisne iet caur punktu $(0, -1)$.
- Ja $y = 0$, tad $x = 0.5$. Taisne iet caur punktu $(0.5, 0)$. Novelk taisni caur abiem iegūtajiem punktiem.



y
x
-2x + y = -1
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

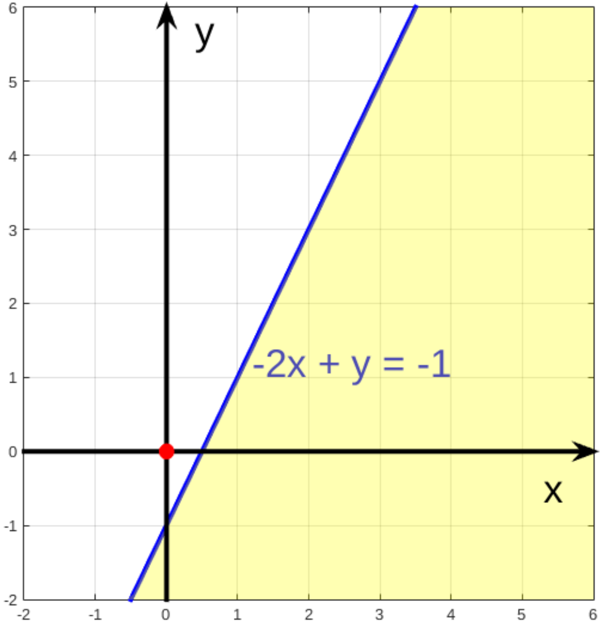
- Izvēlas punktu $(0, 0)$, kas nepieder šai taisnei.

Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

- Izvēlas punktu $(0, 0)$, kas nepieder šai taisnei.
- Tā kā $-2 \cdot 0 + 1 \cdot 0$? -1, tad vajadzīgā nevienādība izpildās tajā pusplaknē, kas satur / nesatur šo punktu.

Grafiski atrisināt nevienādību $-2x + y \leq -1$.

- Izvēlas punktu $(0, 0)$, kas nepieder šai taisnei.
- Tā kā $-2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 > -1$, tad vajadzīgā nevienādība izpildās tajā pusplaknē, kas **nesatur** šo punktu.


y
x
-2x + y = -1
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Lineāru nevienādību sistēmas grafiskā atrisināšana

- Konstruē koordinātu plakni xOy.

Lineāru nevienādību sistēmas grafiskā atrisināšana

- Konstruē koordinātu plakni xOy.
- Grafiski atrisina katru sistēmas nevienādību:
  - konstruē atbilstošo taisni;
  - iekrāso apgabalu, kur izpildās nevienādība.

Lineāru nevienādību sistēmas grafiskā atrisināšana

- Konstruē koordinātu plakni xOy.
- Grafiski atrisina katru sistēmas nevienādību:
  - konstruē atbilstošo taisni;
  - iekrāso apgabalu, kur izpildās nevienādība.
- Apgabals, kur izpildās visas dotās nevienādības, ir dotās sistēmas atrisinājumu kopa.

Lineāru nevienādību sistēmas grafiskā atrisināšana

- Konstruē koordinātu plakni xOy.
- Grafiski atrisina katru sistēmas nevienādību:
  - konstruē atbilstošo taisni;
  - iekrāso apgabalu, kur izpildās nevienādība.
- Apgabals, kur izpildās visas dotās nevienādības, ir dotās sistēmas atrisinājumu kopa.
- Speciālgadījums: sistēmas $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ atrisinājums ir koordinātu plaknes I kvadrants.

Grafiski atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

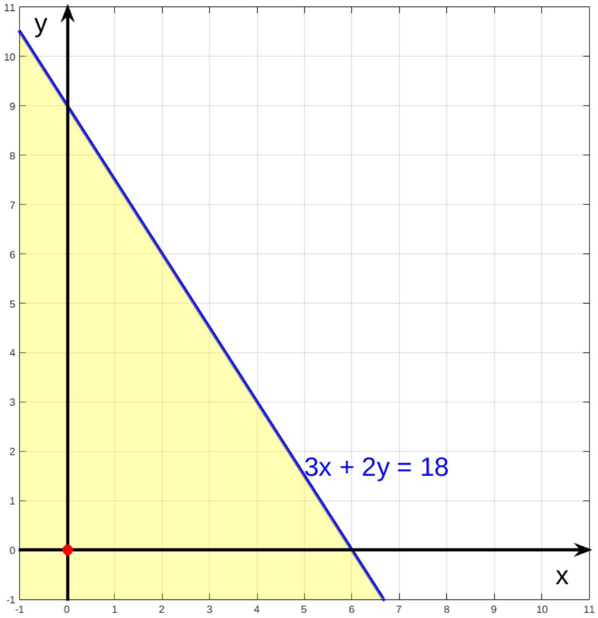
Risinājums:

Grafiski atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Risinājums:

- Konstruē taisni $3x + 2y = 18$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.

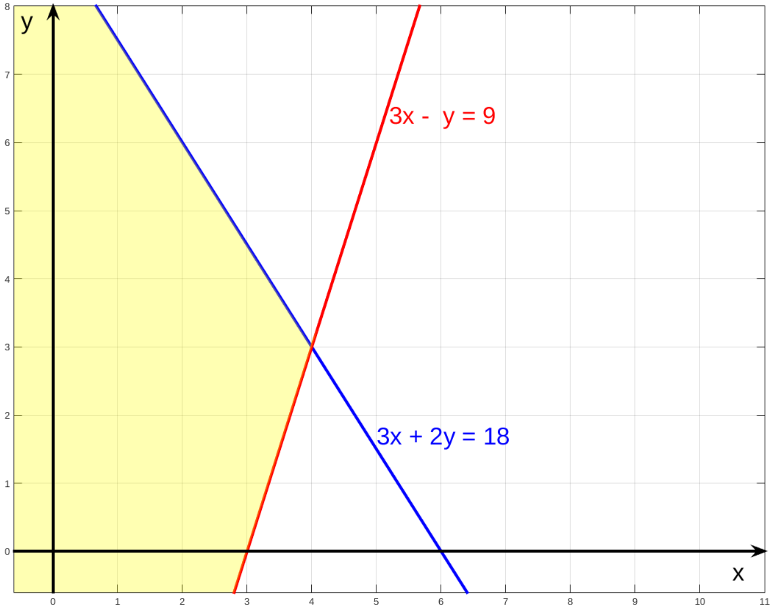

y
x
3x + 2y = 18
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Grafiski atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 18 \\ 3x - y \le 9 \\ -x + 2y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Risinājums:

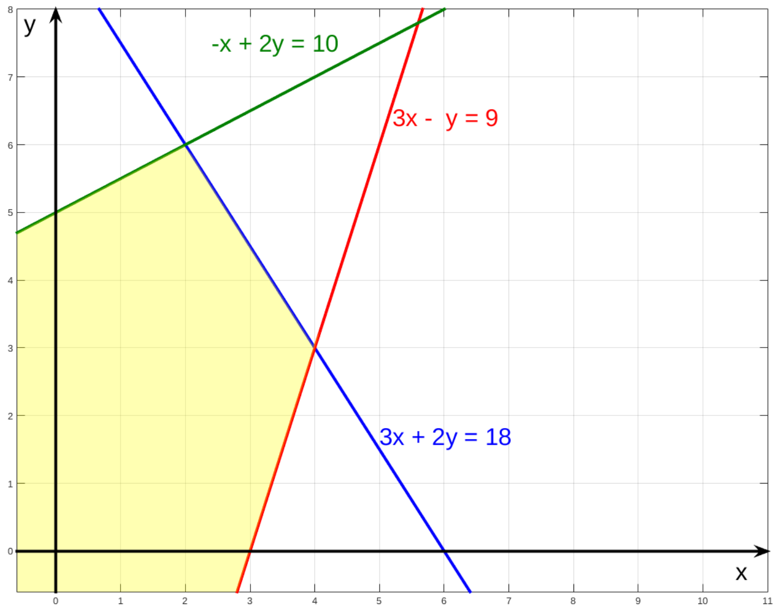
- Konstruē taisni $3x + 2y = 18$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Konstruē taisni $3x - y = 9$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Derīga tikai tā plaknes daļa, kas apmierina arī iepriekšējo nevienādību!


y
x
3x - y = 9
3x + 2y = 18
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Risinājums:

- Konstruē taisni $3x + 2y = 18$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Konstruē taisni $3x - y = 9$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Konstruē taisni $-x + 2y = 10$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Derīga tikai tā plaknes daļa, kas apmierina arī iepriekšējās nevienādības!

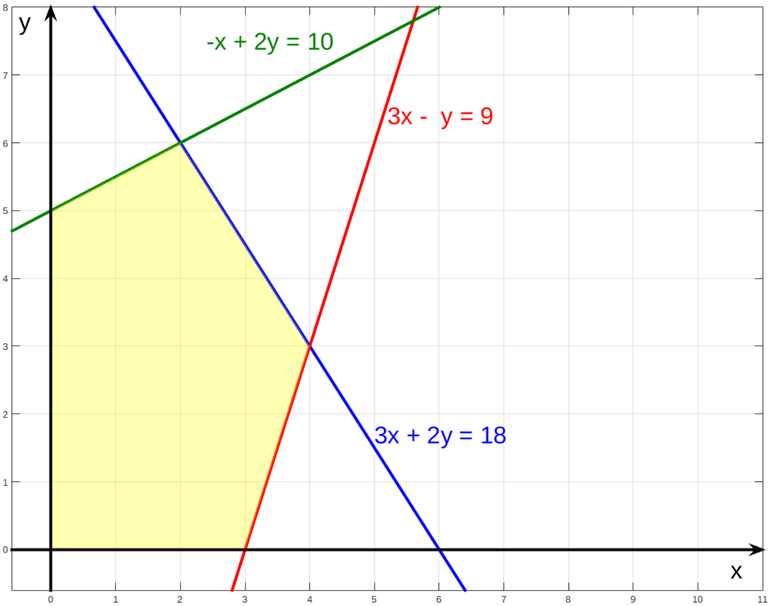


y
x
-x + 2y = 10
3x - y = 9
3x + 2y = 18
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Risinājums:

- Konstruē taisni $3x + 2y = 18$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Konstruē taisni $3x - y = 9$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Konstruē taisni $-x + 2y = 10$. Vajadzīgā nevienādība izpildās pusplaknē, kas **satur** punktu $(0, 0)$.
- Nosacījumi $x, y \geq 0$ nozīmē, ka der tikai punkti I kvadrantā!



y
x
-x + 2y = 10
3x - y = 9
3x + 2y = 18

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Konstruē taisni $x + y = 8$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, ?)$ un $(?, 0)$.

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

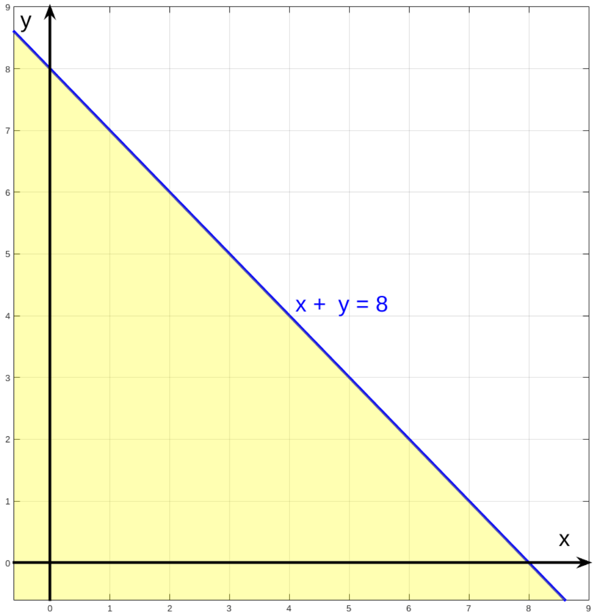
- Konstruē taisni $x + y = 8$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, 8)$ un $(8, 0)$.
- Koordinātu sākumpunkts $(0, 0)$ derīgajai pusplaknei pieder / nepieder?

Uzdevums

Grafiski atrisināt nevienādību sistēmu

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Konstruē taisni $x + y = 8$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, 8)$ un $(8, 0)$.
- Koordinātu sākumpunkts $(0, 0)$ derīgajai pusplaknei pieder.


y
x
x + y = 8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

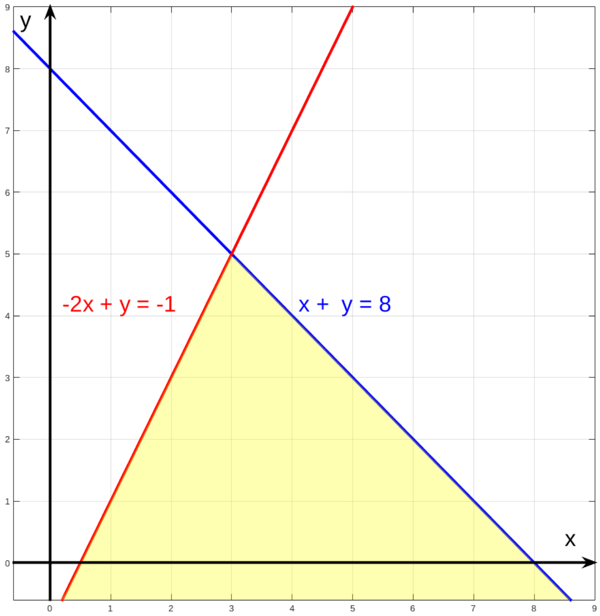
- Konstruē taisni $-2x + y = -1$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, ?)$ un $(?, 0)$.

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Konstruē taisni $-2x + y = -1$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, -1)$ un $(0.5, 0)$.
- Koordinātu sākumpunkts $(0, 0)$ derīgajai pusplaknei pieder / nepieder?

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Konstruē taisni $-2x + y = -1$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, -1)$ un $(0.5, 0)$.
- Koordinātu sākumpunkts $(0, 0)$ derīgajai pusplaknei nepieder.
- Derīga tikai tā plaknes daļa, kas apmierina arī iepriekšējo nevienādību!



y
x
-2x + y = -1
x + y = 8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

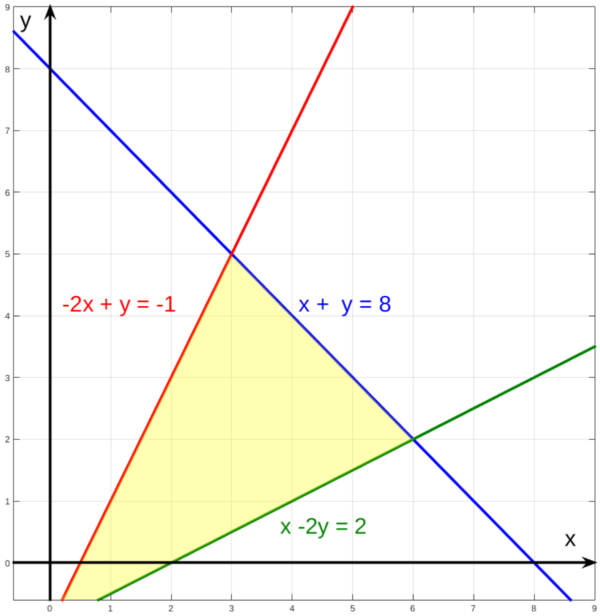
- Konstruē taisni $x - 2y = 2$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, ?)$ un $(?, 0)$.

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Konstruē taisni $x - 2y = 2$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, -1)$ un $(2, 0)$.
- Koordinātu sākumpunkts $(0, 0)$ derīgajai pusplaknei pieder / nepieder?

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

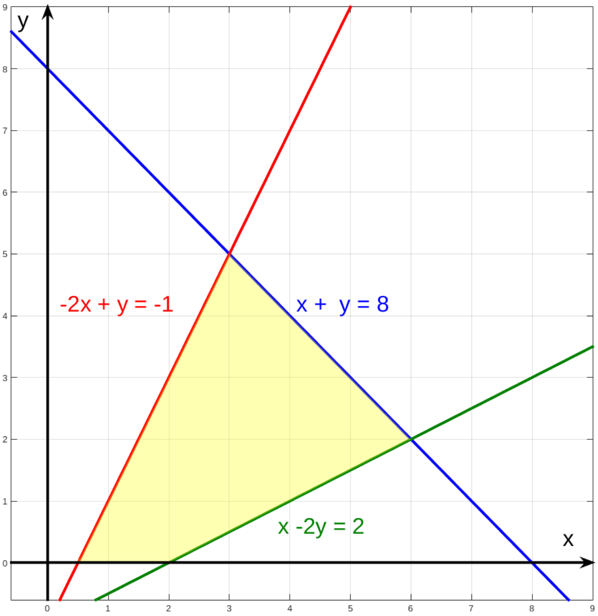
- Konstruē taisni $x - 2y = 2$.
- Taisne iet caur punktiem $(0, -1)$ un $(2, 0)$.
- Koordinātu sākumpunkts $(0, 0)$ derīgajai pusplaknei pieder.
- Derīga tikai tā plaknes daļa, kas apmierina arī iepriekšējās nevienādības!



y
x
-2x + y = -1
x + y = 8
x -2y = 2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -2x + y \leq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Nosacījumi $x, y \geq 0$ nozīmē, ka der tikai punkti I kvadrantā!



y
x
-2x + y = -1
x + y = 8
x -2y = 2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Mērķa funkcijas līmeņlīnijas

- Mērķa funkcija formā $f = c_1 x + c_2 y$

Katram fiksētam d par funkcijas f līmeņlīniju sauc visu tādu punktu (x, y) kopu, ka funkcijas vērtība šajā kopā ir d:

$$c_1 x + c_2 y = d.$$

- Plaknē xOy vienādība $c_1 x + c_2 y = d$ definē taisni, kura ir perpendikulāra vektoram (c_1, c_2).
- Ja $d = 0$, šī taisne iet caur koordinātu sākumpunktu.

Piemērs

Uzzīmēt funkcijas $f = x + 2y$ līmeņlīnijas $x + 2y = d$ pie šādām parametra d vērtībām:

$$d = 3;\ 9;\ 20$$

un attēlot xOy plaknē funkcijas koeficientu veidoto vektoru $(1; 2)$!

Piemērs

Uzzīmēt funkcijas $f = x + 2y$ līmeņlīnijas $x + 2y = d$ pie šādām parametra d vērtībām:

$$d = 3;\; 9;\; 20$$

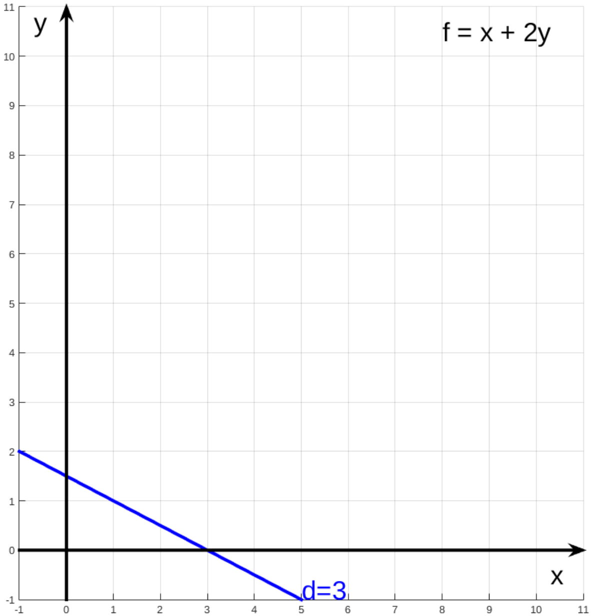
un attēlot xOy plaknē funkcijas koeficientu veidoto vektoru $(1; 2)$!

Risinājums.

- Parametra vērtībai $d = 3$ atbilst taisne

$$x + 2y = 3.$$

- Taisne iet caur punktiem $(0, 1.5)$ un $(3, 0)$.



f = x + 2y
y
x
d=3

Uzzīmēt funkcijas $f = x + 2y$ līmeņlīnijas $x + 2y = d$ pie šādām parametra d vērtībām:

$$d = 3;\ 9;\ 20$$

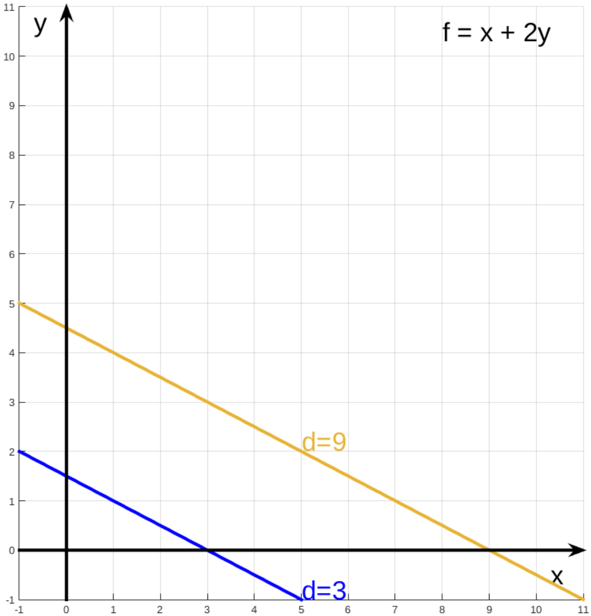
un attēlot xOy plaknē funkcijas koeficientu veidoto vektoru $(1; 2)$!

Risinājums.

- Parametra vērtībai $d = 9$ atbilst taisne

$$x + 2y = 9.$$

- Taisne iet caur punktiem $(0, 4.5)$ un $(9, 0)$.



f = x + 2y
y
x
d=9
d=3
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

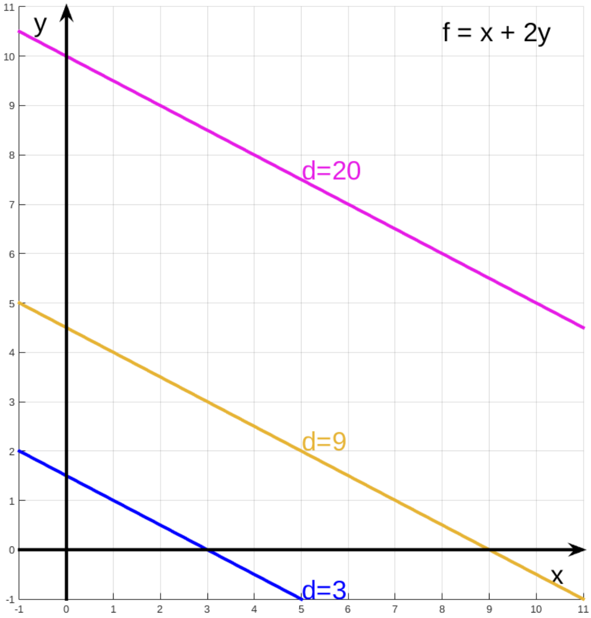
Uzzīmēt funkcijas $f = x + 2y$ līmeņlīnijas $x + 2y = d$ pie šādām parametra d vērtībām:

$$d = 3;\ 9;\ 20$$

un attēlot xOy plaknē funkcijas koeficientu veidoto vektoru $(1; 2)$!

Risinājums.

- Parametra vērtībai $d = 20$ atbilst taisne
$$x + 2y = 20.$$
- Taisne iet caur punktiem $(0, 10)$ un $(6, 7)$.



f = x + 2y
d=20
d=9
d=3
y
x
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

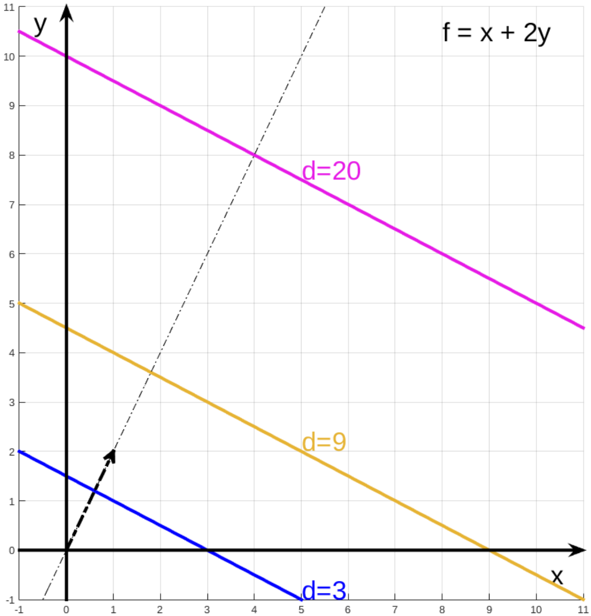
Uzzīmēt funkcijas $f = x + 2y$ līmeņlīnijas $x + 2y = d$ pie šādām parametra d vērtībām:

$$d = 3;\ 9;\ 20$$

un attēlot xOy plaknē funkcijas koeficientu veidoto vektoru $(1; 2)$!

Risinājums.

- Attēlo plaknē vektoru $(1, 2)$ (vektors savieno koordinātu sākumpunktu ar punktu $(1, 2)$).
- Uzskatāmības labad iezīmēta arī taisne, kas satur šo vektoru.


f = x + 2y
y
x
d=20
d=9
d=3
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Parametra d pieaugums atbilst taisnes $c_1 x + c_2 y = d$ paralēlajai pārnesei vektora (c_1, c_2) virzienā!

LPU grafiskās atrisināšanas algoritms

Dots LPU ar diviem mainīgajiem:

$$f = c_1 x + c_2 y \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \leq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x + a_{m2}y \leq b_m \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases}$$

Grafiskās atrisināšanas algoritms:

1. Konstruē koordinātu plakni xOy.
2. Atrisina atbilstošo nevienādību sistēmu, iezīmē tās atrisinājumu kopu (plānu kopu);
3. Uzzīmē mērķa funkcijas $f = c_1x + c_2y$ līmeņlīnijas $c_1x + c_2y = d$ dažādām parametra d vērtībām.
4. Mainot parametra d vērtību, noskaidro, kurā no plānu kopas virsotnēm mērķa funkcija sasniedz optimālo vērtību.

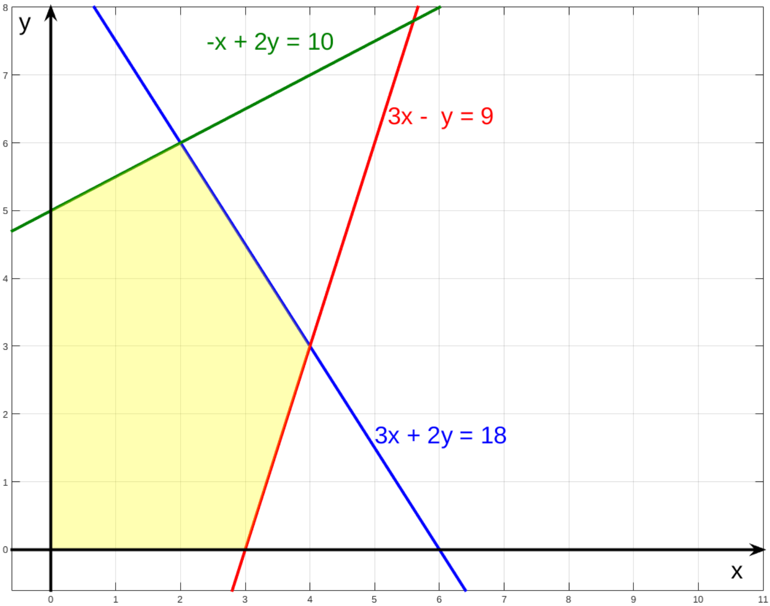
Piemērs

Atrisināt grafiski LPU:

$$f = x + 2y \to \max$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Atrodam nevienādību sistēmas atrisinājumu (plānu kopu).

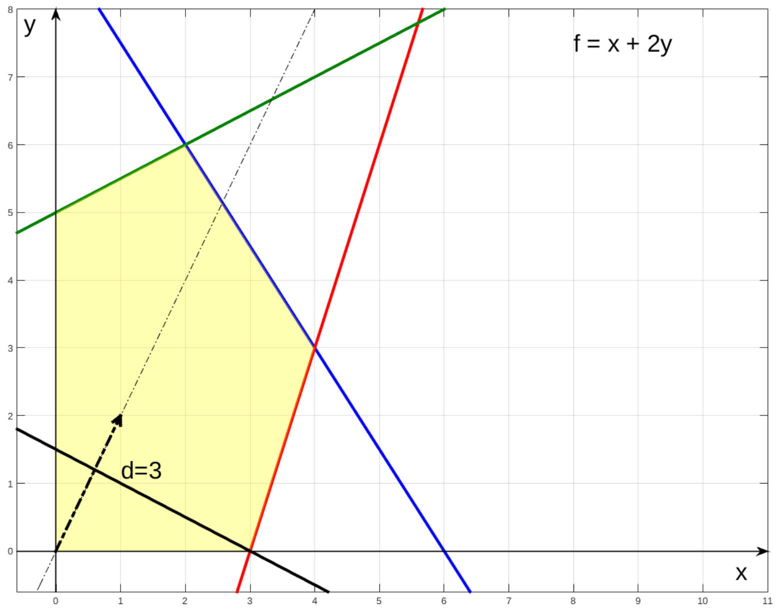


y
x
-x + 2y = 10
3x - y = 9
3x + 2y = 18
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

$$f = x + 2y \to \max$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Attēlo funkcijai $f = x + 2y$ atbilstošo vektoru $(1, 2)$ un kādu šīs funkcijas līmeņlīniju, piemēram, $x + 2y = 3$.

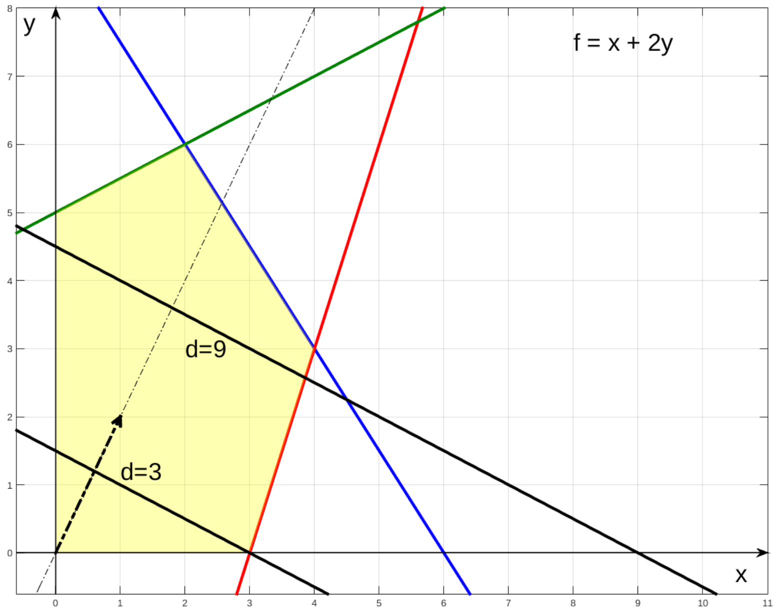


y
x
f = x + 2y
d=3

$$f = x + 2y \to \max$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 18 \\ 3x - y \le 9 \\ -x + 2y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

- Funkcijas vērtība palielinās, pārnesot līmeņlīniju vektora $(1, 2)$ virzienā.
- Pārbaudām ar, piemēram, līmeņlīniju $x + 2y = 9$:

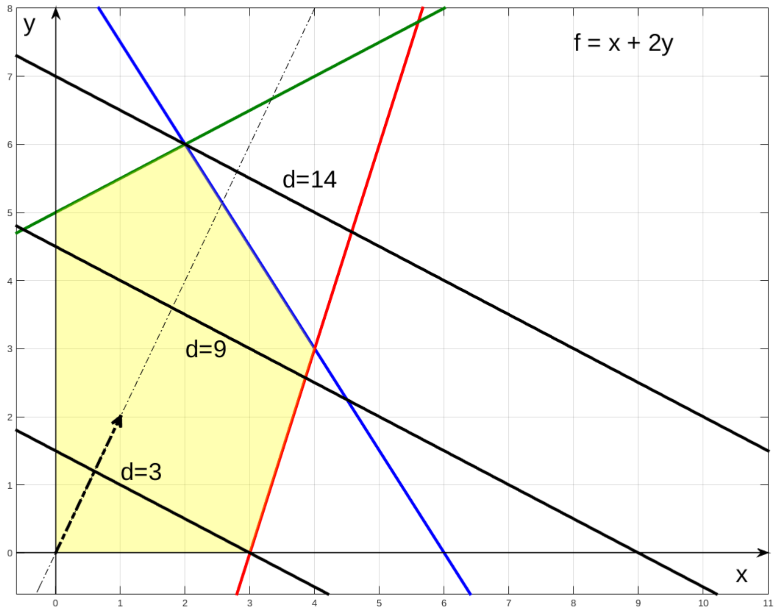


f = x + 2y
y
x
d=9
d=3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

$$f = x + 2y \to \max$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Līmeņlīnija, kas atrodas vistālāk vektora $(1,2)$ virzienā un vienlaikus šķeļas ar plānu kopu, atbilst parametra d vērtībai $d = 14$ un iet caur punktu $(2;6)$:

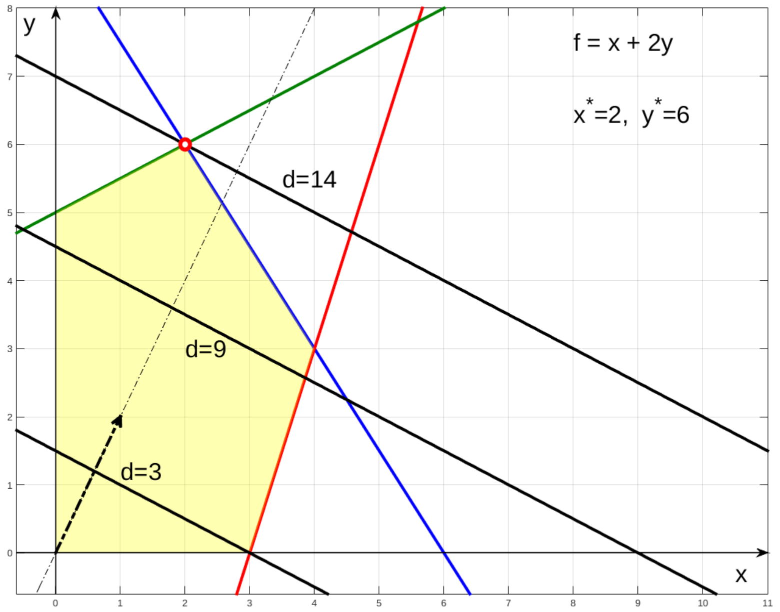


f = x + 2y
d=14
d=9
d=3
y
x

$$f = x + 2y \to \max$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 18 \\ 3x - y \leq 9 \\ -x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Secinām, ka punktā $(2, 6)$ funkcijas vērtība pieņem maksimālo vērtību plānu kopā, t.i.,
- $(x^*, y^*) = (2, 6)$ ir optimālais plāns un $f_{\max} = 14$.
- Ja tiktu prasīts **minimizēt** funkciju, tad vajadzētu funkcijas līmeņlīnijas pārnest **pretēji** vektoram $(1, 2)$.



f = x + 2y
x* =2, y* =6
d=14
d=9
d=3
y
x

Paldies par uzmanību!