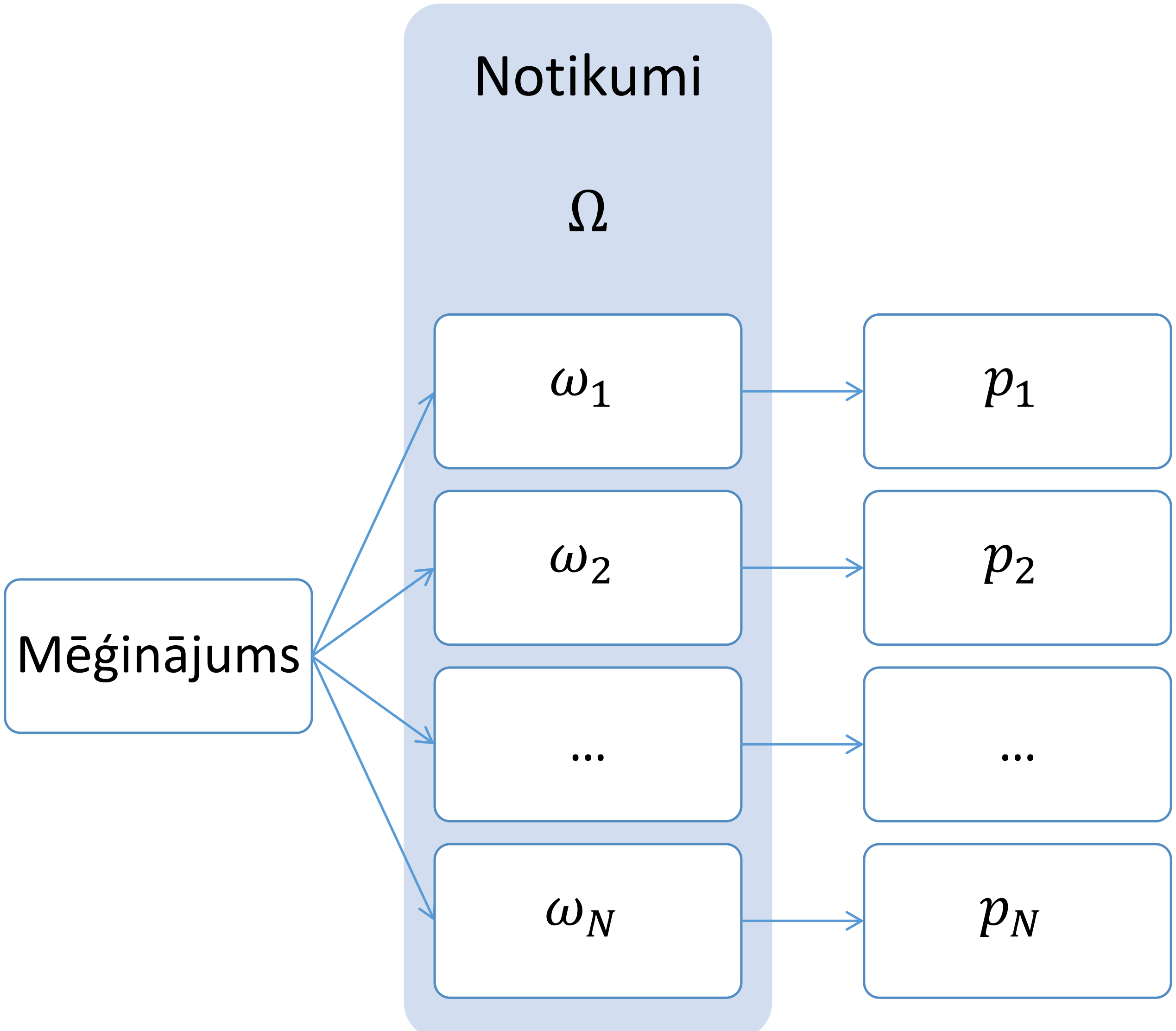
Klasiskā varbūtību teorija

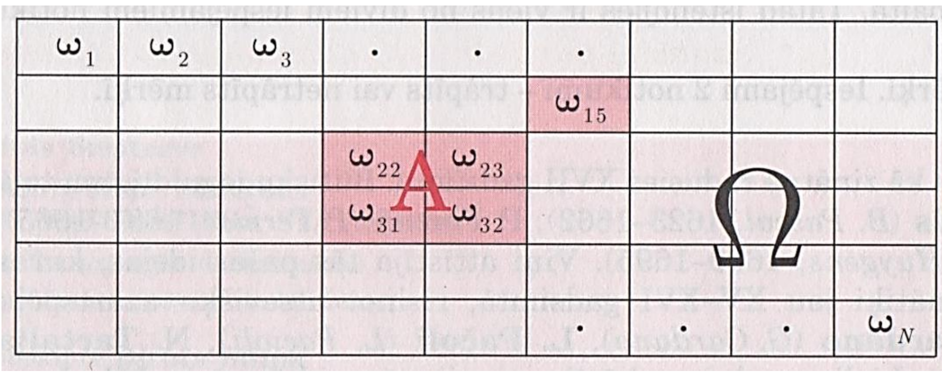
LU FMF lektors

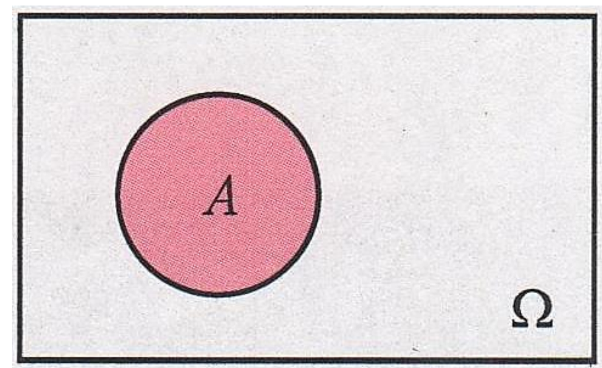
Jānis Smotrovs



Notikumi
Ω
Mēģinājums
ω_1
ω_2
...
ω_N
p_1
p_2
...
p_N

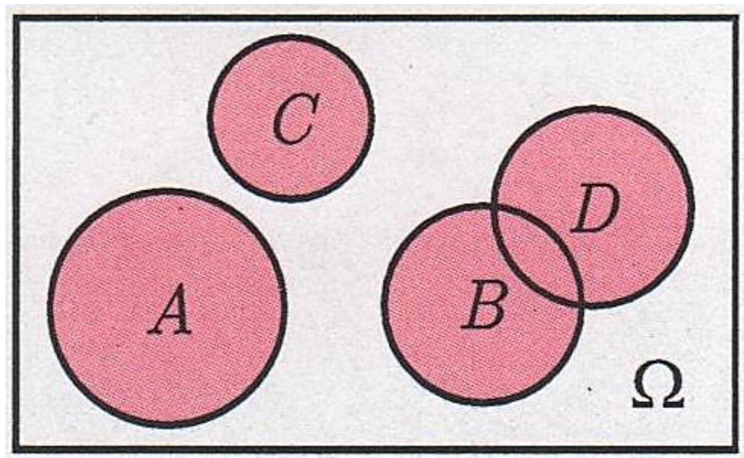
Elementāro notikumu telpa Ω

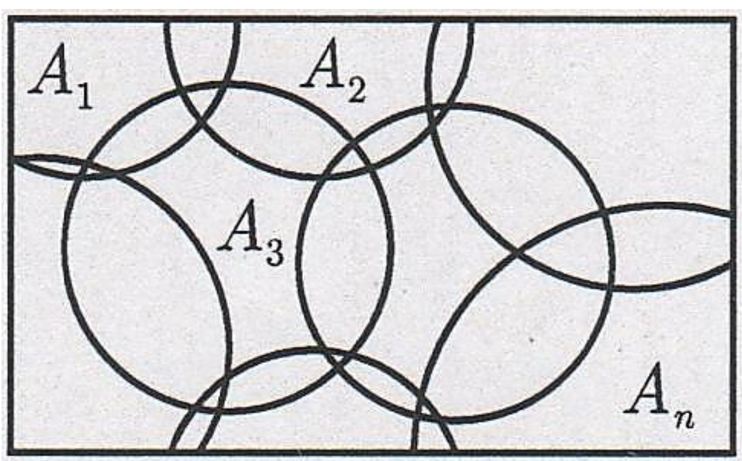


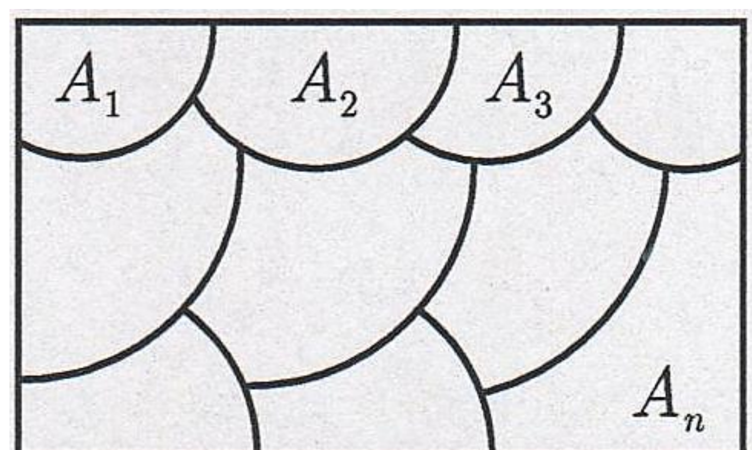


Pavisam $(2^N - 1)$ dažādi salikti notikumi
Pievienojam vēl neiespējamo notikumu ∅

Nesavienojami un savienojami notikumi



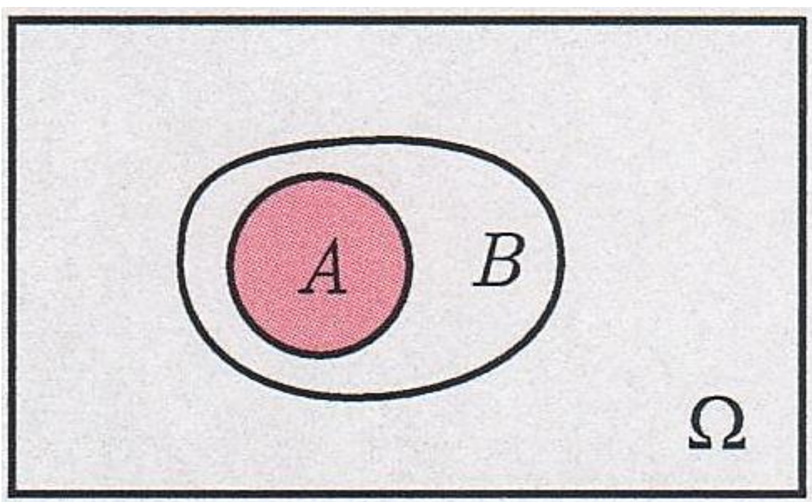




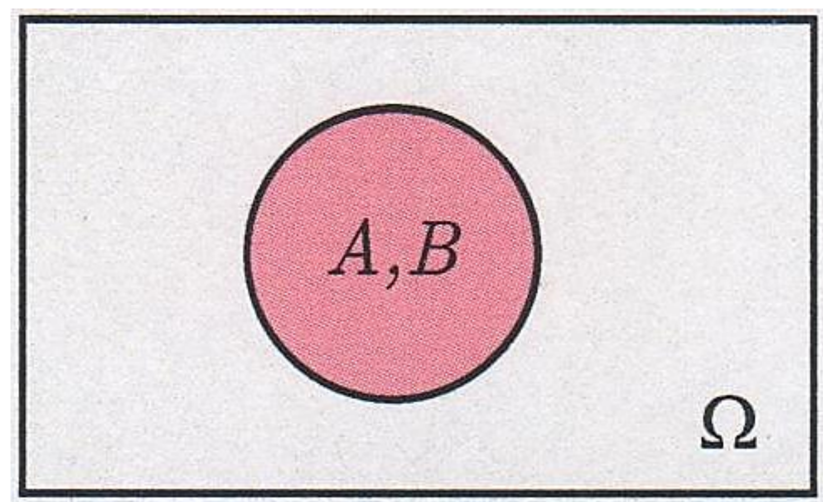
Notikumu algebra

Notikums A ir labvēlīgs notikumam B

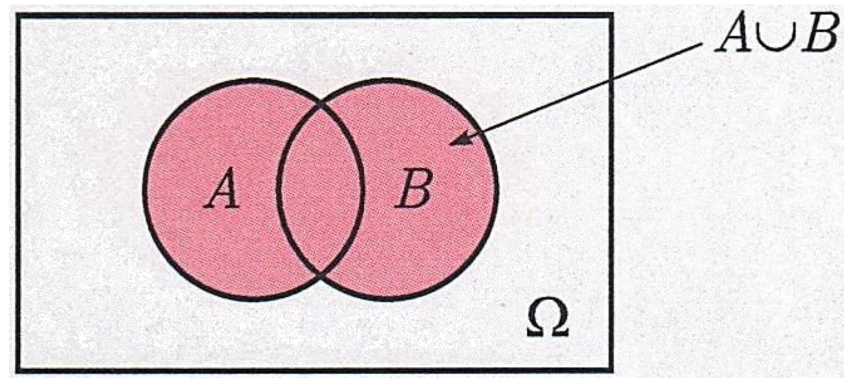
$A \subset B$ jeb $B \supset A$



Vienādi notikumi $A = B$



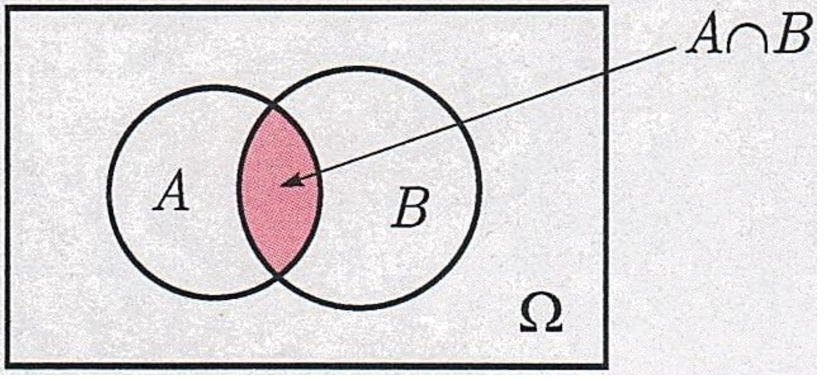
Notikumu apvienojums



Īpašības:

1. $A \cup B \subset \Omega$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cup \Omega = \Omega$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Notikumu šķēlums



Īpašības:

1. $A \cap B \subset \Omega$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

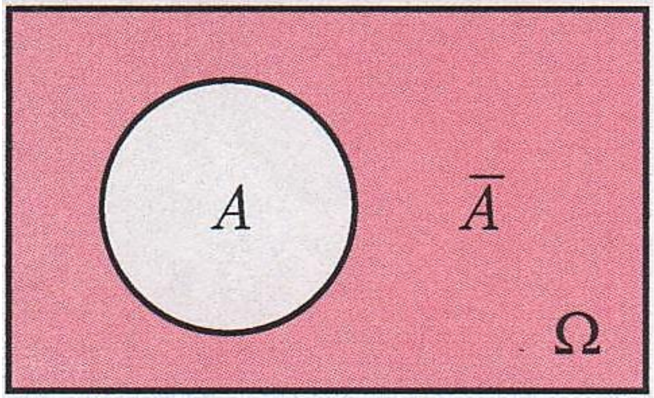
Iekavu atvēršana

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

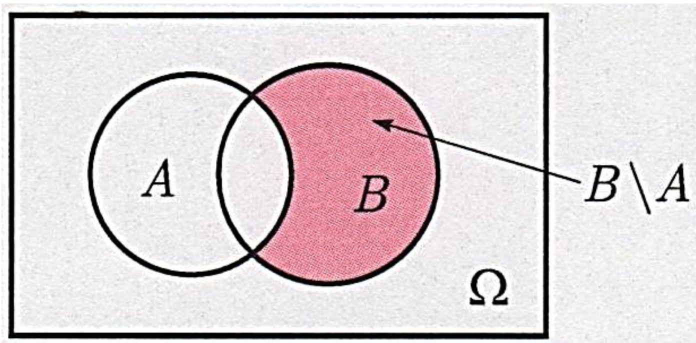
Pretējais notikums

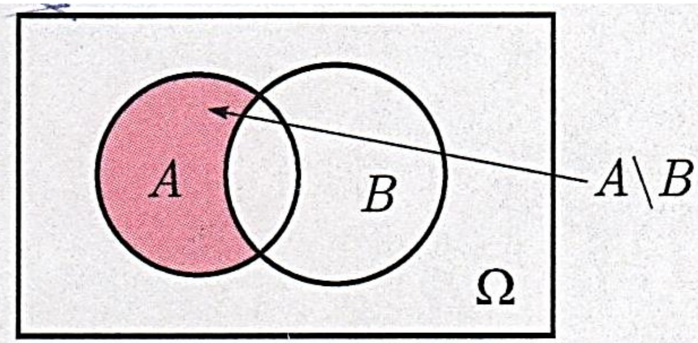
Īpašības:

1. $A \cap \bar{A} = \emptyset$
2. $A \cup \bar{A} = \Omega$



Notikumu starpība

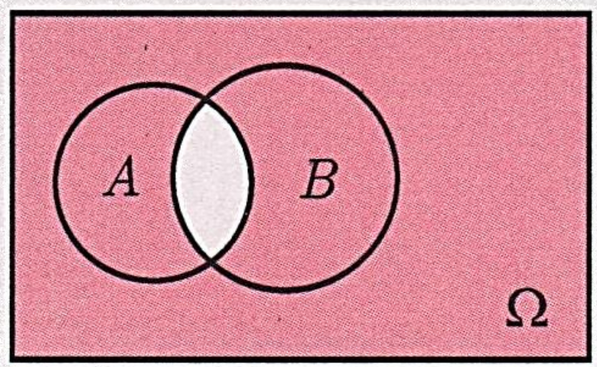




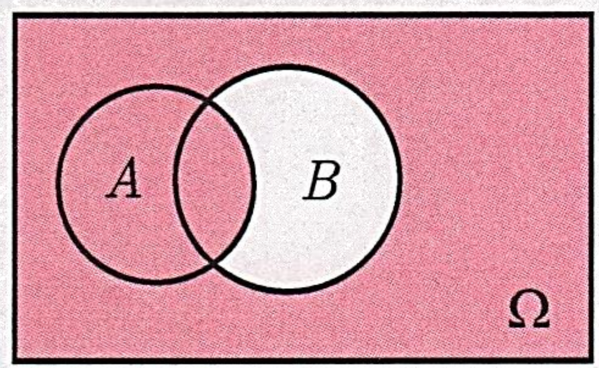
$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

Piemērs

Izsaki saliktos notikumus!



$$\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega \backslash (A \cap B)$$



$$A \cup \bar{B}$$

Piemērs

No 52 spēļu kāršu kavas tiek izvilkta viena kārts.

A – «izvilkts ercens»

B – «izvilkts dūzis»

$A \bigcup B$ – «izvilkts ercens vai dūzis»

$A \bigcap B$ – «izvilkts ercena dūzis»

$\overline{A} \bigcap B$ – «izvilkts vai nu kreiča, vai kārava, vai pīķa dūzis»

$\overline{A} \bigcap \overline{B}$ – «nav izvilkts ne ercens, ne dūzis»

$A \setminus B$ – «izvilkts ercens, kas nav dūzis»

Piemērs

A, B, C – patvaļīgi notikumi telpā Ω.

Uzrakstīt notikumus:

1) «No šiem notikumiem iestājas tikai A»

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

2) «Īstenojas divi un tikai divi no tiem»

$$\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$$

Varbūtības

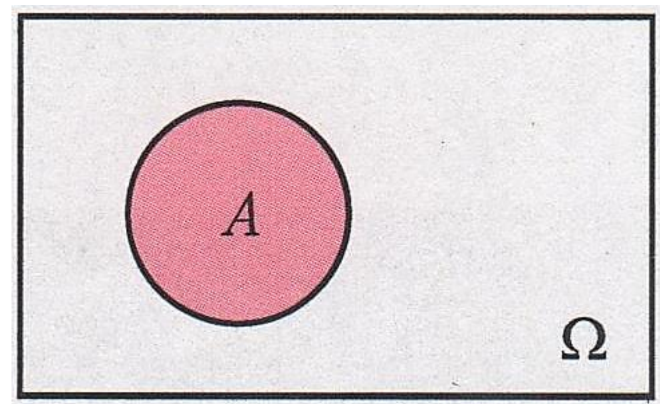
Klasiskā varbūtība

Visi iznākumi ir vienlīdz iespējami!

M – labvēlīgo iznākumu skaits

N – visu iznākumu skaits

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

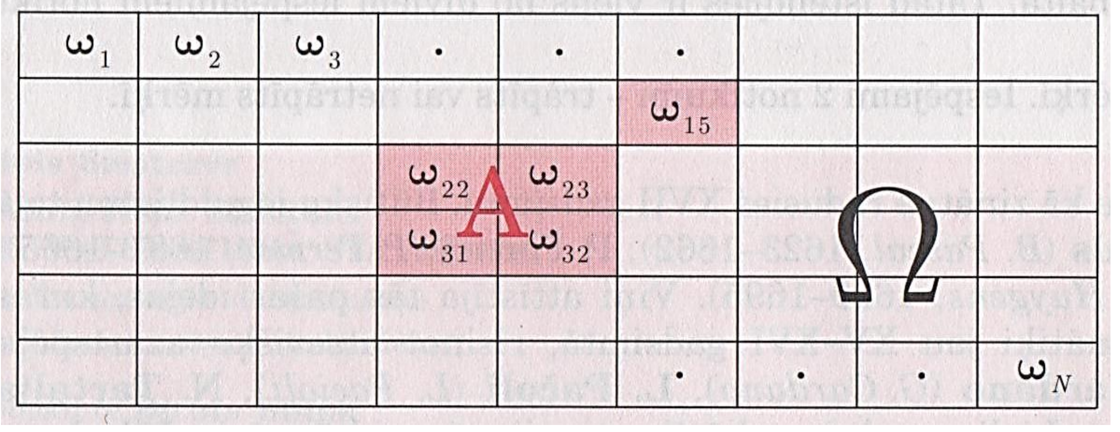


Aksiomātiskā varbūtība

A1 Visiem $\omega_i \in \Omega: \; 0 \le P(\omega_i) \le 1, \; i = 1, 2, \ldots, N$

A2 $\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$

A3 $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$, visiem $A \subset \Omega, \; P(\varnothing) = 0$



Apzīmējumi

Ja ir doti *n* notikumi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$,

tad visu šo notikumu **apvienojums** ir

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

bet **šķēlums** $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$

<u>Līdzīgi kā skaitļiem</u>

Summa: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Reizinājums: $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$

Piemērs

Met 2 simetriskus spēļu kauliņus. Mēģinājuma iznākumi ir uzkritušo punktu summa.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Piemērs

Met 2 simetriskus spēļu kauliņus. Mēģinājuma iznākumi ir uzkritušo punktu summa.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Cik ir vienlīdz iespējamo notikumu?

Cik ir elementāro notikumu? Kādi tie ir?

Elementārie notikumi (11)	Varbūtības $p_i = P(\omega_i)$
ω_1 – «uzkrīt 2 punkti»	
ω_2 – «uzkrīt 3 punkti»	
ω_3 – «uzkrīt 4 punkti»	
ω_4 – «uzkrīt 5 punkti»	
ω_5 – «uzkrīt 6 punkti»	
ω_6 – «uzkrīt 7 punkti»	
ω_7 – «uzkrīt 8 punkti»	
ω_8 – «uzkrīt 9 punkti»	
ω_9 – «uzkrīt 10 punkti»	
ω_{10} – «uzkrīt 11 punkti»	
ω_{11} – «uzkrīt 12 punkti»	

Elementārie notikumi (11)	Varbūtības $p_i = P(\omega_i)$
ω_1 – «uzkrīt 2 punkti»	$p_1 = 1/36$
ω_2 – «uzkrīt 3 punkti»	$p_2 = 2/36$
ω_3 – «uzkrīt 4 punkti»	$p_3 = 3/36$
ω_4 – «uzkrīt 5 punkti»	$p_4 = 4/36$
ω_5 – «uzkrīt 6 punkti»	$p_5 = 5/36$
ω_6 – «uzkrīt 7 punkti»	$p_6 = 6/36$
ω_7 – «uzkrīt 8 punkti»	$p_7 = 5/36$
ω_8 – «uzkrīt 9 punkti»	$p_8 = 4/36$
ω_9 – «uzkrīt 10 punkti»	$p_9 = 3/36$
ω_{10} – «uzkrīt 11 punkti»	$p_{10} = 2/36$
ω_{11} – «uzkrīt 12 punkti»	$p_{11} = 1/36$

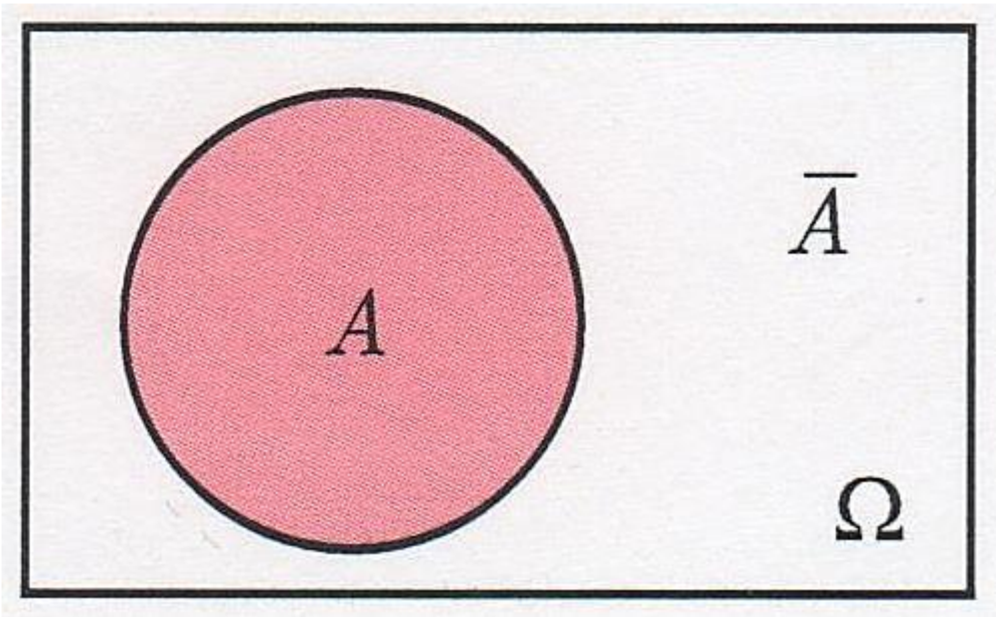
1. Kāda ir varbūtība notikumam *A* – «uzkritušo punktu summa dalās ar 5»?

$$P(A) = P(\omega_4) + P(\omega_9) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$$

Pamatteorēmas

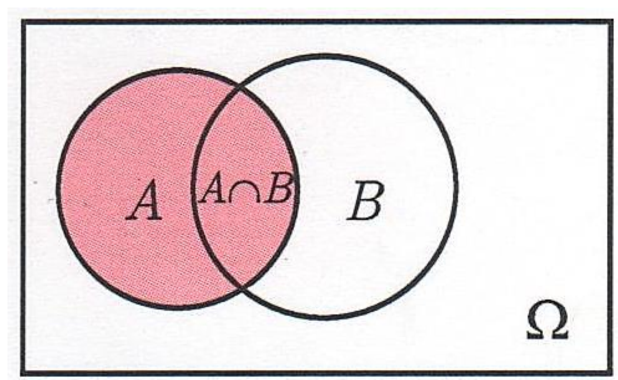
1. teorēma

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



2. teorēma

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$



Sekas:

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2) $P(A \cap B) = 0$ (notikumi ir nesavienojami)
   $\Rightarrow\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

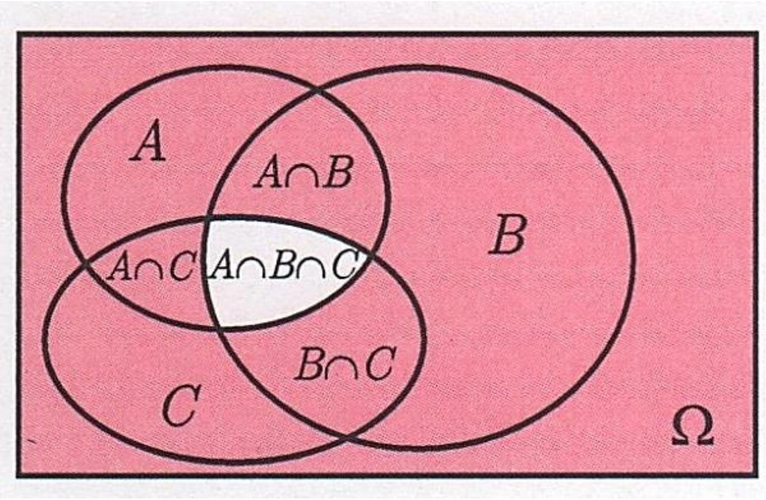
Vispārinājums:

$$P(A \cup B \cup C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) -$$

$$-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$

$$+P(A \cap B \cap C)$$



Piemērs

Uz kastītēm uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 100, uz labu laimi izvēlas vienu kastīti. Kāda ir varbūtība tam, ka skaitlis uz kastītes nedalās ne ar 2, ne ar 5 un ne ar 7?

Vieglāk ir atrast pretējā notikuma varbūtību:

A – "skaitlis nedalās ar 2, 5 vai 7"

$\bar{A}$ – "skaitlis dalās ar 2, 5 vai 7"

Atradīsim to skaitļu skaitu, kas dalās ar kādu no šiem skaitļiem.

$$n_2 = \left[\frac{100}{2}\right] = 50$$

$$n_5 = \left[\frac{100}{5}\right] = 20$$

$$n_7 = \left[\frac{100}{7}\right] = 14$$

$$n_{2;5} = \left[\frac{100}{2\cdot 5}\right] = 10$$

$$n_{2;7} = \left[\frac{100}{2\cdot 7}\right] = 7$$

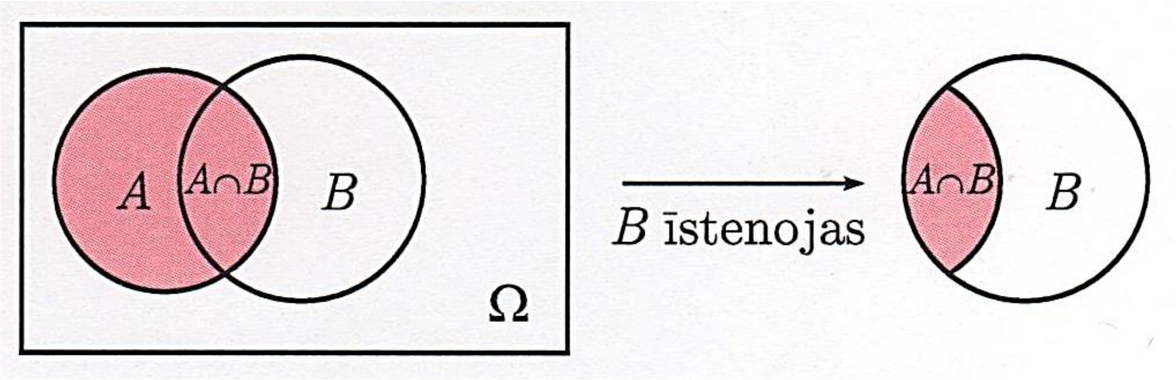
$$n_{5;7} = \left[\frac{100}{5\cdot 7}\right] = 2$$

$$n_{2;5;7} = \left[\frac{100}{2\cdot 5\cdot 7}\right] = 1$$

$$P(\bar{A}) = \frac{M}{N} = \frac{50+20+14-10-7-2+1}{100} = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{17}{50}$$

Nosacītā varbūtība



N iznākumi

M_A ir labvēlīgi A

M_B ir labvēlīgi B

$M_{A\cap B}$ ir labvēlīgi $A \cap B$

$$P(A|B) = \frac{M_{A\cap B}}{M_B} = \frac{\frac{M_{A\cap B}}{N}}{\frac{M_B}{N}} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)}{P(B)}$$

3. teorēma
(Varbūtību reizināšanas teorēma)

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Vispārinājums

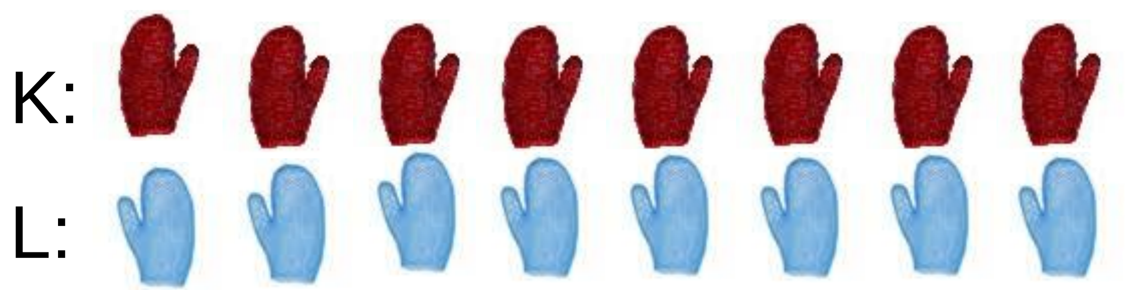
Doti n notikumi $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot P\left(A_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

Piemērs

Uz galda atrodas 8 pāri cimdu, kopā 16 cimdi. Pie galda pēc kārtas pienāk 8 bērni un uz labu laimi izvēlas 2 cimdus. Kāda ir varbūtība tam, ka katram bērnam būs cimdu pāris?



A_k – «k-tais bērns paņem cimdu pāri», $k = 1,2, \ldots 8$

B – «Visi bērni ir paņēmuši cimdu pāri»

$$B = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_8$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P\left(A_8 \mid \bigcap_{k=1}^{7} A_k\right) =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{384}{19305} \approx 0{,}02$$

Paldies par uzmanību!