2015. gada 7. februārī Rīga

Jānis Buls
Latvijas Universitāte
Matemātikas nodaļa
Matemātiskās analīzes katedra
Vispārīgās matemātikas katedra

MATEMĀTISKĀ LOĢIKA

Saturs

Daudzu filozofu pūļu rezultātā loģika XVIII gadsimtā bija tik pilnīgi attīstīta un sistematizēta, ka klasiskās vācu filozofijas pamatlicējs Imanuels Kants (1724 – 1804) izdarīja secinājumu:

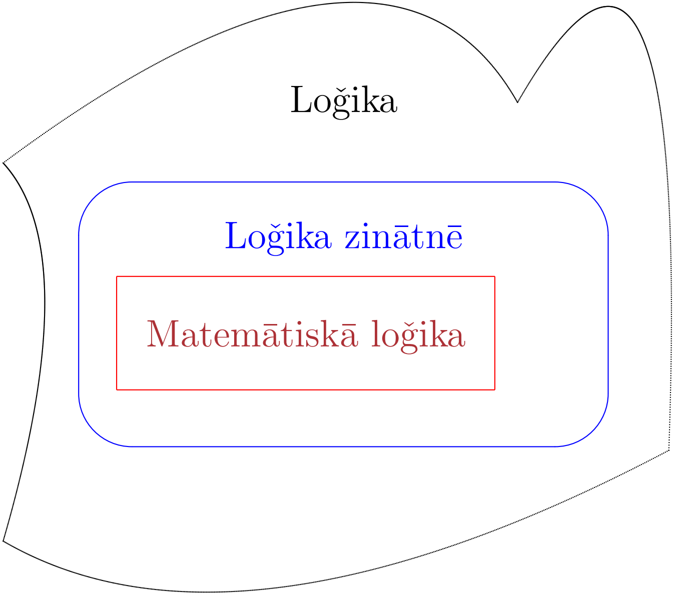
— Formālā loģika beigusi savu attīstību.

Daudzu filozofu pūļu rezultātā loģika XVIII gadsimtā bija tik pilnīgi attīstīta un sistematizēta, ka klasiskās vācu filozofijas pamatlicējs Imanuels Kants (1724 – 1804) izdarīja secinājumu:

— Formālā loģika beigusi savu attīstību.

Taču nāca XIX gadsimta vidus, un radās

matemātiskā loģika...


Loğika
Loğika zinātnē
Matemātiskā loģika

Matemātisko loģiku

var uzskatīt par

formālo loģiku,

kas **lieto**

matemātiskas metodes un

matemātiska tipa simboliku.

un	$\wedge, \&$
vai	$\vee$
ja...,tad...	$\Rightarrow$
...tad un tikai tad, ja...	$\Leftrightarrow$
nav tiesa, ka...	$\neg$

Aritmētikā	—	skaitļi
Algebrā	—	burti
Loģikā	—	izteikumi

Parasti izteikumus apzīmē ar lielajiem burtiem

A, B, C, D un citiem

Izteikuma patiesuma vērtība

p — **patiess**,

a — **aplams**

Operācijas ļauj veidot no esošajiem izteikumiem jaunus izteikumus.

Negācija

A	$\neg A$
a	p
p	a

Konjunkcija, disjunkcija

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
a	a	a	a
a	p	a	p
p	a	a	p
p	p	p	p

Implikācija

$$\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$$

A	B	$A \Rightarrow B$
a	a	p
a	p	p
p	a	a
p	p	p

Ekvivalence

A	B	$A \Leftrightarrow B$
a	a	p
a	p	a
p	a	a
p	p	p

Tā rezultātā mēs varam noteikt patiesuma vērtības saliktiem izteikumiem.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad (*)$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(*)$
a	a	p	p	p	p	p
a	p	p	a	p	p	p
p	a	a	p	a	a	p
p	p	p	a	a	p	p

Šis ir kontropozīcijas likums.

Izteikumu formas

...	ietek	...	ezerā.
Rēzekne	ietek	Usmas	ezerā.
Rēzekne	ietek	Lubānas	ezerā.
x	ietek	y	ezerā.

$P(x, y)$ — predikāts

Kvantori

$\exists$	—	eksistences kvantors
$\exists x P(x,y)$	—	eksistē tāds x, ka $P(x,y)$ ir patiess.
$\forall$	—	universālkvantors.
$\forall y P(x,y)$	—	katram y predikāts $P(x,y)$ ir patiess.

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

$$\forall y \exists x P(x,y)$$

$$\exists x \exists y P(x,y)$$

Tagad mēs varam mēģināt formāli pierakstīt teikumus.

Kurš putniņš agri ceļas,
Agri slauka deguntiņ'.

$P(x)$	—	x ir putniņš
$A(x)$	—	x agri ceļas
$S(x)$	—	x agri slauka deguntiņu

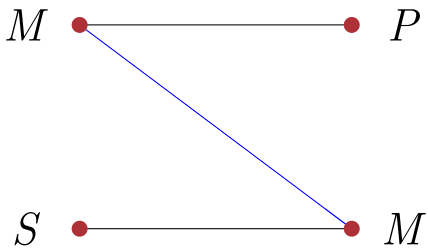
$$\forall x\ ((P(x) \wedge A(x)) \Rightarrow S(x))$$

Siloğismi

Siloğisms ir pastarpināts slēdziens ar divām premisām.

Visi cilvēki ir mirstīgi	Visi M ir P
Sokrāts ir cilvēks	Visi S ir M
Sokrāts ir mirstīgs	Visi S ir P

Shematiski to var noformēt šādi (tradicionāli šo shēmu sauc par 1. siloğisma figūru):



Ar to viss neaprobežojas. Tradicionāli spriedumus klasificē šādi:

A	Visi S ir P	vispārēja apgalvojuma spriedums	$\forall x\ (S(x) \Rightarrow P(x))$
I	Daži S ir P	daļēja apgalvojuma spriedums	$\exists x\ (S(x) \wedge P(x))$
E	Neviens S nav P	vispārēja nolieguma spriedums	$\forall x\ (S(x) \Rightarrow \neg P(x))$
O	Daži S nav P	daļēja nolieguma spriedums	$\exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$

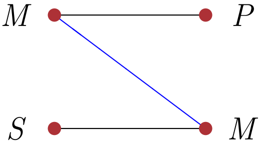
Saskaņā ar šo klasifikāciju siloģisms

$$\begin{array}{l|l} \text{Visi cilvēki ir mirstīgi} & \text{Visi } M \text{ ir } P \\ \text{Sokrāts ir cilvēks} & \text{Visi } S \text{ ir } M \\ \hline \text{Sokrāts ir mirstīgs} & \text{Visi } S \text{ ir } P \end{array}$$

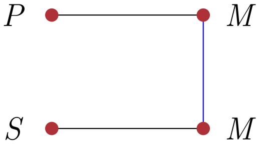
ir klasificējams kā AAA–1

Uzskaitīsim visas tradicionālās siloģismu figūras:

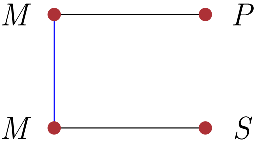
1\. siloģisma figūra



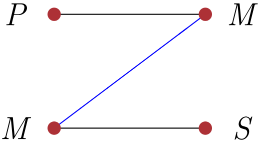
2\. siloģisma figūra



3\. siloģisma figūra



4\. siloģisma figūra



♢ Katrā figūras punktā var būt A, I, E, vai O.
Katrā figūrā ir trīs atšķirīgas iezīmes,
tāpēc katrā figūrā ir iespējami

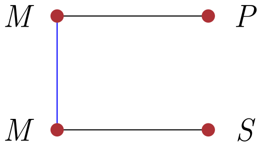
$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

siloğismi.
Pavisam ir 4 figūras.
Tas nozīmē, ka uzkonstruējami

$$4 \cdot 64 = 256$$

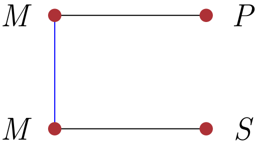
siloğismi.
Taču tikai 15 slēdzieni ir pareizi, pārējie — aplami.

Piemēra pēc apskatīsim siloģismu OEI–3,
proti, 3. figūras siloģismu



$$\frac{\begin{array}{l}\text{Daži } M \text{ nav } P\\ \text{Neviens } M \text{ nav } S\end{array}}{\text{Daži } S \text{ ir } P}$$

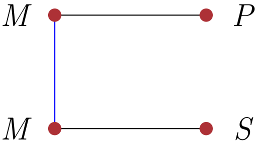
Piemēra pēc apskatīsim siloģismu OEI–3, proti, 3. figūras siloģismu



$$\begin{array}{l} \text{Daži } M \text{ nav } P \\ \text{Neviens } M \text{ nav } S \\ \hline \text{Daži } S \text{ ir } P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Daži kaķi nav melni} \\ \text{Neviens kaķis nav suns} \\ \hline \text{Daži suņi ir melni} \end{array}$$

Piemēra pēc apskatīsim siloğismu OEI–3,
proti, 3. figūras siloğismu



Daži M nav P
Neviens M nav S

Daži S ir P

Daži kaķi nav melni	Daži putni prot lidot
Neviens kaķis nav suns	Neviens putns nav suns
Daži suņi ir melni	Daži suņi prot lidot

Pareizie siloģismi	Pseido latīņu mnemoniskais nosaukums
AAA–1	Barbara
EAE–1	Celarent
AII–1	Darii
EIO–1	Ferio
AEE–2	Camestres
EAE–2	Cesare
AOO–2	Baroko
EIO–2	Festino
AII–3	Datisi
IAI–3	Disamis
EIO–3	Ferison
OAO–3	Bokardo
AEE–4	Camenes
IAI–4	Dimaris
EIO–4	Fresison

Pateicos par uzmanību!