Kādas tēmas piemērotas skolēniem zinātniski pētnieciskajā darbā?

Andrejs Cibulis
cibulis@lanet.lv
Rīga, 7.3.2015.

Kur meklēt informāciju?

Internets: **http://visc.gov.lv** **www.mathpuzzle.com**

http://www.atlants.lv/

Reklamējas, ka ir tūkstošiem ZPD.
Ielikts **J. Vihrova** darbs **Taisnstūri no divu veidu heksamino**, Rīga, 2009. /Piecas *****/

I. Balode, E. Petrova, Trīs krāsu problēma, 2009, Cēsis.

Jautāt, rakstīt tiem, kas varētu zināt, kam ir iepriekšēja pieredze...

MMU

Publikācijas

Iepriekšējo gadu ZPD

Semināri

Matemātikā nepastāv tāda autoritāšu hierarhija kā, piemēram, reliģijā, politikā.

А. Б. Скопенков,

Размышления об исследовательских задачах для школьников,

Полный обновляемый текст находится по адресу:

www.mccme.ru/circles/oim/issl.pdf

Virkņu enciklopēdija (kopš 1964) **OEIS** (**https://oeis.org**).

THE JOHN RIORDAN PRIZE

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
invites you to solve an open problem in an entry in the OEIS.

Der zināt:

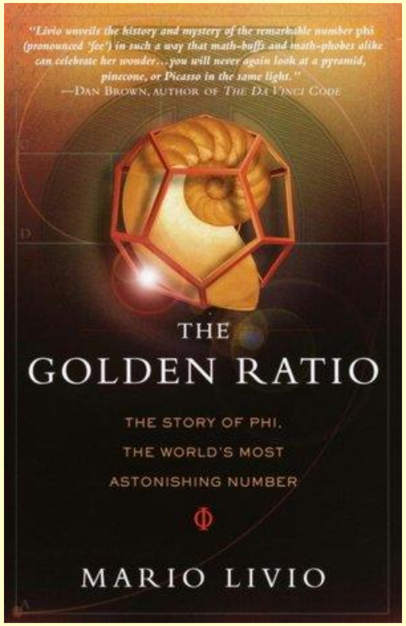
It is much easier to obtain a new result in an unexplored domain.

The most important thing that a student should learn from his supervisor is that some *question is still open*.”

/V. Arnolds/

Nodrāztas tēmas

Zelta griezums, Fibonači skaitļi, fraktāļi, Pitagora teorēma



Vai ZPD ir kas tāds, kā nav literatūrā?

2014. gada ZPD tēmas

Algebriskās struktūras

Bezgalīga rūtiņu lapa un riņķa līnija

Telpiskas matricas

Matemātiski par vienu diegu grafikas metodi

Simetrisku 15-heksu veidošana no pentaheksiem

Kādas taišņu saimes īpašības

Galda spēles „PHARAOH CODE” analīze.

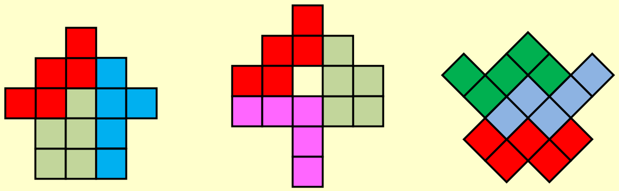
Polimino dzīvotspējas problēma

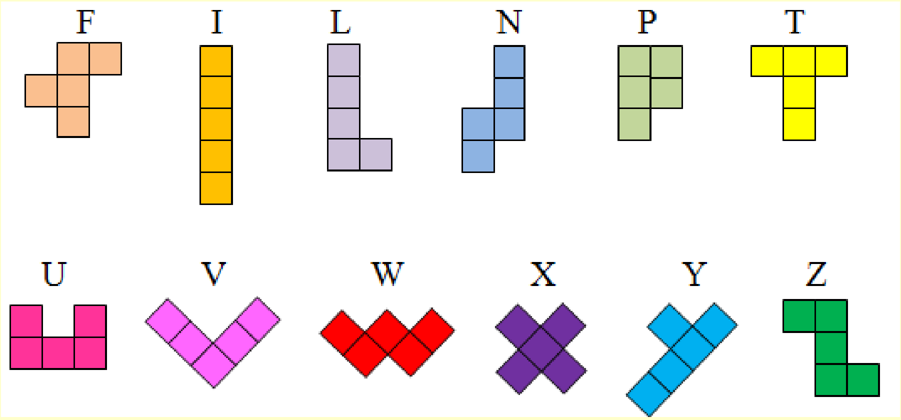
Heksamondu dvīnītes

2014. gada ZPD tēmas

A. Varkale, No pentamino saliekami simetriski 15-mino, 2014.
19 + P4, Bibl. 11, Bauskas ģimnāzija, 11. kl.

Pavisam ir **155** s-trijnieki.

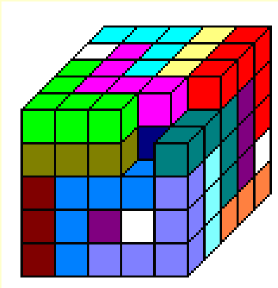




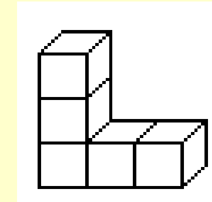
Salikt simetrisku figūru no FNU -
Viena no grūtāk realizējamām kombinācijām.

Diāna Jakovļeva, Taisnstūru blīvākie T-pakojumi,
Ezernieku vidusskola, 12. kl., 19 + P3, Bibl.7

Aleksejs Zajakins, Taisnstūru pārklāšana ar T-tetramino,
22 + P12, Bibl. 6, Rīgas 89. vidusskola, 11. kl.



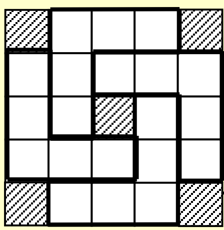
Blīvākā pakošana



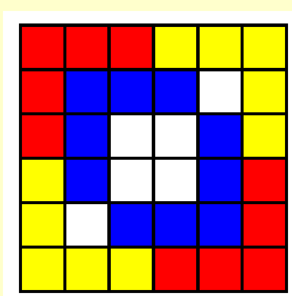
Apmaiņas spēle -27V

Matemātiskais saturs. Ar **V(*n*)** apzīmē **maksimālo** V-pentamino skaitu, kādu var izvietot **kvadrātā** $n \times n$.
Vispārīgā gadījumā skaitļu V(*n*) noteikšanas problēma nav atrisināta.

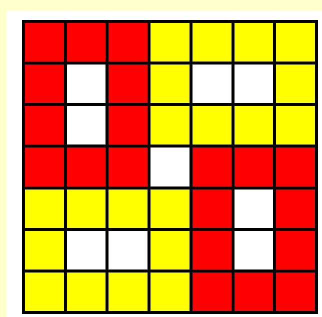
1, 2, 4, 6, 8, 12, 14, 18,



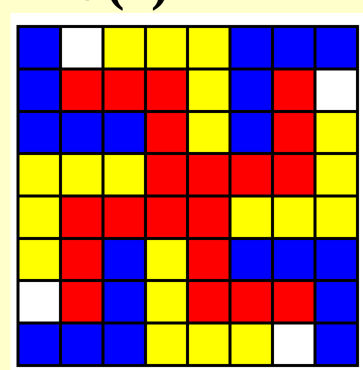
V(6) = 6

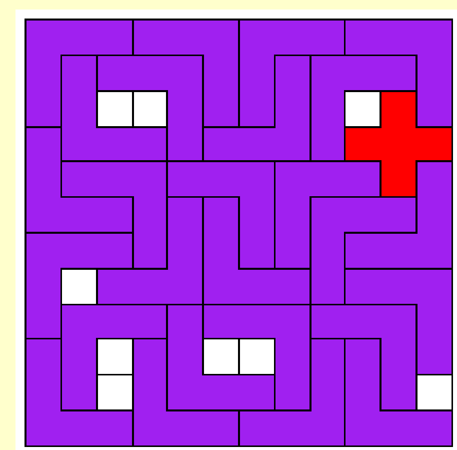


V(7) = 8



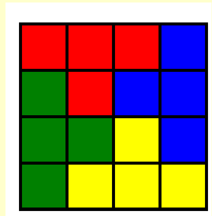
V(8) = 12



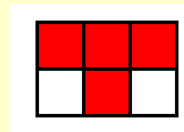


J. Čerņenoks

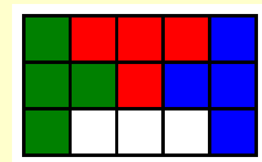
T-tetramino blīvākā pakošana



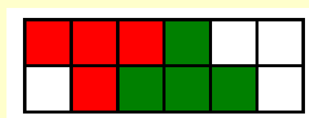
0



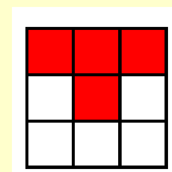
2



3



4

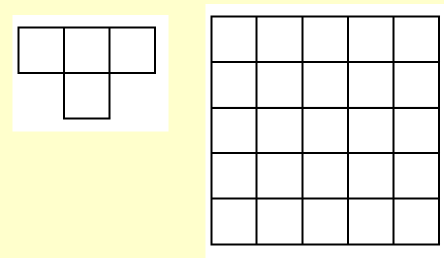


5

Problēma. **Vai kāda taisnstūra blīvākais pakojums var saturēt tikai vienu nepārklātu kvadrātu?**

Daži olimpiāžu uzdevumi un to vispārinājumi

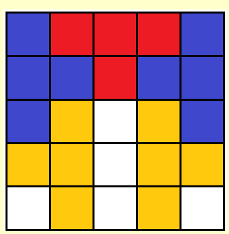
„Kāds ir lielākais T-veida figūru skaits (skat. 4.6. att.), kuras var ievietot rūtiņu kvadrātā 5 x 5? Figūras nedrīkst pārklāties; tās drīkst būt pagrieztas arī citādi, bet to malām jāiet pa kvadrāta rūtiņu malām.”



4.6. att.

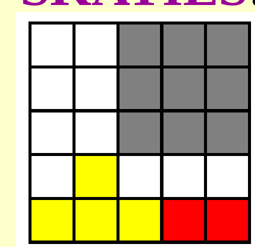
[PCK, 2010./2011. m.g.], [ABKZ, 2012] Risinājums – variantu pārlase.

Atbilde 5.



Nav iespējams izvietot sešus T.

SKATIES!



Uzdevuma vispārinājums uz kvadrātiem $n \times n$ jau izpētīts.

Diānas Jakovļevas ZPD prezentācija

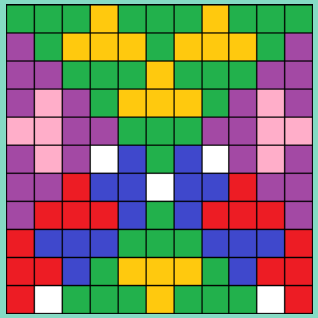
Komentāri

Būt lietas kursā, ko ir izdarījuši citi.

Interesēties par jaunumiem,
vai apskatāmo tēmu nav jau izpētījuši citi autori.

Labas, pievilcīgas tēmas parasti pēta arī citi

Taisnstūru blīvākie T-pakojumi

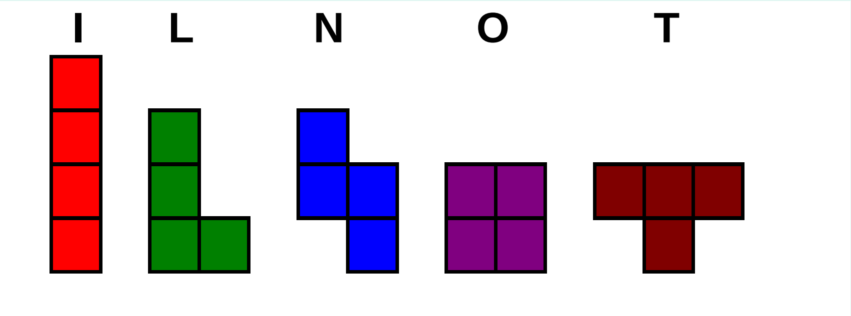


Darba autore:
Diāna Jakovļeva
12. Klase
Darba vadītāja:
Ezernieku vidusskolas matemātikas skolotāja
Bronislava Andžāne

2014

Kas ir tetramino?

Tetramino – plaknes figūra, ko iegūst no 4 vienādiem kvadrātiem, pievienojot tos vienu otram pa vesela garuma malām.

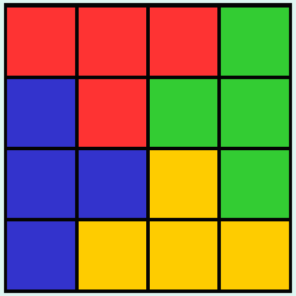


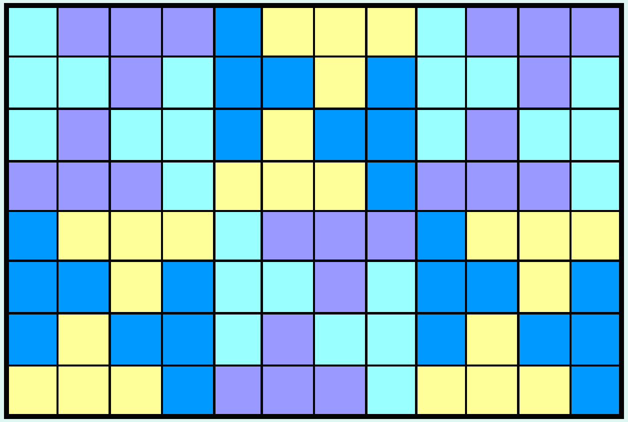
[2] Cibulis A. *Pastaigas Tetrapasaulē. Tetramino*

https://www.mykoob.lv/?index/liis_macibu_materiali_documents/category/29/material/280/documentsshow/1#topic_280

Kas ir T-pakojums?

T-pakojums – taisnstūra pārklājums ar T-tetramino.





Darba mērķis:

atrast taisnstūru blīvākos T-pārklājumus.

Darba uzdevumi:

1) iepazīties ar uzdevumiem par T-tetramino;
2) atrast sakarības starp dažādu izmēru kvadrātu malas garumu un brīvo rūtiņu skaitu, pārklājot šos kvadrātus ar T-tetramino;
3) atrast metodes, kā iegūt blīvākos kvadrātu pārklājumus ar T-tetramino;
4) atrast metodi taisnstūru blīvāko T-pārklājumu iegūšanai.

Tetramino uzdevumi

[1] ASV 31. Atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumu krājums
http://mks.mff.cuni.cz/kalva/usa/usa02.html

[7] Горбачёв Н. В. *Сборник олимпиадных задач по математике.*

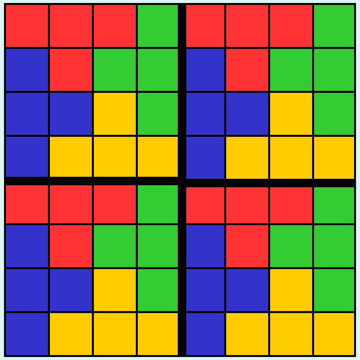
[5] Latvijas matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumu arhīvs
http://nms.lu.lv/uzdevumu-arhivs/latvijas-olimpiades/

[2] Cibulis A. *Pastaigas Tetrapasaulē. Tetramino*
https://www.mykoob.lv/?index/liis_macibu_materiali_documents/category/29/material/280/documentsshow/1#topic_280

„No .. zīmējumā redzamajām figūrām (*t.i.,T-tetramino un L-pentamino*) salikt taisnstūri ar laukumu 40 rūtiņas. Figūras nedrīkst pārklāties un katra veida figūra jāizmanto vismaz vienu reizi. (Figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas otrādi.)” [5, LAMO 40. 5. 4. uzd.];

„Vai taisnstūri, kas sastāv no a) 19×30, b)16×16, c) 10×10 rūtiņām, var sagriezt tādās figūrās, kādas attēlotas .. zīm. (*t.i., T-tetramino*)?” [5, LAMO 19. 15. uzd.];

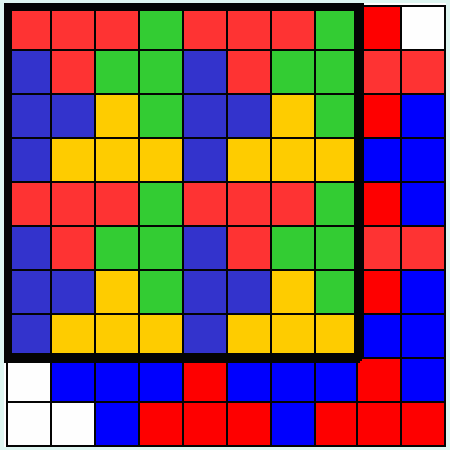
Kvadrāti $(4n)\times(4n)$



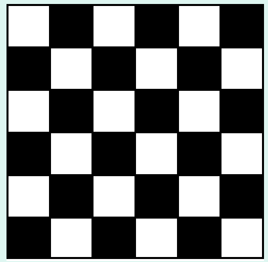
Tātad, visus kvadrātus $4n \times 4n$ un arī taisnstūrus $4m \times 4n$, kur m, $n > 1$, var salikt no T-tetramino.

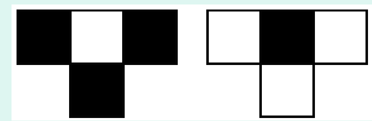
Kvadrāti $(4n-2)\times(4n-2)$

Teorēma: Kvadrāta $(4n-2)\times(4n-2)$, $n > 1$, blīvākajā T-pakojumā nepārklātas paliek 4 rūtiņas.



Pierādījums





Pieņemsim, ka eksistē kvadrāta $(4n-2)\times(4n-2)$ salikums vispār bez brīvām rūtiņām. Tad ir izmantoti

$$\frac{(4n-2)^2}{4} = \frac{16n^2 - 16n + 4}{4} = 4n^2 - 4n + 1 = (2n-1)^2$$ tetramino.

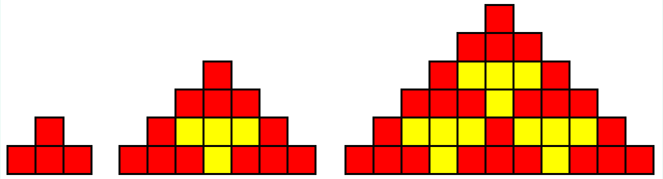
Lietojot šaha galdiņa iekrāsošanas principu, iegūstam, ka melno un balto rūtiņu skaits ir vienāds, un tas ir pārskaitlis:

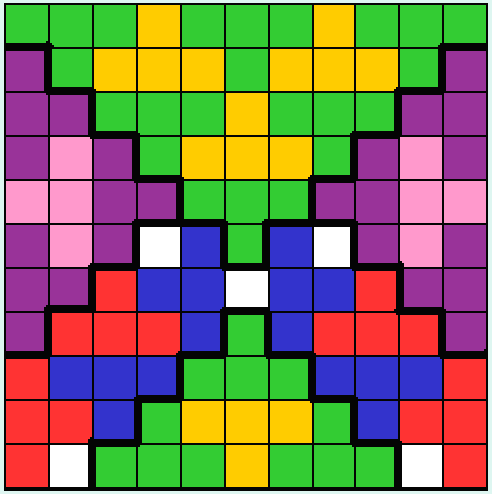
$$\frac{(4n-2)^2}{2} = \frac{16n^2 - 16 + 4}{2} = 8n^2 - 8n + 2 = 2\left(4n^2 - 4n + 1\right).$$

Kvadrāti $(2n-1)\times(2n-1)$

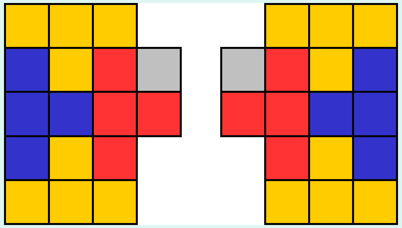
Teorēma: Kvadrātā $(2n-1)\times(2n-1)$, $n > 1$, eksistē T-pakojums ar piecām nepārklātām rūtiņām.

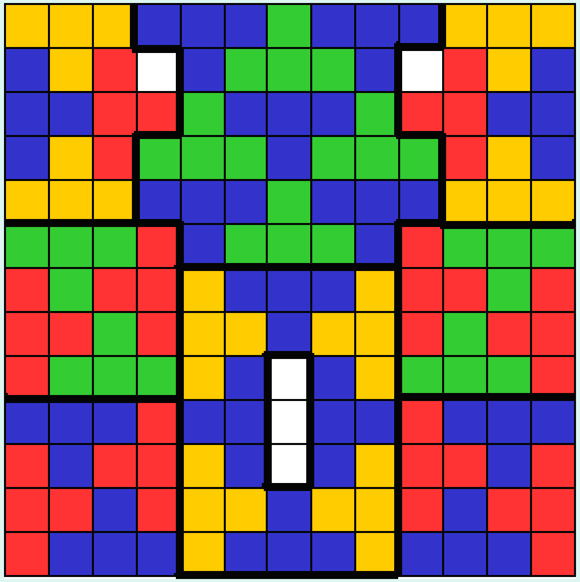
1. Kvadrāti ar malas garumu $4k-1$





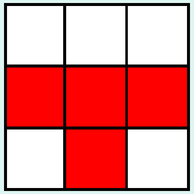
2. Kvadrāti ar malas garumu $4k+1$



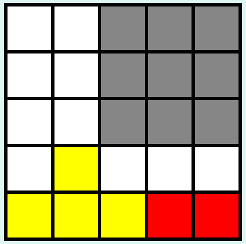


Hipotēze. Kvadrātu $(2n-1)\times(2n-1)$ blīvākais T-pakojums satur 5 nepārklātas rūtiņas.

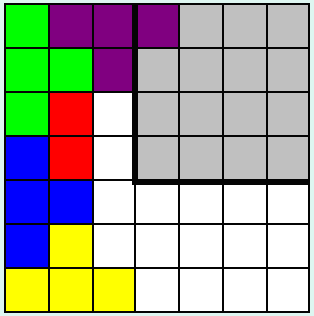
Kvadrāts 3 x 3



Kvadrāts 5 x 5

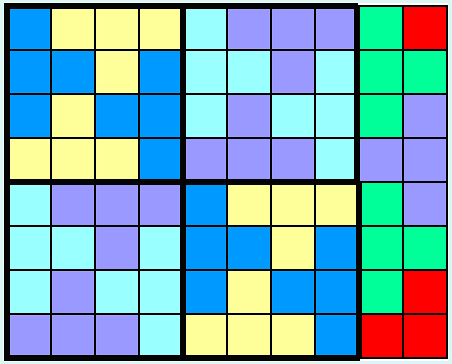


Kvadrāts 7 x 7



Taisnstūri $(4k)\times(4m+2)$

Teorēma: Taisnstūra $(4k)\times(4m+2)$ blīvākajā pārklājumā ar T-tetramino nepārklātas paliek 4 rūtiņas.



Valkupa teorēma: Lai taisnstūri $a \times b$ varētu sadalīt T-tetramino ir nepieciešami un pietiekami, ka a un b dalās ar 4.

[6] Walkup D. A. *Covering a rectangle with T-tetrominoes*
http://www.jstor.org/discover/10.2307/2313337?uid=3738496&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21103172875731

Secinājumi

1. Atrasta metode kvadrātu $(4n-2)\times(4n-2)$ blīvāko T-pakojumu iegūšanai un, izmantojot kvadrāta rūtiņu pārklāšanu pēc šaha galdiņa principa, pierādīts, ka nepārklātas paliek 4 rūtiņas.
2. Atrasta metode kvadrātu $(2n-1)\times(2n-1)$ blīvāko T-pakojumu iegūšanai un pamatots, ka nepārklātas paliek 5 rūtiņas.
3. Uzrādīta vienkārša metode taisnstūru $(4k)\times(4m+2)$ blīvāko T-pakojumu iegūšanai.

4. Izmantojot Valkupa teorēmu, pamatots, ka taisnstūru $(4k)\times(4m+2)$ blīvākais pārklājums ar T-tetramino satur 4 brīvas rūtiņas.

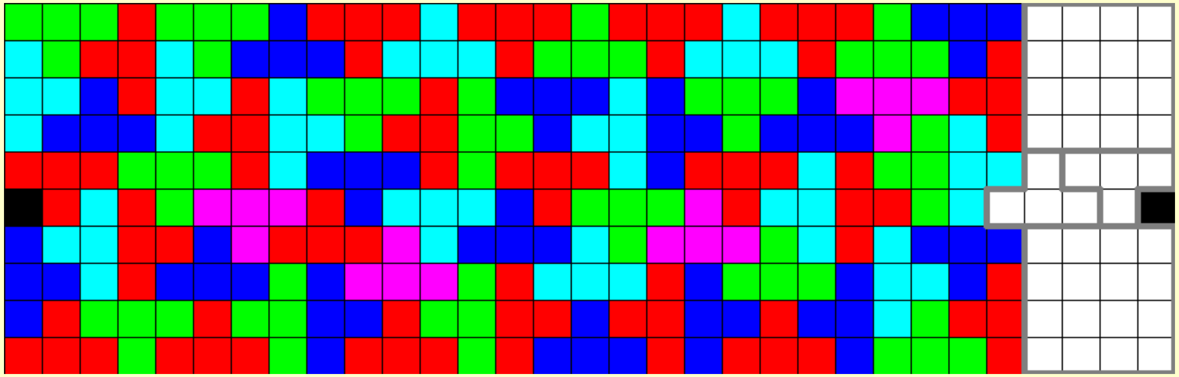
5. Zinātniski pētnieciskā darba rezultātus var izmantot ārpusklases nodarbībās, olimpiādēs, veidot jaunus uzdevumus par T-tetramino.

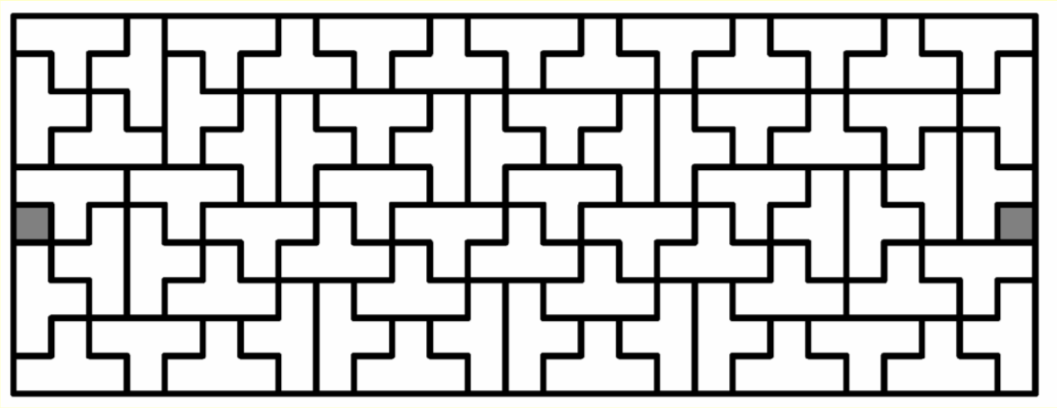
6. Darbu ir iespējams turpināt, apskatot taisnstūru $(4k)\times(2m+1)$, $(4k-2)\times(4m-2)$, $(2k+1)\times(2m+1)$ blīvākos T-pakojumus.

T-tetramino

Aleksejs Zajakins, Taisnstūru pārklāšana ar T-tetramino,
22 + P12, Bibl. 6, Rīgas 89. vidusskola, 11. kl.

$$f(10,m)=\begin{cases}4, & m=0 \pmod{2}\\ 6, & m=3 \pmod{4},\ m\le 23\\ 2, & \text{citiem } m.\end{cases}$$





Robert Hochberg,
The Gap Number of the T-Tetromino,
Department of Mathematics,
University of Dallas, Irving, TX

Preprint submitted to Elsevier March 27, 2014 (16 lp.)

Domino pārklājumi un vispārinājumi

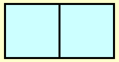
Pirmais stimuls MO “Baltijas ceļš” tika iesūtīts šāds uzdevums:

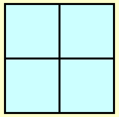
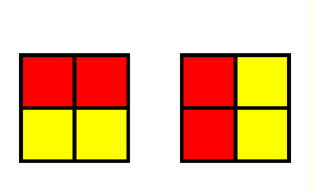
(St. Petersburg, Baltic Way Proposals, 2013)

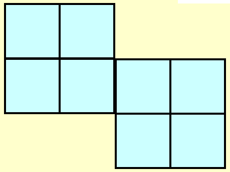
Does a figure exist on the squared plane
***that can be split into dominoes by exactly* 17 *ways*?**

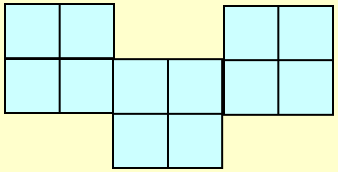
Vai katram ***n*** eksistē polimino, kuru no domino var salikt tieši ***n*** veidos?

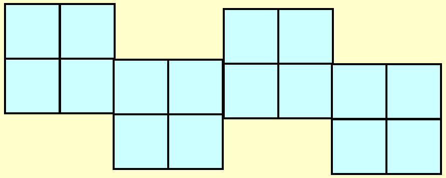
$\boxed{n = 2^k}$

$n = 1$ 

$n = 2$  

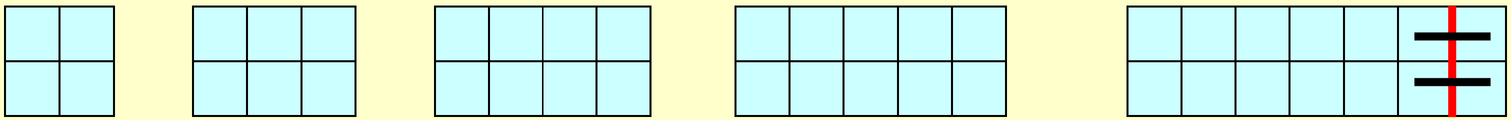
$n = 4$ 

$n = 8$ 

$n = 16$ 

Fibonači skaitļi

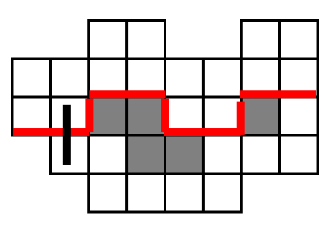
Salikumu skaits – Fibonači skaitļi.



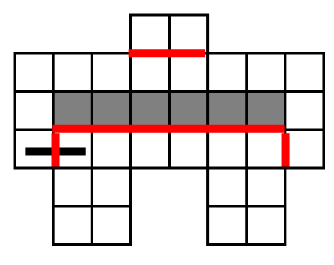
1 + 1 2 + 1 3 + 2 5 + 3 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Daži autori raksta, ka tas esot pārsteidzoši,
ka taisnstūru salikumu skaits no domino ir Fibonači skaitļi.

MO uzdevuma atrisinājumi

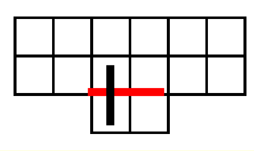


16 + 1

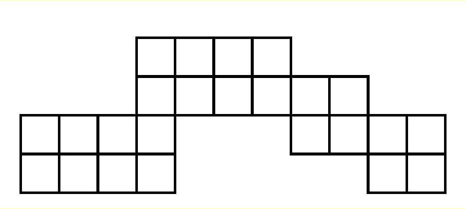


9 + 8

Minimālais



13 + 4

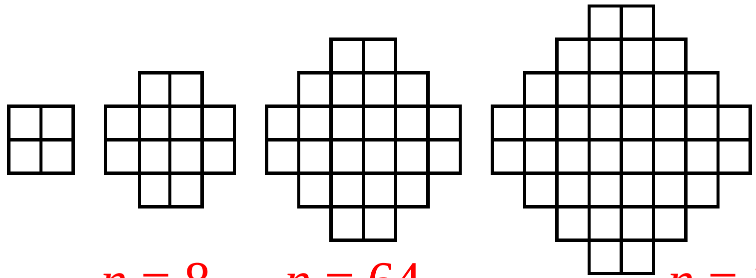


$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Kā iegūt pirmskaitļus?

Acteku kristāli

Aztec diamonds



$n = 8$ $n = 64$ $n = 1024$

$$n = 2^{k(k+1)/2}$$

Once a mathematician knows that they can do something, their next question will often be, "But in how many ways?" One of the first significant results on tiling enumeration was the following landmark theorem which was proven independently in 1961 by Fisher and Temperley [3] and by Kastelyn [6].

Theorem: The number of tilings of a $2m \times 2n$ checkerboard with dominoes is

$$4^{mn} \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right).$$

One glance at the formula should be enough to indicate just how remarkable it is. The

Norman Do, (2005) ***The Art of Tiling with Rectangles***,
(Gazette 32, Vol.5, 302-307.)

http://users.monash.edu.au/~normd/documents/Mathellaneous-07.pdf

Problēmas vēsture

E. J. Friedman, www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0500.html

Problem of the Month (May 2000)

A few months ago, I became interested in the number of ways to tile variously shaped checkerboards with dominoes.
Let D(n) be the smallest number of squares on a checkerboard that has exactly n domino tilings.
What are the values of D(n) for small n?
What is D(2000)? Does D(n) exist for every n?

Here are some other questions about domino tilings:
How many 2n-ominoes can be tiled with n dominoes?

Among these 2n-ominoes,
which can be tiled with dominoes in the most ways?

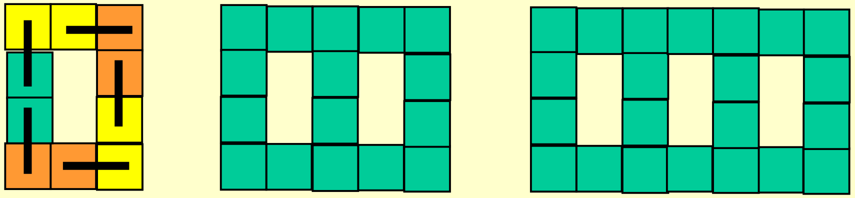
Risināšanas idejas

Atrast tādu figūru virkni, kurai ir spēkā nevis Fibonači, bet šāda sakarība:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + 1}$$

Pirmie šo ideju ir realizējuši Brendan **Owen**, Alexandre **Muniz**, and Timothy **Luffingham**, tādējādi pierādot, ka skaitļi D(n) vienmēr eksistē.

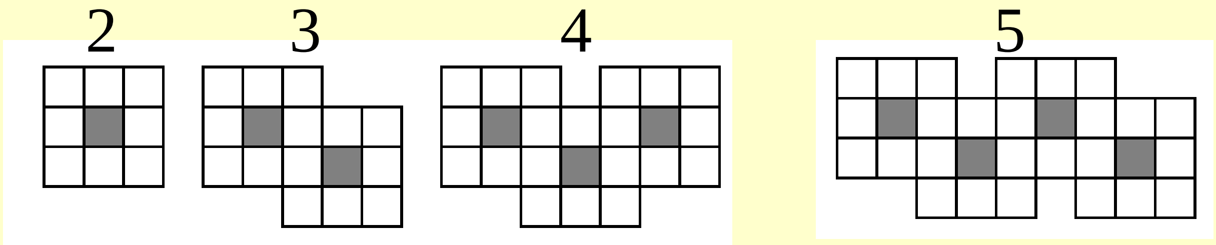
Viņu pierādījums ir konstruktīvs un raksturojams kā SKATIES!



2 **3** = 2+1 **4** = 3+1

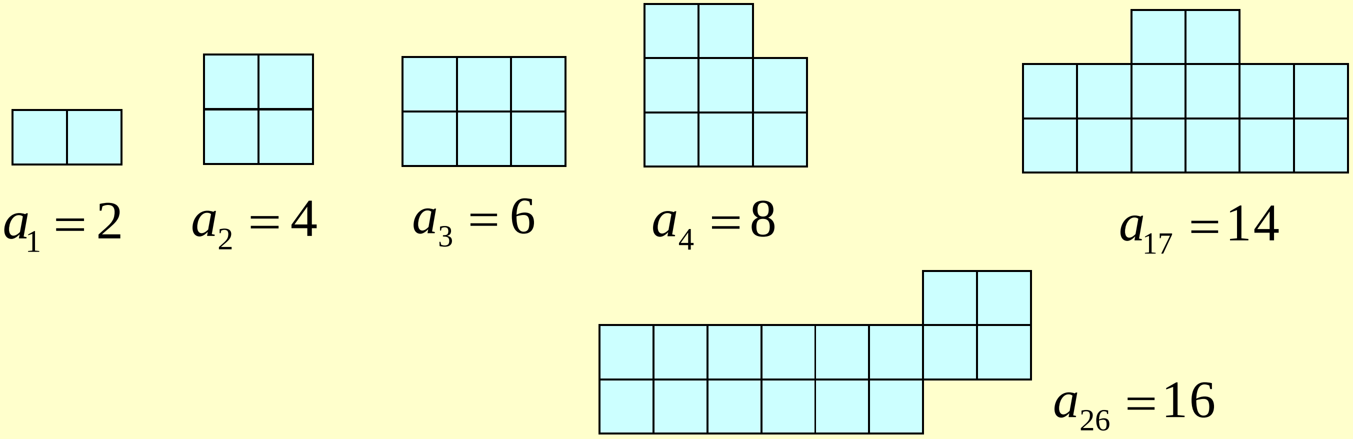
Šī konstrukcija neder vispārinājumam uz taisnstūriem.

Cita konstrukcija



A060659 $a(n)$ = smallest number of squares on a checkerboard that has exactly n domino tilings.

2, 4, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 12, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 16, **14**, 16, 16, 16, 16, 16



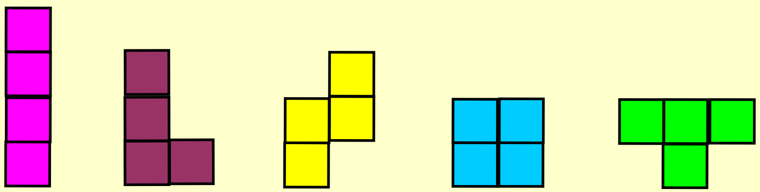
$a_1 = 2$ $a_2 = 4$ $a_3 = 6$ $a_4 = 8$ $a_{17} = 14$

Nav monotonitātes

$a_{26} = 16$

Vispārinājumi

Problēma. Noskaidrot, kuriem tetramino piemīt īpašība: katram ***n*** eksistē polimino, kuru no tetramino var salikt tieši ***n*** veidos.

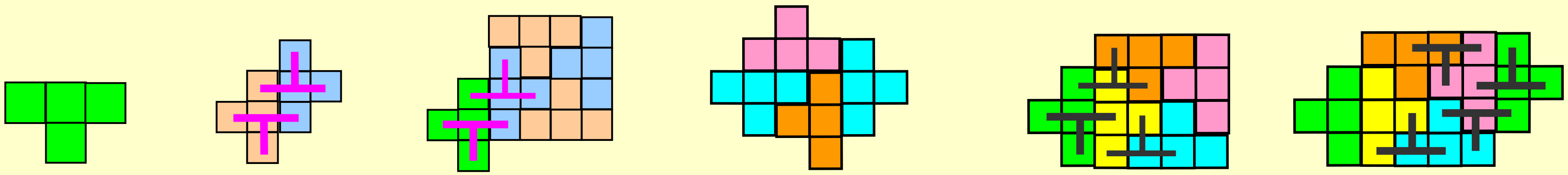


Ir viens tetramino, kuram šī īpašība nepiemīt.

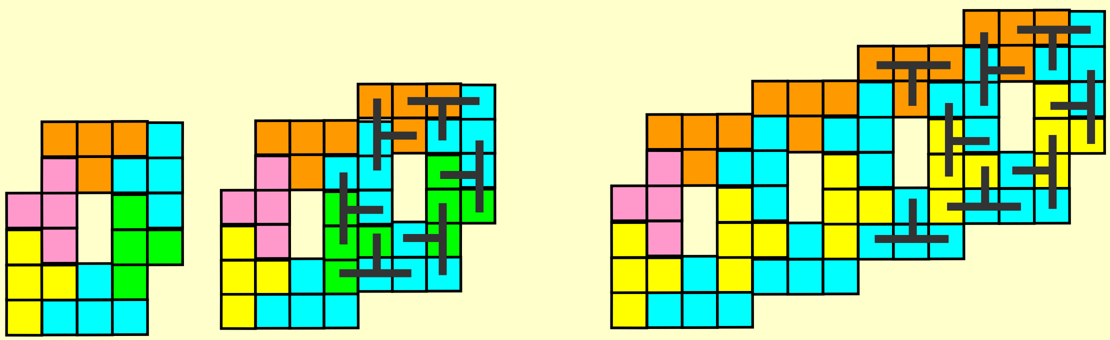
Problēma. **Tas pats jautājums par pentamino.**

Tetramino T

Vai katram ***n*** eksistē polimino, kuru
no tetramino T var salikt tieši ***n*** veidos?



1 2 3 4 2 + 1 = **3** 3 + 2 = **5**



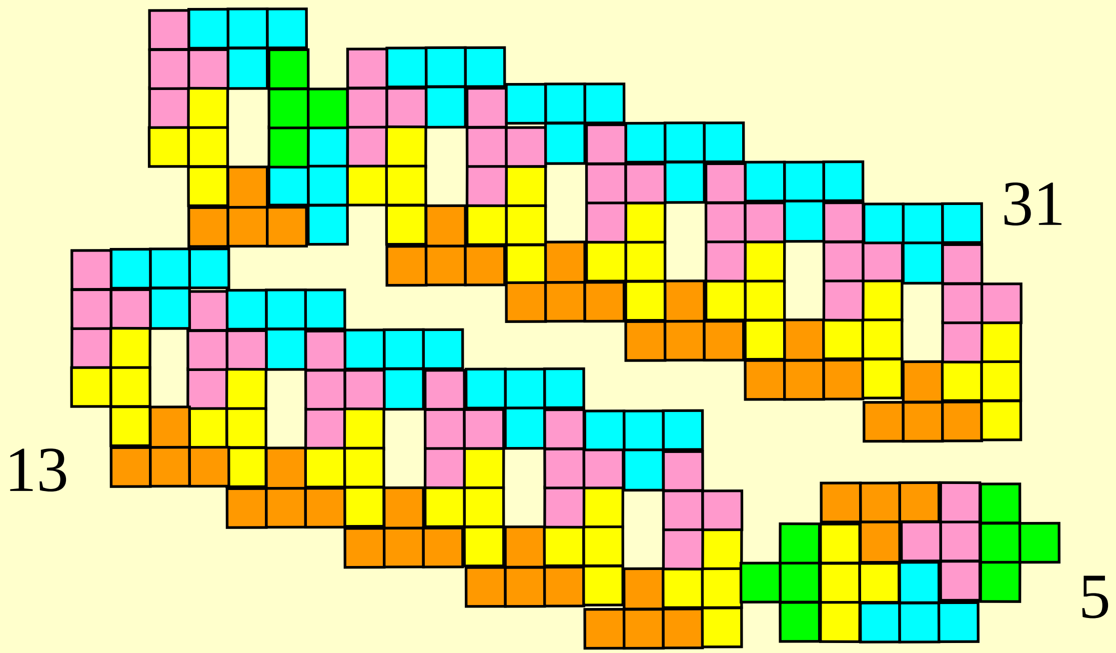
2 3

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Uzdevums. Atrast figūru, kuru no T var salikt tieši 7 veidos.

2015

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$$



Figūru papildināšanas problēma

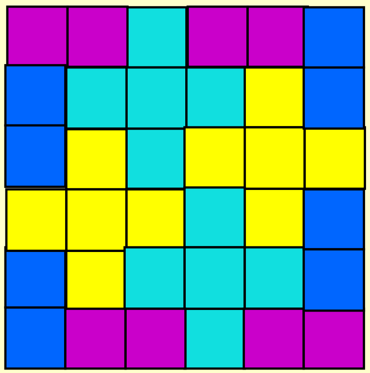
Figūras A papildināt ar figūrām B līdz taisnstūrim.

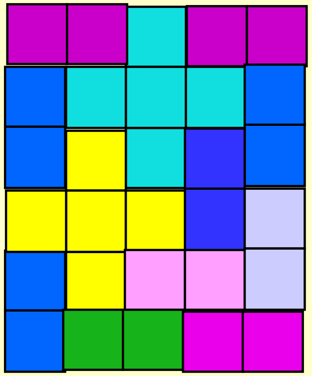
Taisnstūra salikšana no divu tipu figūrām.

Vienkāršs un MO pazīstams uzdevums:

Krustiņu (pentamino X) papildināt ar domino līdz taisnstūrim.

Taisnstūra salikšana no divu tipu figūrām.





Minimālais taisnstūris

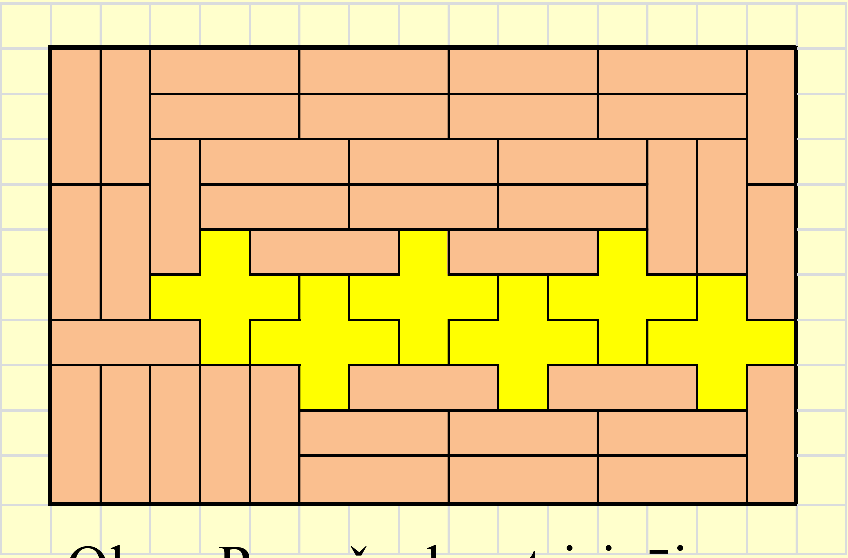
Krustiņa papildināšanas problēma

Problēmas: **Minimālais figūru skaits;**
Minimālais kvadrāts, taisnstūris.

Vai 2 ir minimālais krustiņu skaits, ko iespējams papildināt ar domino līdz taisnstūrim?
Iekrāso taisnstūri pēc šaha galdiņa principa.
Ievēro, ka krustiņš pārklāj (4, 1).

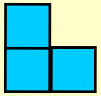
Pierādīt, ka krustiņus iespējams papildināt līdz kādam taisnstūrim ar 1 x 3.

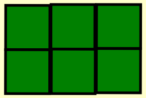
Pentamino X papildināšana ar 1 x 3



Olgas Rogoženko atrisinājums,
10. klase., Rīgas 10. vidusskola.

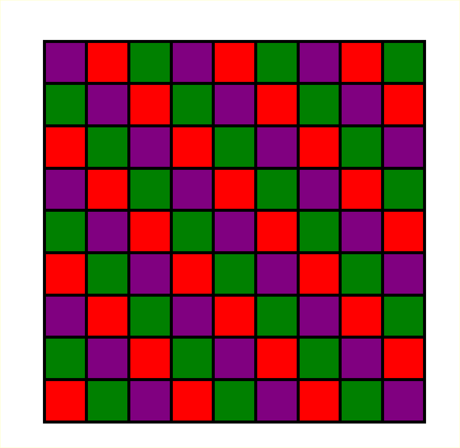
Vai X iespējams papildināt (līdz taisnstūrim) ar 1 x 4?



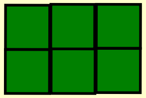
V-trimino papildināšana ar 

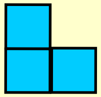
Teorēma. Vienu V-trimino nav iespējams papildināt līdz taisnstūrim.

MO uzdevums par 9 x 9 sadalīšanu divu veidu figūrās.



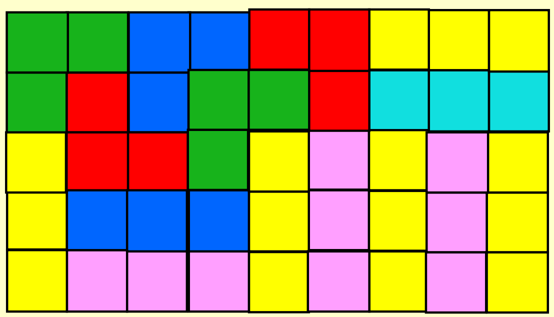
(**27**, **27**, **27**).

 (**2**, **2**, **2**).

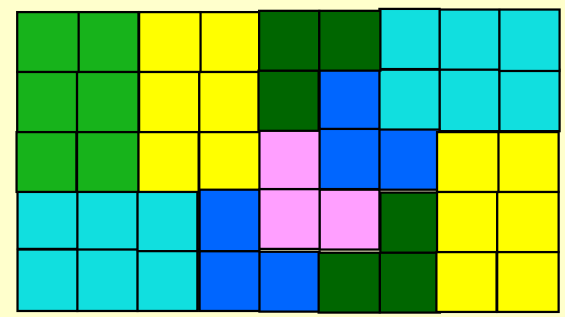
 (**2**, 1).

V-trimino papildināšana

Minimālais taisnstūris



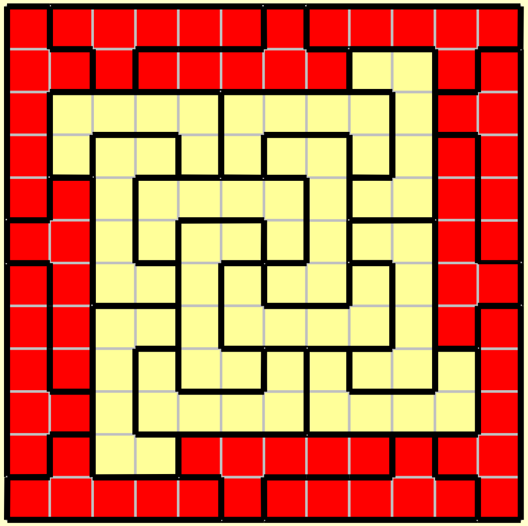
Vai eksistē taisnstūris, kuru var sadalīt **trīs** stūrīšos un taisnstūros 1 � 3 ?



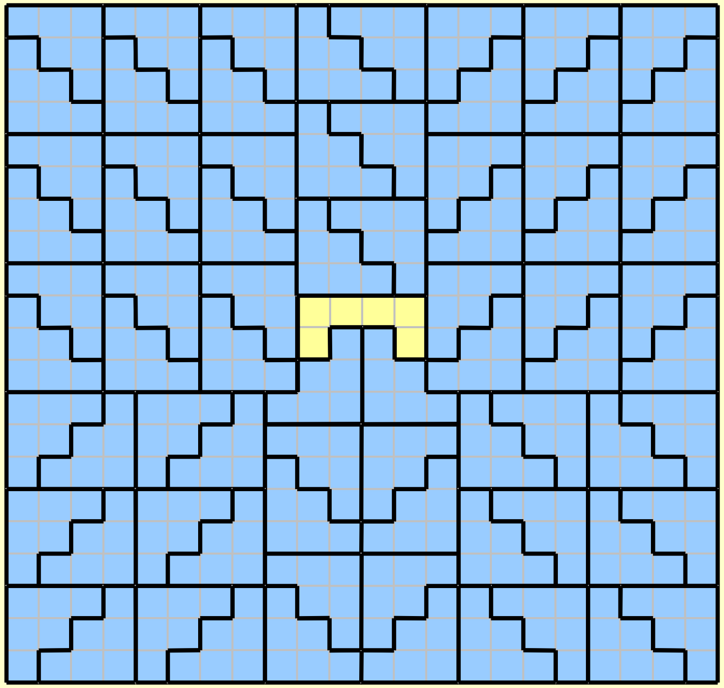
Vai eksistē taisnstūris, kuru var sadalīt **trīs** stūrīšos un taisnstūros 2 � 3 ?

Heksamino

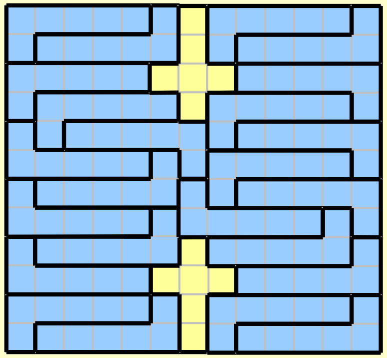
No J. Vihrova ZPD Taisnstūri no divu veidu heksamino, 2008



Lielākais taisnstūris ZPD

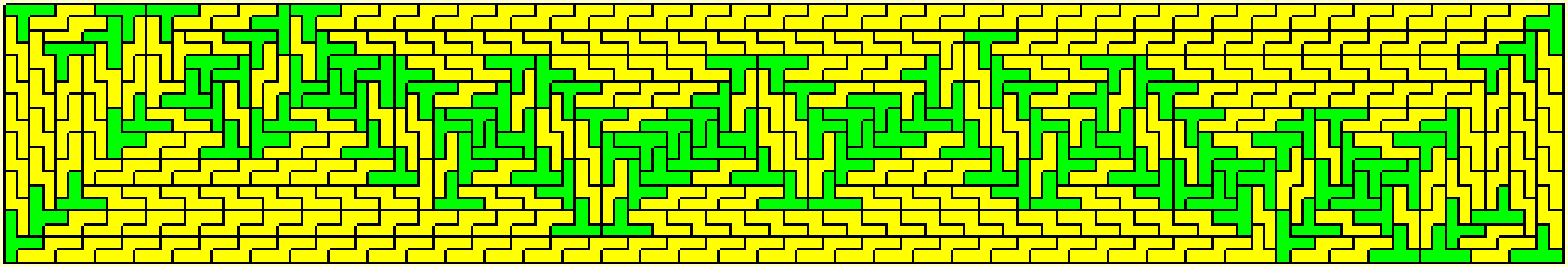


A76-C1



Heksamino

Vai eksistē mazāks taisnstūris?

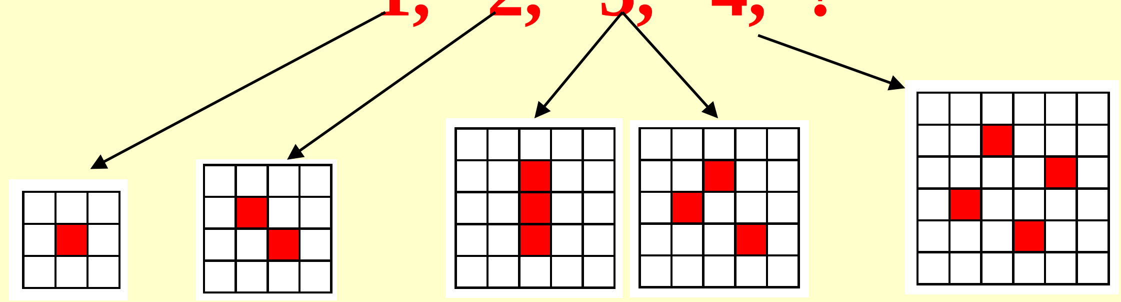


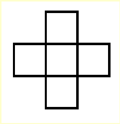
20x120

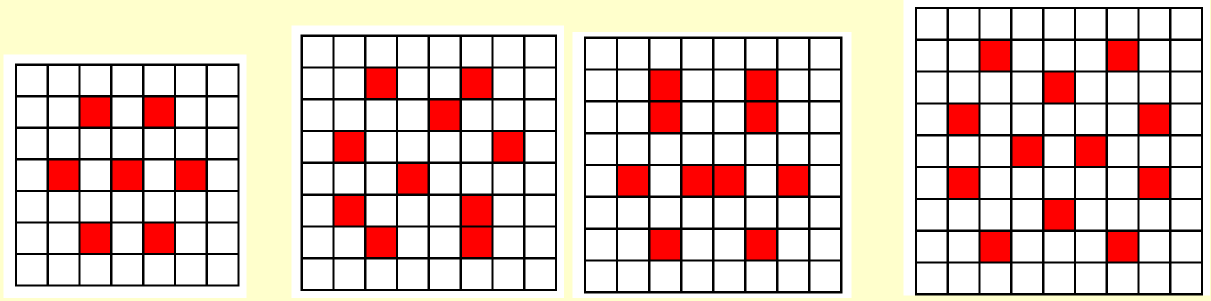
http://recreationalmath.org/PolyPages/index.htm

Mīnu izvietošanas uzdevumi

1, 2, 3, 4, ?







1, 2, 3, 4, 7, 10, 12, ?

Var gadīties, ka ZPD rezultāti nebūs nekas jauns http://oeis.org

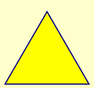
Figūru saderības problēma

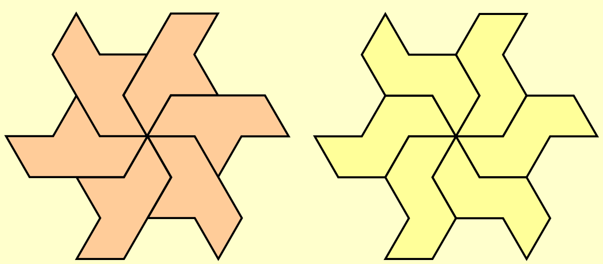
D1. Divas figūras sauc par **saderīgām**, ja tām eksistē kopīgs dalāmais.

D2. Divas figūras *A* un *B* sauc par **saderīgām**, ja eksistē tāda ierobežota figūra *C*, kuru var salikt (bez pārklāšanās) gan no figūras *A*, gan no figūras *B* kopijām.
Šādu figūru *C* sauc par *A* un *B* **kopīgo dalāmo**.

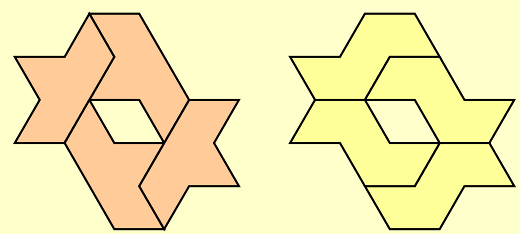
1. ZPD par saderību.

Margarita Lukjanska, Tetramondu, pentamondu un heksamondu saderība
Budapešta, 2003; Londona, 2004.

 - **Polimondu** pamatelements

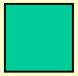


KD



MKD

Polimino saderības problēma

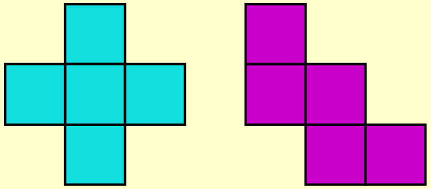
 - **polimino** pamatelements

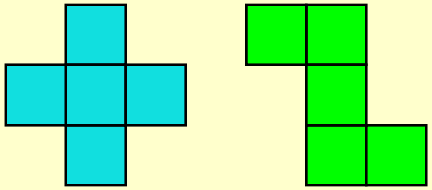
Par **polimino** sauc plaknes figūru, kas sastāv no vienības kvadrātiem, kas pievienoti viens otram pa vesela garuma malām.

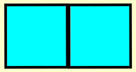
Ja polimino sastāv tieši no *n* kvadrātiem to sauc par ***n*-mino**

Pirmos sešus *n*-mino sauc attiecīgi par:
monomino, domino, trimino, tetramino, pentamino un heksamino.

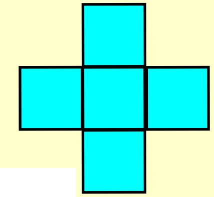
Neatrisināta problēma!

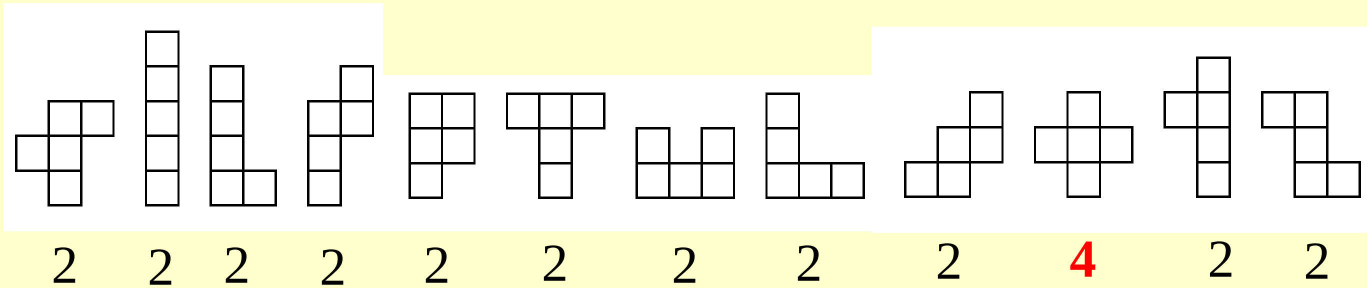




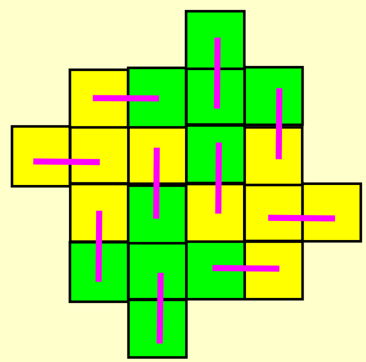


Domino saderības problēma



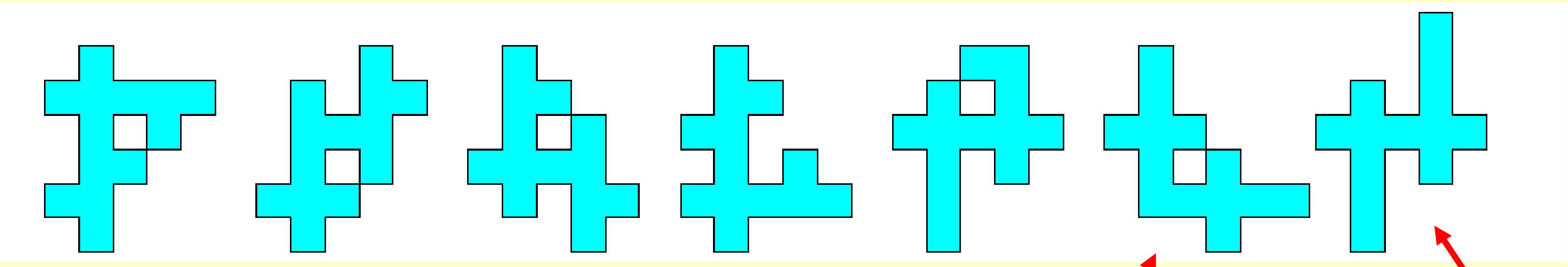


Ir tikai viens pentamino, kura MKD sastāv no 4 kopijām



Jaunumi domino saderības problēmā

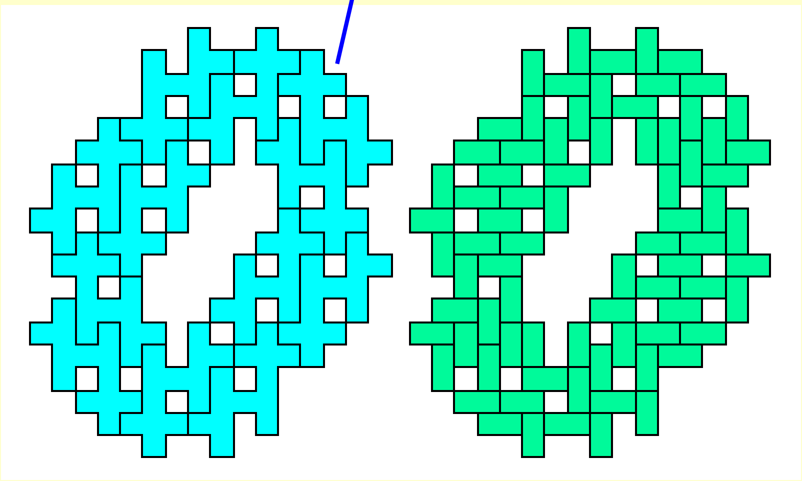
Septiņiem 13-mino (no 238591) zināmie KD pārsniedz 8 kopijas.

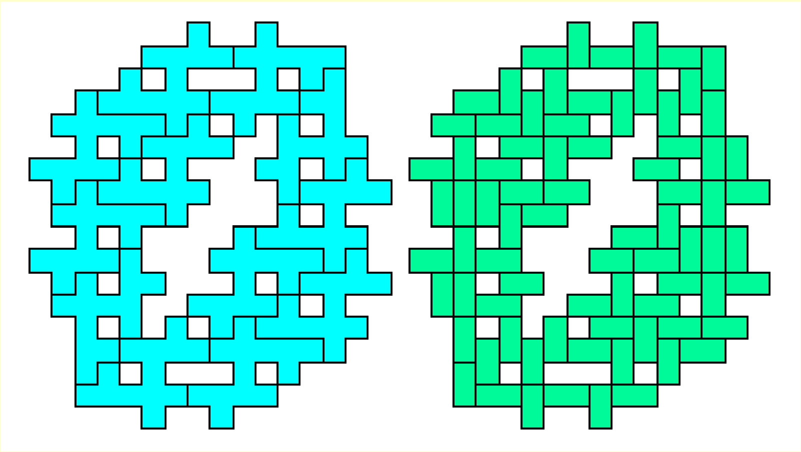


12	**16**	**16**	**16**	**16**	**20**	**24**
27.02.2015	**12**	**12**				

J. Čerņenoks

Vai iespējams iegūt mazākus KD?





Jaunumi saderības problēmā

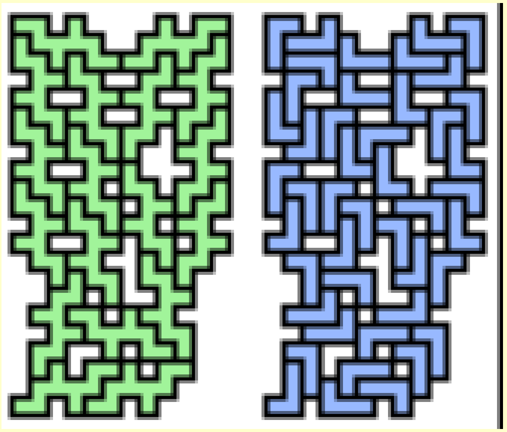
http://userpages.monmouth.com/~colonel/nincom/

Saderība ar L-tetramino

http://www.iread.it/Poly/index.php

Giovanni Resta showed that
the L tetromino is compatible with
all polyominoes of order 10 or less,

Dekamino skaits ir 4655.

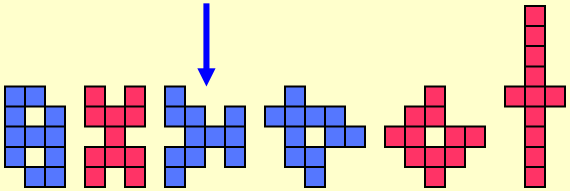


Vai tas ir MKD?

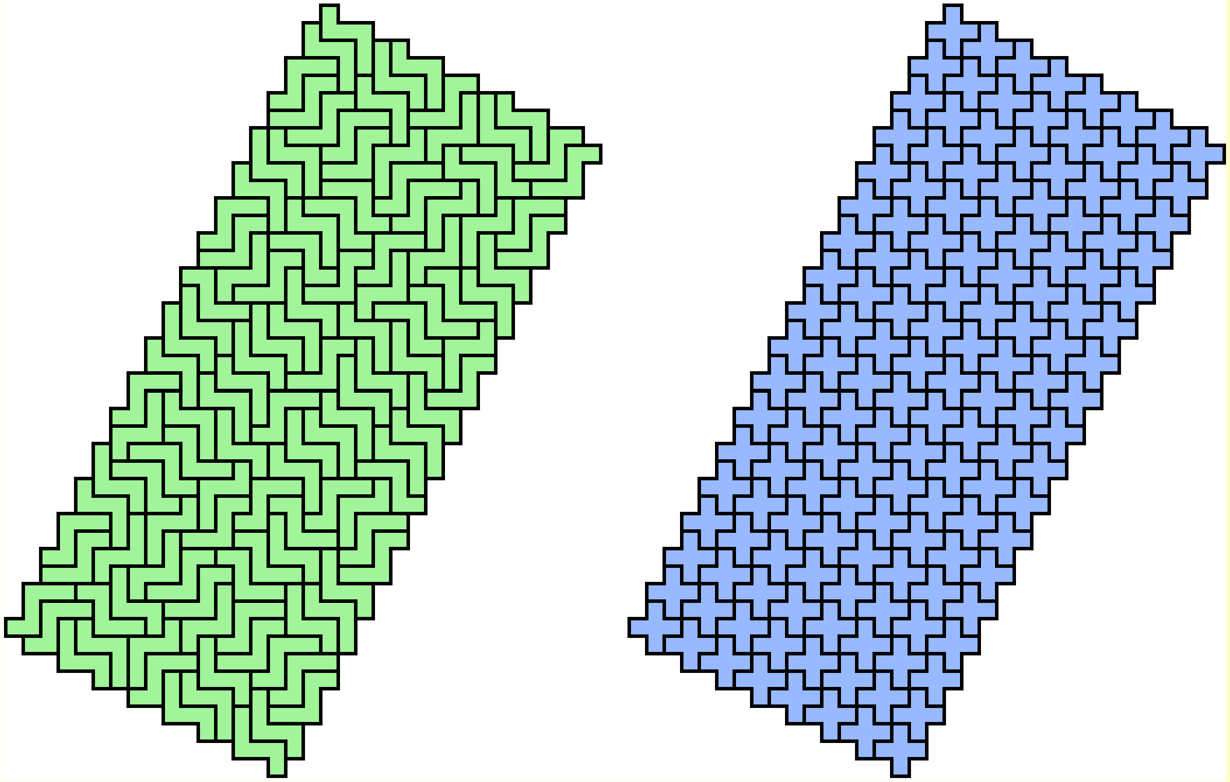
11-mino saderība ar L-tetramino

11-mino skaits ir 17073.

KD eksistence šaubas nerada.



Jaunums penta-heksa saderībā



G. Sicherman, 5.3.2015.