GRAFU TEORIJA - PALĪGS UZDEVUMU RISINĀŠANĀ

Halina Lapiņa

Kas ir grafs?

<u>Futbolspēļu turnīrs</u>

Starpposms:

A ir spēlējusi ar C, D, F

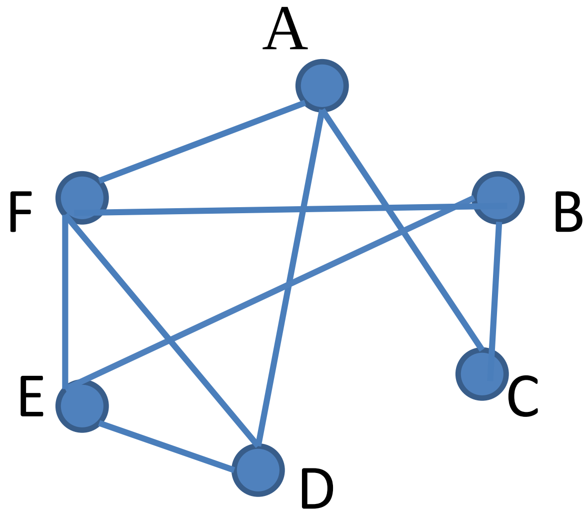
B …………… C, E, F

C …………….A, B

D ……………. A, E,F

E ……………. B, D, F

F …………. A, B, D, E



Definīcija

Par **grafu G** sauc pāri (V,E), kur

V – netukša, galīga elementu kopa, kurus sauc par **virsotnēm**,

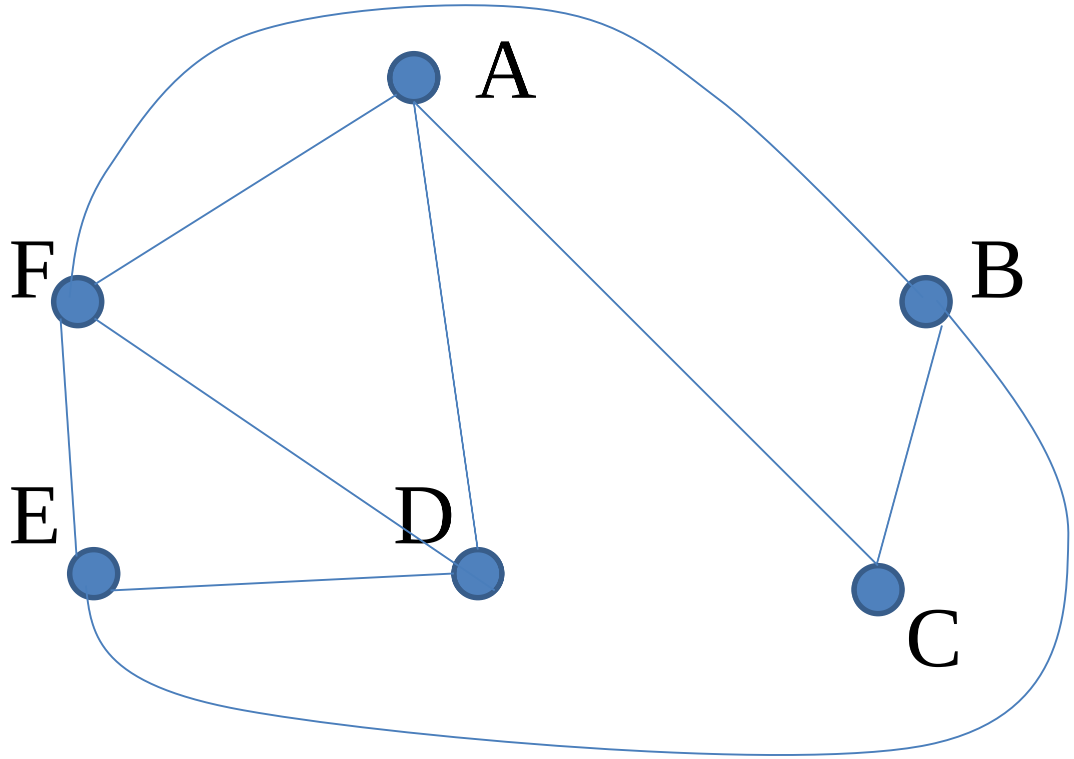
E – dažādu elementu no kopas V pāru kopa, kurus sauc par **šķautnēm**.

Definīcija

Šķautņu skaitu, kuras iziet no virsotnes, sauc par dotās **virsotnes pakāpi**.

Šķautnes krustojas arī citos punktos, bet tās nav grafa virsotnes!

Šādu grafu sauc par dotajam grafam G **izomorfu grafu**.



Uzdevums

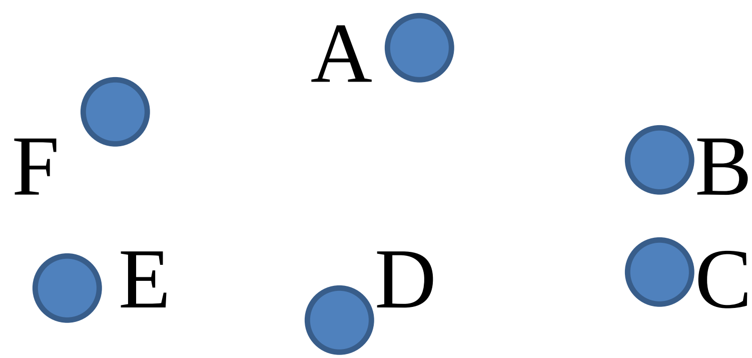
Uzzīmēt grafu, kurš atbilst situācijai, ka turnīrs ir beidzies!

Definīcija

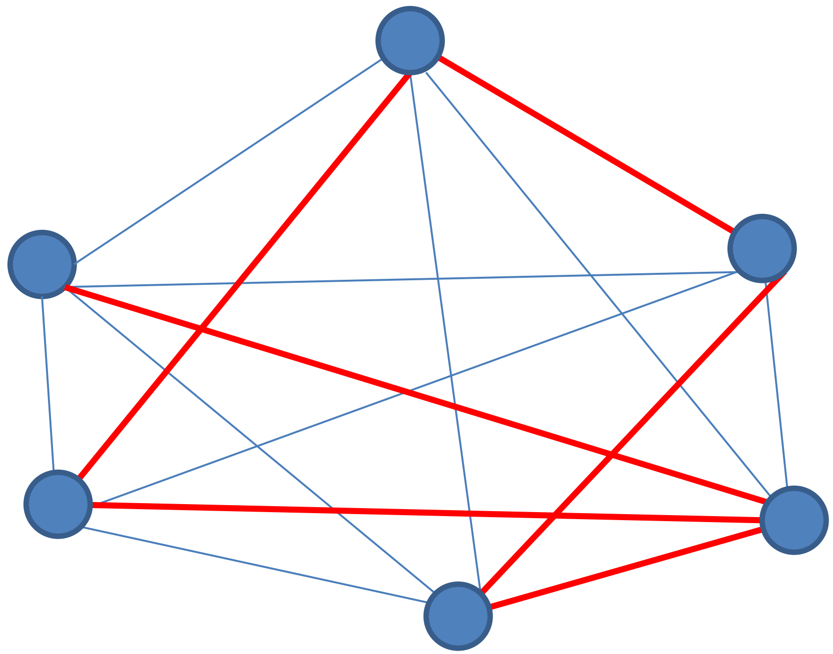
Grafu, kurā jebkuras divas virsotnes ir savienotas ar šķautni, sauc par **pilnu grafu.**

Definīcija

Grafu bez šķautnēm sauc par **nulles grafu** jeb **tukšu grafu**.



Lai iegūtu pilnu grafu, grafs jāpapildina ar šķautnēm, kuras veido tā saucamo grafa G **papildinājumu** G'.

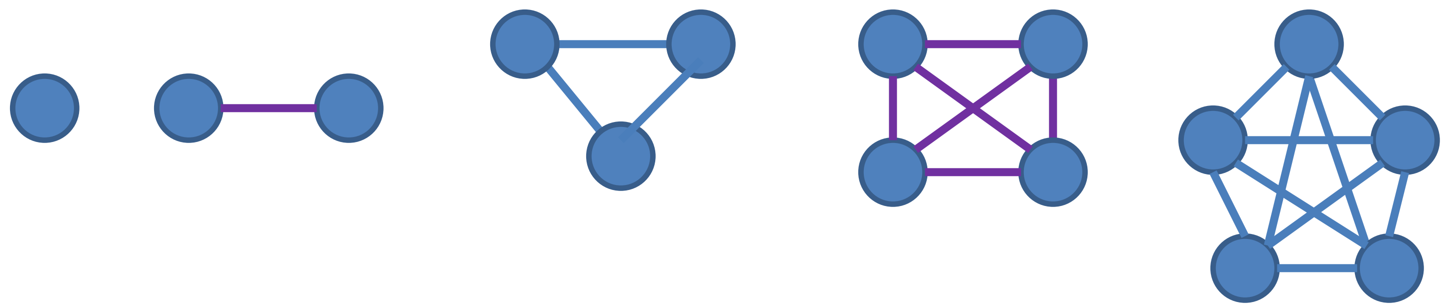


Pilna grafa ar *n* virsotnēm šķautņu skaits ir

$$\frac{1}{2}n\cdot(n-1)$$

Pirmie pieci pilnie grafi:

***n*: 1 2 3 4 5**

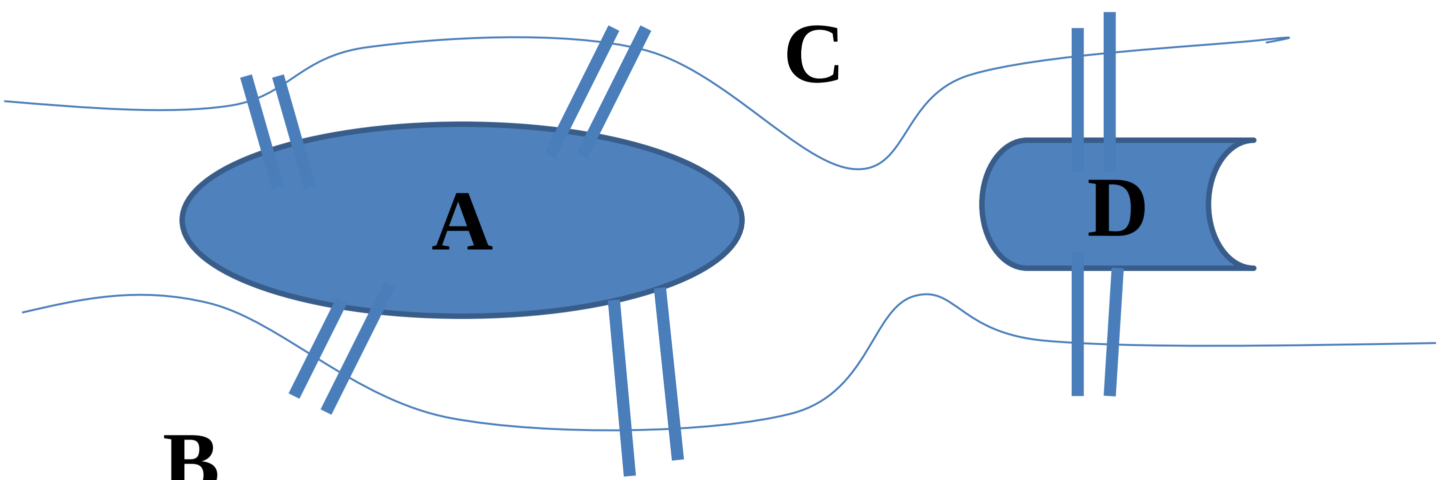


Pilnos grafus apzīmē ar burtu K, pieliekot tam kā izdeksu grafa virsotņu skaitu. Esam uzzīmējuši grafus K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

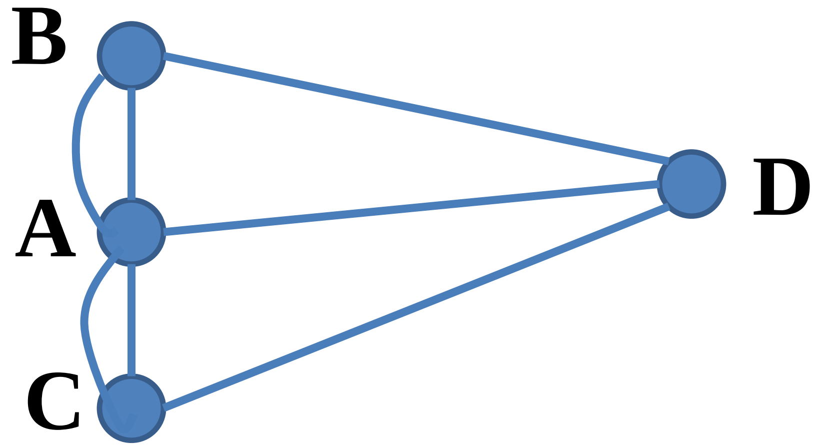
Grafu teorija ir diskrētās matemātikas nozare, kas pēdējos gados strauji attīstās un atrod aizvien jaunus pielietojumus.

Grafu teorijas pirmsākumi – 1736. gadā Leonards Eilers (1707 – 1782) atrisināja uzdevumu par Kēnigsbergas tiltiem.

Vai, staigājot pa **Kēnigsbergas tiltiem**, iespējams katru tiltu šķērsot tikai vienu reizi un atgriezties pastaigas sākumpunktā?



Tiltu novietojumam Eilers izveidoja sekojošu grafu:



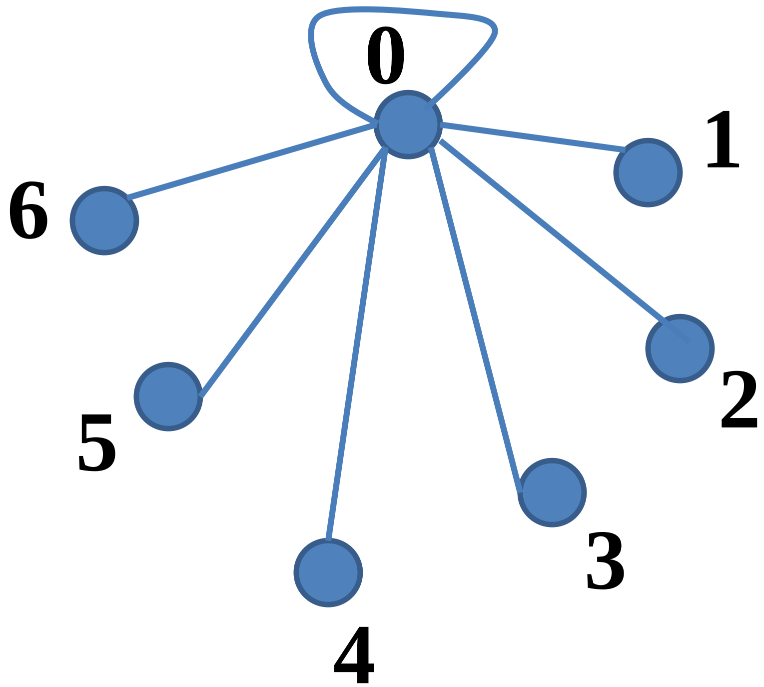
Atbilde ir <u>negatīva</u>.

Katrai virsotnei ir jābūt pāra pakāpes virsotnei.

Šādu grafa apiešanas ceļu, sauc par **Eilera ciklu**.

Domino spēle

Vai var pareizā secībā novietot kauliņus tā, lai tie izveidotu noslēgtu figūru (ciklu)?



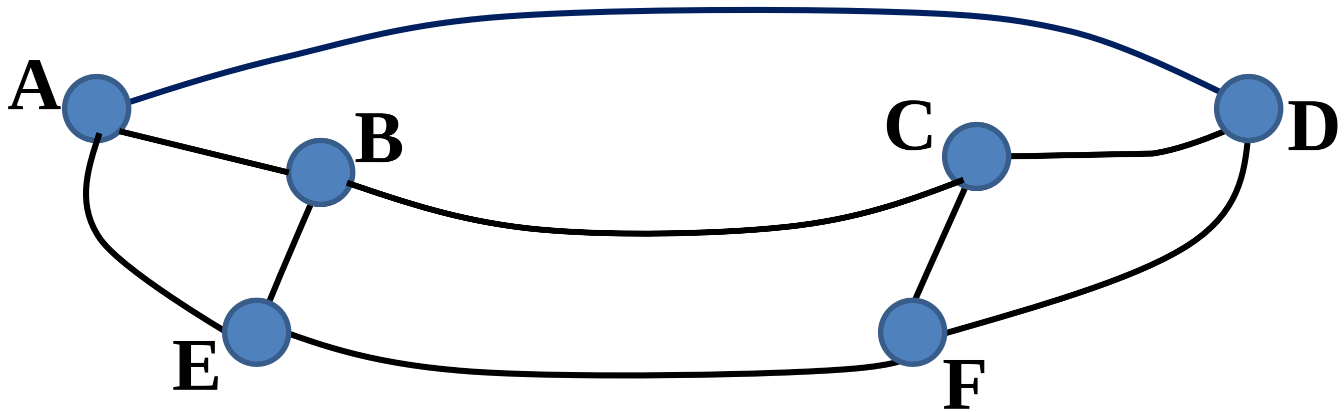
Eilers pierādīja 2 **apgalvojumus**:

- Ja grafā ir **2 nepāra virsotnes**, tad, izejot no vienas nepāra virsotnes, var nonākt otrā, ejot pa katru grafa šķautni tieši vienu reizi.
- Ja **nepāru virsotņu skaits ir 2k**, tad eksistē **k ceļi**, kuri sākas un beidzas nepāra pakāpes virsotnēs tā, ka **kopā tiek izstaigātas visas grafa šķautnes.**

Uzdevums par tramvaju līnijām

Pilsētas tramvaju sliežu tīkls pēc pārbūvēm attēlots zīmējumā.

Noteikt minimālo maršrutu skaitu, lai varētu nokļūt no jebkura punkta uz jebkuru citu. Pasažieri var pārsēsties tikai ar burtiem apzīmētajos punktos. Katrs tramvajs brauc tikai pa savu sliežu ceļu.

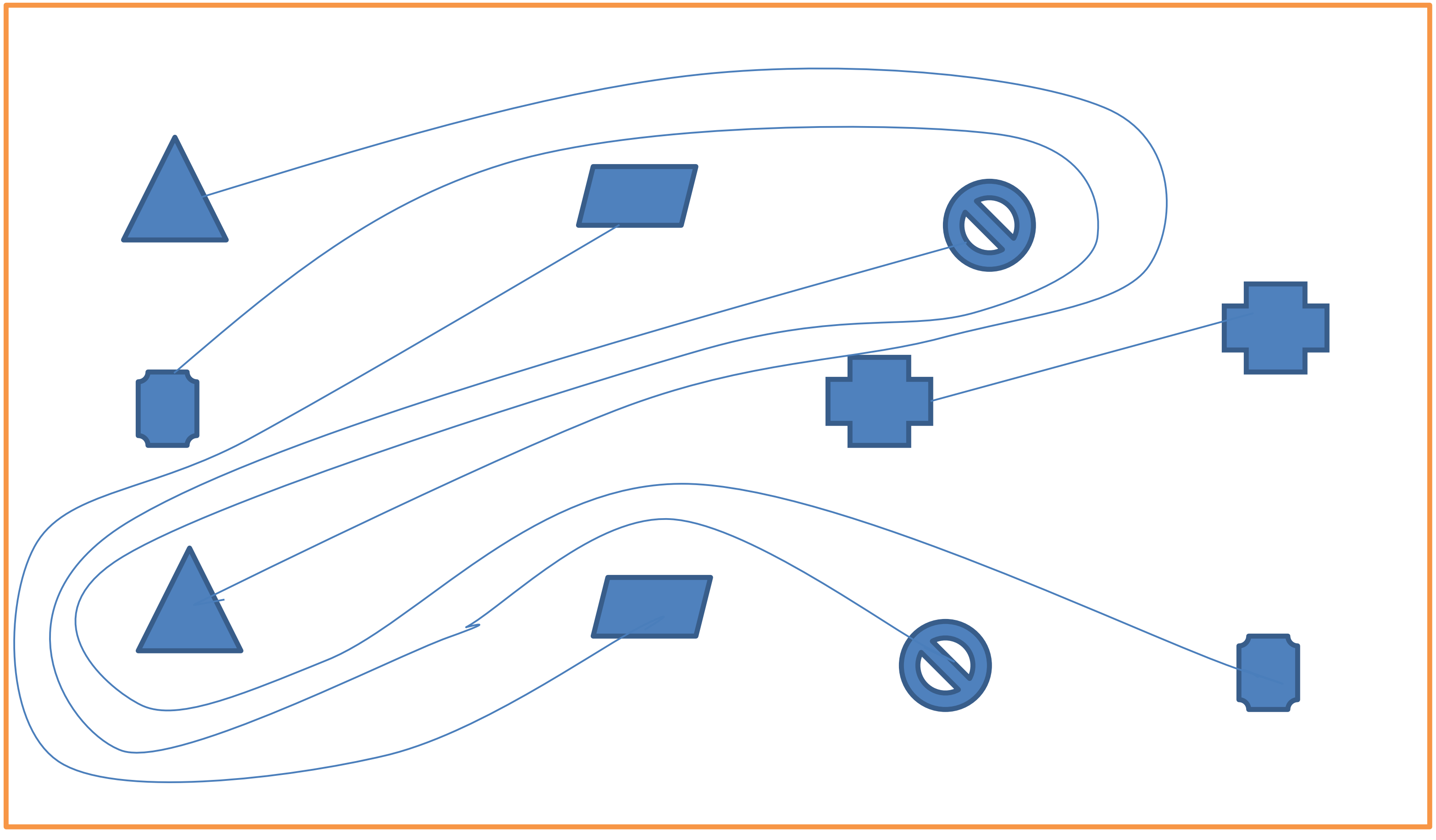


Uzdevums par radioshēmas iespiedplati

Tā ir plate no elektrību nevadoša materiāla, uz kuras tiek ar metāliskām josliņām iezīmēti pārvades celiņi, kuri nedrīkst krustoties. Citādi rodas īssavienojums.

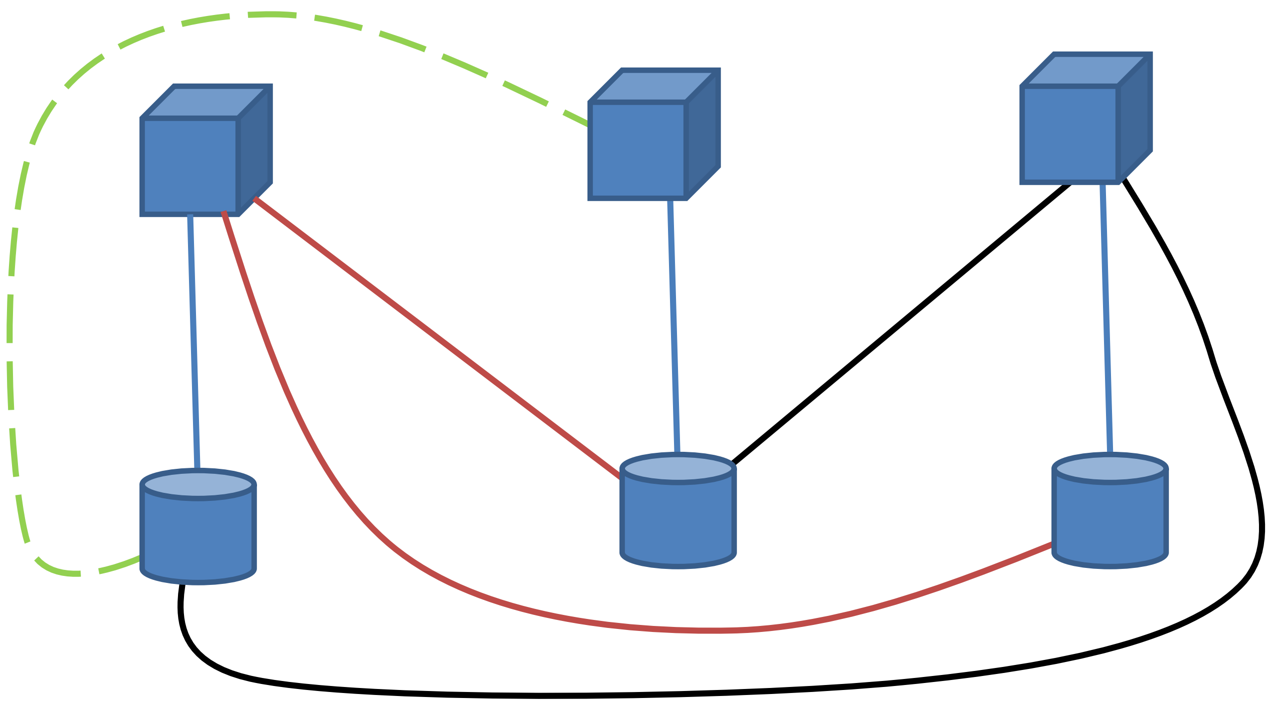
Krustoties tie var tikai punktos, kuros izvietotas diodes, triodes, kondensatori, utt.

Apskatām sekojošu plates daļu. Uzdevums: savienot vienādos objektus!



Uzdevums par trim mājām un trim akām

Sausā apvidū trīs ģimenes uzcēla sev mājas un iepretī mājām akas.



Vai iepriekš varam pateikt, kādu shēmu var konstruēt un kādu nevar?

<u>Definīcija</u>

Ja grafa virsotnēm atbilst punkti plaknē, bet šķautnēm – līnijas plaknē un, uzzīmējot visas virsotnes un to savienojošās līnijas, jebkuras divas līnijas nekrustojas, tad šo grafu sauc par **plakanu grafu**.

<u>Definīcija</u>

Par **planāru grafu** sauc grafu, kuru var attēlot kā plakanu grafu.

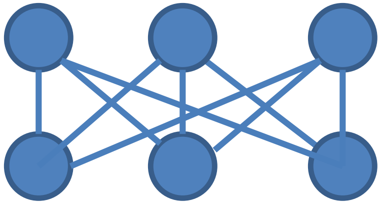
Kuratovska – Pontjagina teorēma

Grafs G ir planārs tad un tikai tad, ja tas kā savu daļu nesatur ne grafu K_5, ne grafu $K_{3,3}$.

Definīcija

Par **divdaļīgu grafu** sauc grafu G, kura virsotņu kopu V var sadalīt divās kopās V_1 un V_2 tā, ka katra grafa šķautne savieno virsotnes tikai no dažādām kopām.

$K_{3,3}$:

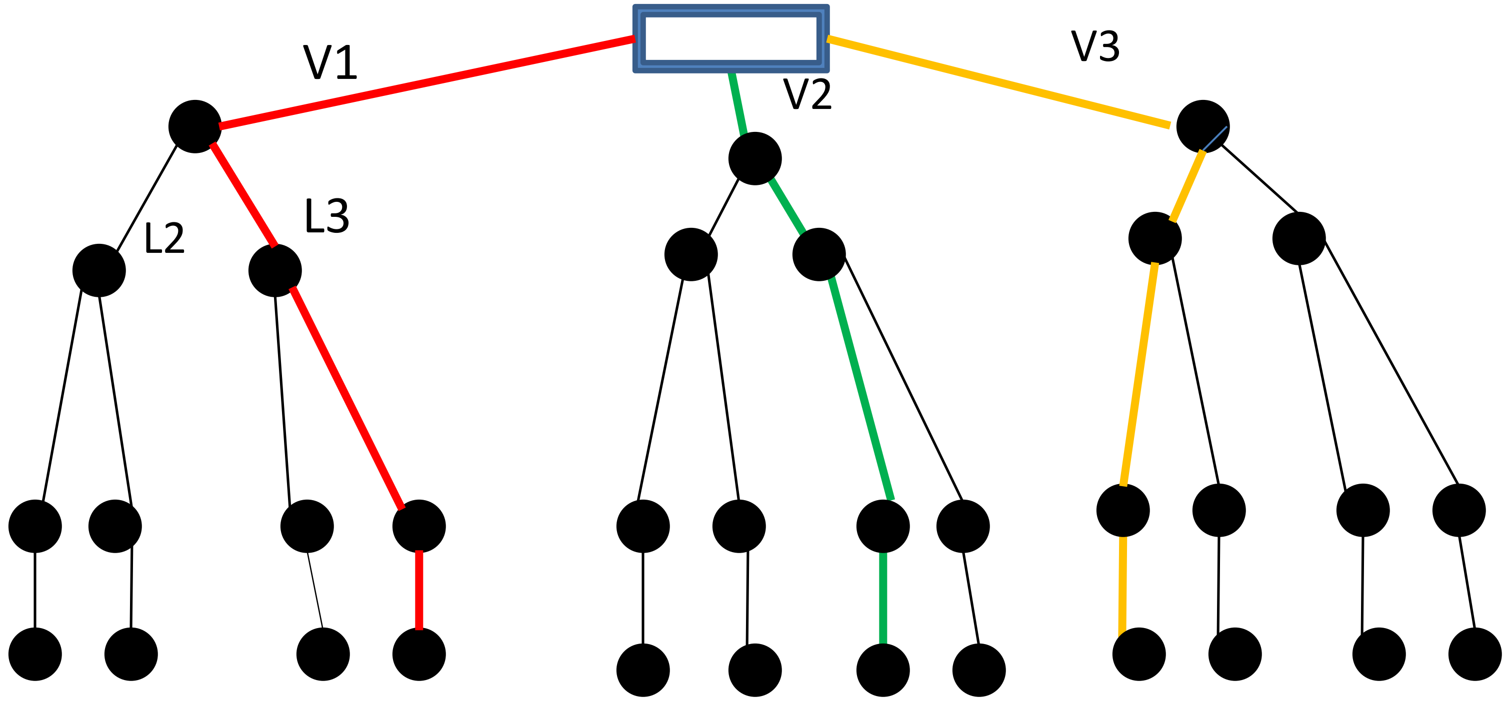


Uzdevums par stundu sarakstu

Jāsastāda stundu saraksta fragments (4 stundas) vienai mācību dienai, ja

- vēstures skolotājs var pasniegt tikai vienu no pirmajām trim stundām: 1., 2. vai 3;
- literatūras skolotāja var pasniegt tikai 2. vai 3. stundu;
- matemātikas skolotājs – vai nu tikai 1. stundu, vai tikai 2. stundu;
- fizkultūras skolotājs ir ar mieru novadīt tikai pēdējo – 4. stundu.

Grafā izdalīti 3 iespējamie stundu saraksta varianti:



Definīcija

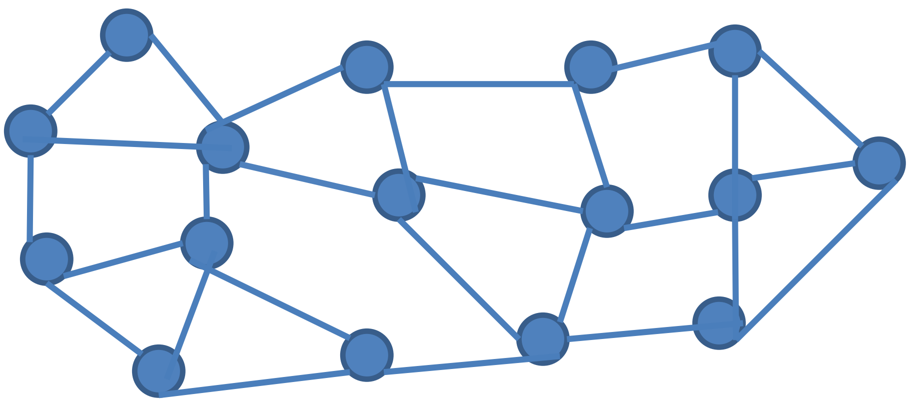
Par **koku** sauc sakarīgu grafu, kurš nesatur ciklus.

Teorēma

Koks ar *n* virsotnēm satur ***n* – 1 šķautni**.

Uzdevums par rīsu laukiem

Cik daudz aizsprostu posmu ir jālikvidē rīsu novākšanai, lai tā notiktu pēc iespējas ekonomiski?



Grafā, kas attēlo rīsu lauku, ir jānovēršs visi cikli, jāizveido koks. Koku iegūst, ja katrā no mazajiem lauciņiem likvidējam vienu aizsprostu.

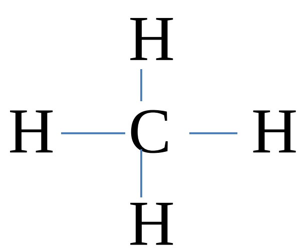
Kokam ar n virsotnēm ir $n - 1$ šķautne. Ja pavisam grafā ir N šķautnes, tad jānovāc

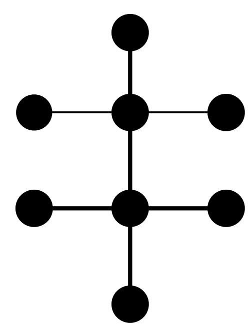
$K = N - (n - 1)$ aizsprosti.

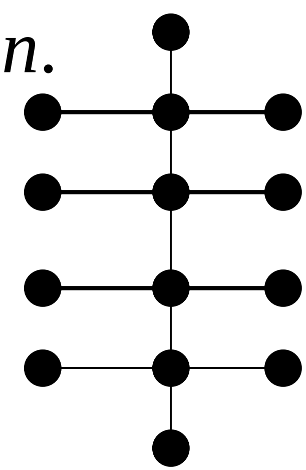
Skaitli ***K*** grafu teorijā sauc par **ciklomātisko skaitli.**

Koka vēsture

Šo svarīgo grafu klasi 1857. gadā atklāja angļu matemātiķis **Arturs Keli (1821 – 1895),** nodarbojoties ar organiskās ķīmijas uzdevumiem. Viņš centās uzskaitīt visus piesātinātos ogļūdeņražus C_nH_{2n+2} ar dotu oglekļa atomu skaitu n.







Metāns C_1H_4 **etāns** C_2H_6 **propāns** C_3H_8

Uzdevums: uzzīmēt visus kokus ar doto virsotņu skaitu

p - *virsotņu skaits*

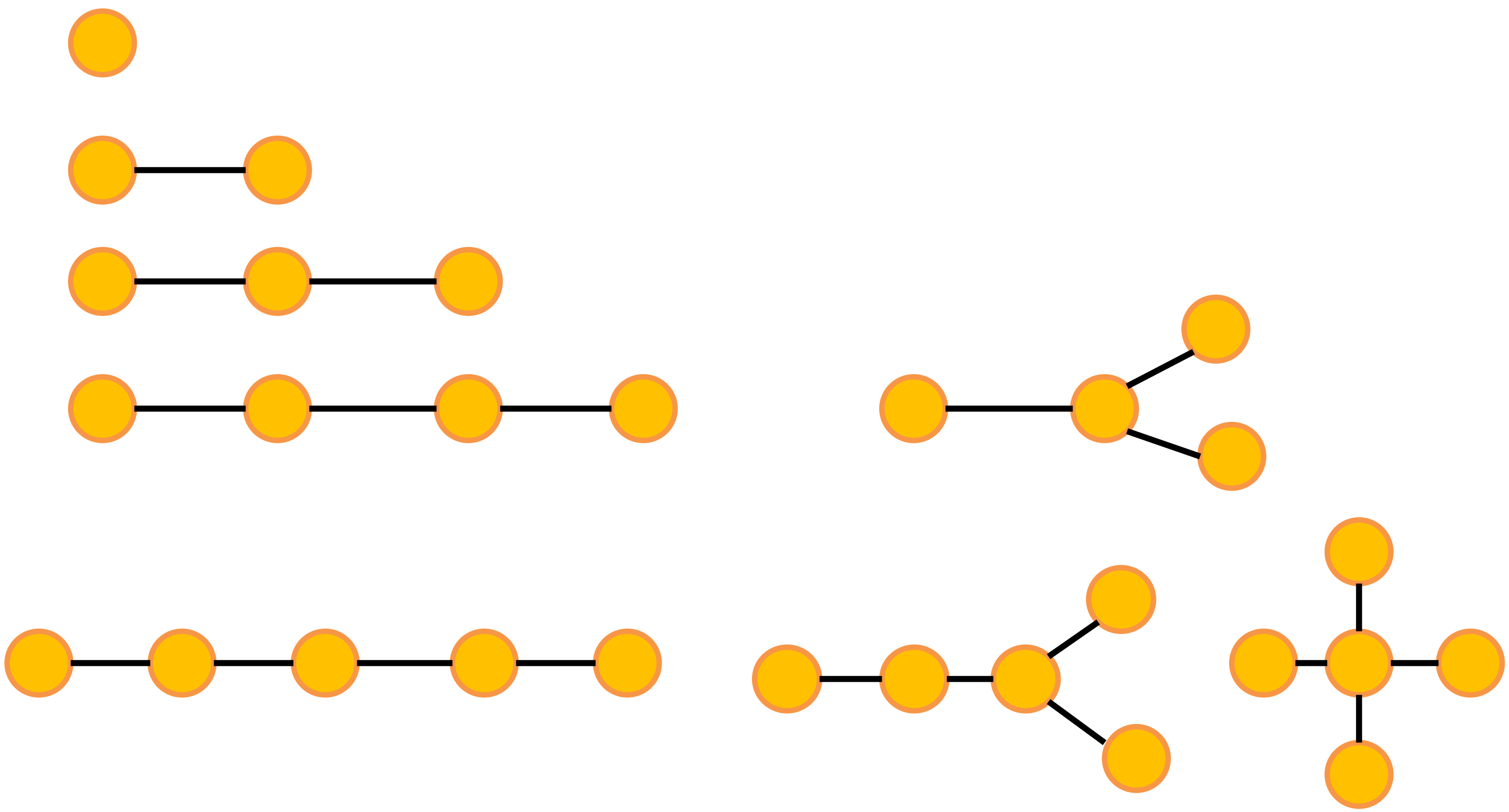
p=1:

p=2:

p=3:

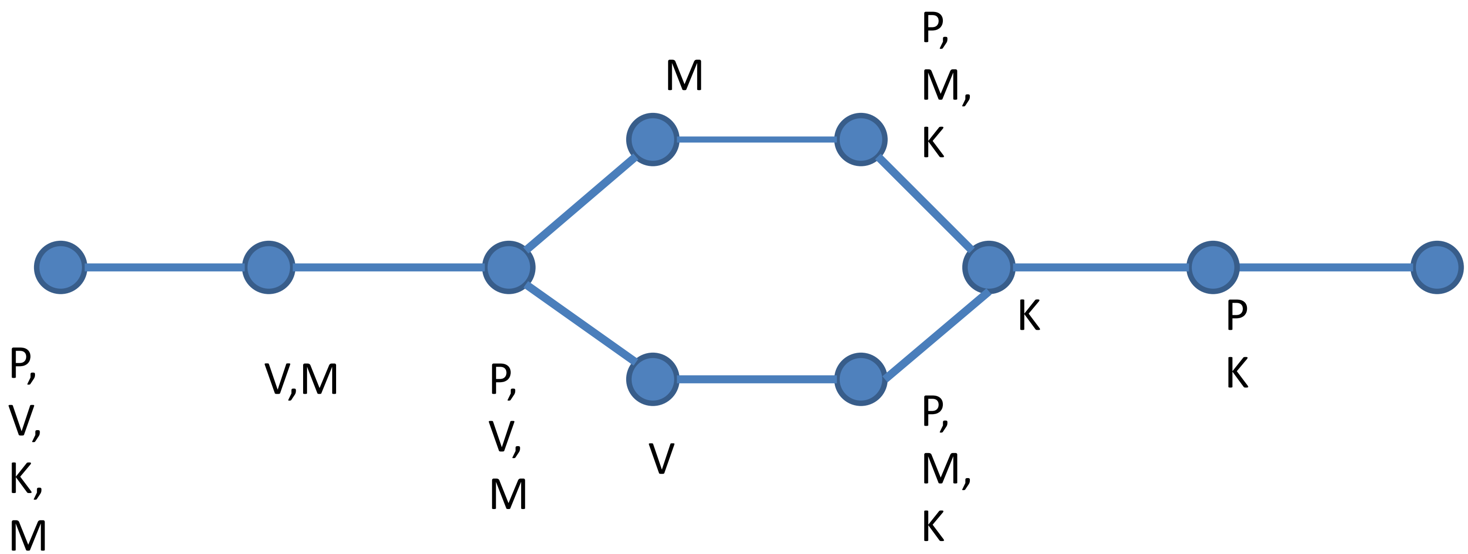
p=4:

p=5:



Uzdevums par pārcēlāju

Pārcēlājam (P) jāpārved pāri upei vilks (V), kaza (K) un kāpostu maiss (M):



Paldies par uzmanību!