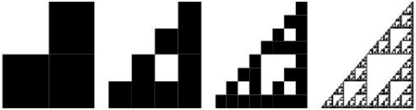
FRAKTĀĻI

LU Fizikas un matemātikas fakultāte

Prof. Inese Bula



Mazā matemātikas universitāte
2014. gada 6.decembrī

Termins "fraktālis" ir radies no latīņu valodas: darbības vārda ′frangere′ — lauzt un īpašības vārda ′fractus′ — daļveida, neregulārs. Šo terminu izveidoja 1975.gadā Benuā Mandelbrots (*Benoit Mandelbrot*), kurš tad arī tiek uzskatīts par fraktālās ģeometrijas pamatlicēju.

1.zīm. Benoit B. Mandelbrot, 20.11.1924. — 14.10.2010.

Lielā terminu vārdnīca, http://www.termini.lv :
Fraktālis — attēlā ietverta ğeometriska figūra (kontūra), kas precīzi saglabā savu apveidu neatkarīgi no tā, kā tiek palielināts vai samazināts pats attēls (piem., krasta līnija, mākonis, koks, u.c.).

B.Mandelbrota def.,
http://astronomy.swin.edu.au/ pbourke/fractals/fracintro:
Fraktālis ir neregulāra vai sadrumstalota forma, kuru var sadalīt mazākās daļās tā, ka jauniegūtās daļas ir sākotnējās formas samazināta izmēra kopijas.

Formāla matemātiska def.:
Fraktālis ir punktu kopa, kuras fraktālā dimensija ir lielāka par tās topoloğisko dimensiju.

Parasti ar jēdzienu "fraktālis" saprot tādu kopu F, kurai piemīt vairākas specifiskas īpašības:

⋆ kopa F ir ar smalku struktūru, t.i., tā satur daļas patvaļīgi mazā mērogā; jo vairāk attēls tiek palielināts, jo precīzāk redzama tā struktūra;

⋆ F ir pārāk neregulāra, lai to varētu apskatīt tradicionālās ğeometrijas valodā gan globāli, gan lokāli;

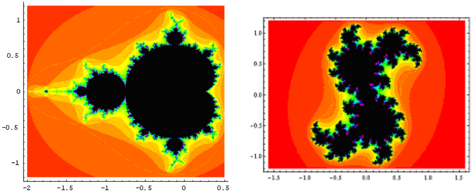
⋆ bieži kopai F ir kāda no pašlīdzības formām (stingra, daļēja vai statistiska);

⋆ bieži vien kopa F tiek definēta vienkāršā veidā (piemēram, rekursīvi).

Fraktāļus iedala divās lielās grupās: determinētie fraktāļi (*deterministic fractals*) un gadījuma fraktāļi (*random fractals*).

Determinētie fraktāļi tiek veidoti, izmantojot matemātiskas konstrukcijas. Būtībā tie ir iterāciju (rekursīva algoritma) rezultāts.

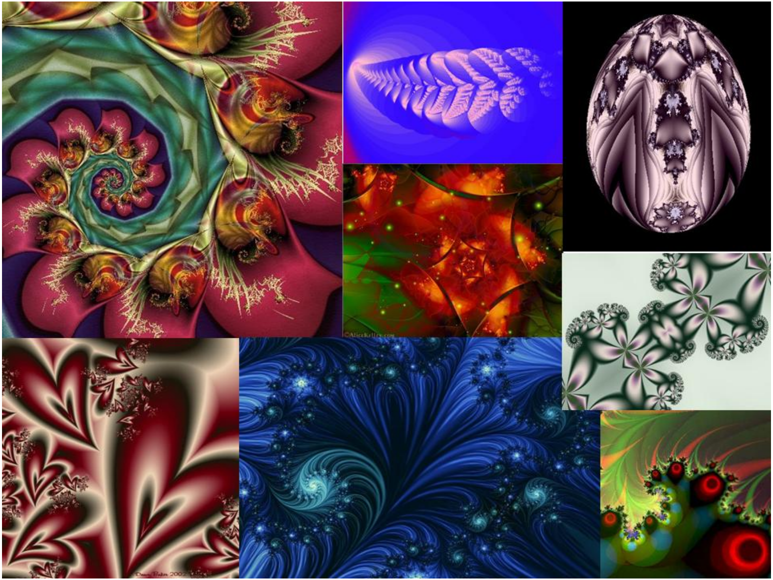
Determinētie fraktāļi ir Kantora kopa, Koha līkne, Serpinska trīsstūris un paklājs, arī Mandelbrota kopa un Džūlija kopas, u.c.



2.zīm. Mandelbrota kopa un viena no Džūlija kopām

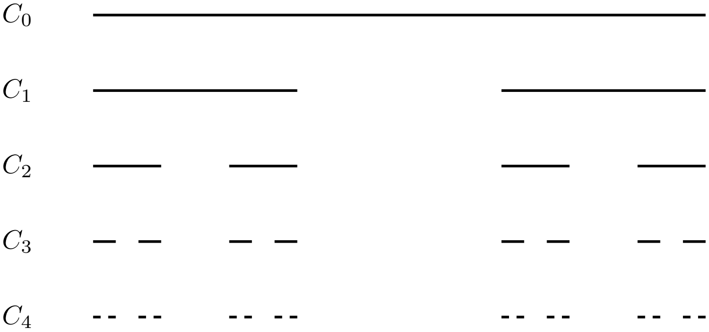
Gadījuma fraktāļiem ir daudz lielāka praktiska nozīme nekā determinētajiem. Gadījuma fraktāļi bieži tiek modelēti un pēc tam analizēti tādās nozarēs kā ķīmija, fizika, bioloģija. Būtiska gadījuma fraktāļu iezīme ir tā, ka fraktāļa veidošanās procesā ir iesaistīts nejaušības moments. Līdz ar to viena un tā paša procesa rezultātā var tikt iegūti atšķirīgi fraktāļi.

Gadījuma fraktāļi pamatā ir dabas fraktāļi, tādi kā papardes lapa, zibens šautra, krasta līnija, kalnu kontūras, asinsvadu sistēma, bronhu sazarojums, u.c.



KLASISKIE DETERMINĒTIE FRAKTĀĻI

Klasiskā Kantora kopa jeb **Kantora putekļi** nosaukta Georga Kantora vārdā, kurš šo kopu aprakstījis 1883.gadā.



3. zīm. Kantora kopas konstrukcija

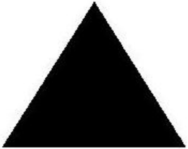
Formāli par fraktāli var saukt tikai tādu objektu, kuram iterācijas ir izpildītas bezgalīgi daudzas reizes. Figūras, kuras veidojas iterāciju laikā, dēvē par pirmsfraktāļiem lielumā k, kur k norāda izpildīto iterāciju skaitu. Redzes izšķirtspējas dēļ pēc zināma skaita iterācijas soļiem iegūtais pirmsfraktāļa attēls jau sakritīs ar īstā fraktāļa attēlu.

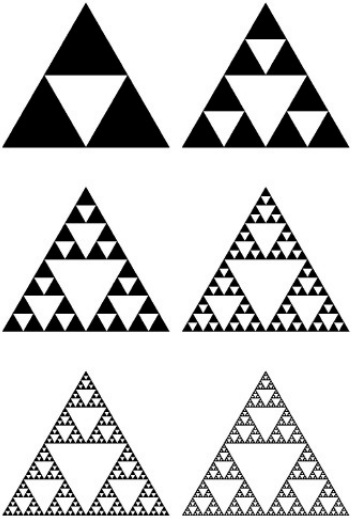
Izmesto intervālu garumu summa ir:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+...+\frac{2^{n-1}}{3^n}+...=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

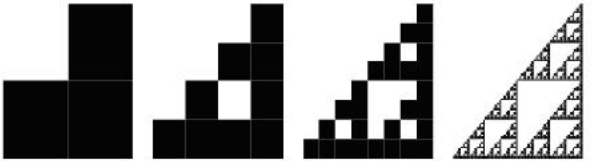
Vaclavs Serpinskis (*Waclaw Sierpinski*) (1882-1969): sākumā ir dots regulārs trīsstūris ar 1 vienību garu malu. Savienojot visu malu viduspunktus, iegūsim regulāru trīsstūri, kuru izgriežam ārā no sākotnējā trīsstūra. Paliek trīs mazāki trīsstūri, kuru malu garumi ir $\frac{1}{2}$ vienības. Nākošajā solī atkārtojam šo procedūru ar katru no trim trīsstūriem, rezultātā iegūsim 9 regulārus trīsstūrus ar malas garumu $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Turpinot šo procedūru, n-tajā solī mēs iegūsim 3^n regulārus trīsstūrus, kuru malas garums ir $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ja pieļaujam, ka procedūru var atkārtot bezgalīgi daudzas reizes, tad kā robežgadījumu iegūsi **Serpinska trīsstūri**.





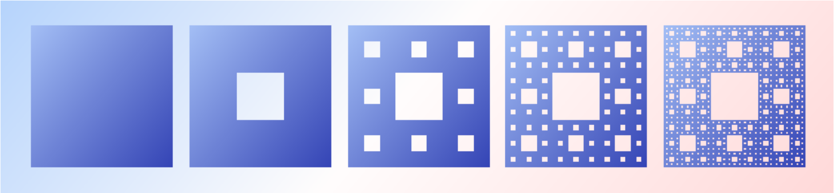
4.zīm. Serpinska trīsstūra pirmās 6 iterācijas

Serpinska trīsstūri var izveidot arī, ja kā sākumkopu izvēlas kvadrātu.



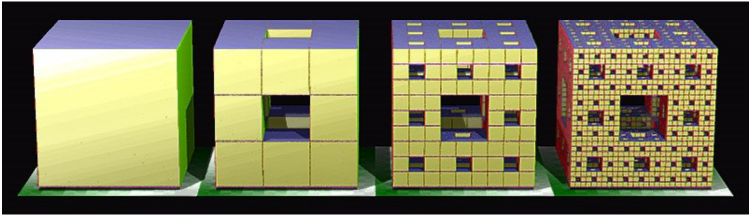
5.zīm. Serpinska trīsstūris ar sākumkopu kvadrāts

Serpinskis klasisko fraktāļu galerijai ir pievienojis vēl vienu objektu — **Serpinska paklāju** (*Sierpinski Carpet*). Šajā gadījumā 0.solis ir kvadrāts plaknē. Tas tiek sadalīts 9 mazos kvadrātiņos, no kuriem vidējo izņem ārā. Process tiek atkārtots bezgalīgi daudzas reizes.



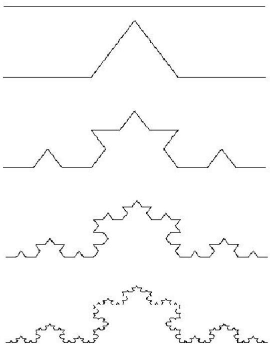
6.zīm. Serpinska paklāja pirmās 4 iterācijas

Mengera sūklis (*Menger Sponge*), tā autors ir Karls Mengers (*Karl Menger*), 1926.gads.



7.zīm. Mengera sūkļa pirmās 3 iterācijas

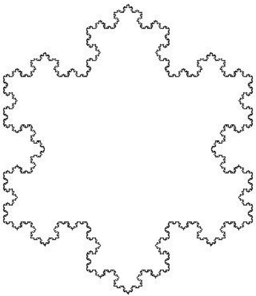
Koha līkne (*Koch Curve*). Zviedru matemātiķis Helge fon Kohs (*Helge von Koch*) to izveidoja 1904.gadā.



8.zīm. Koha līknes veidošana (pirmie četri soļi)

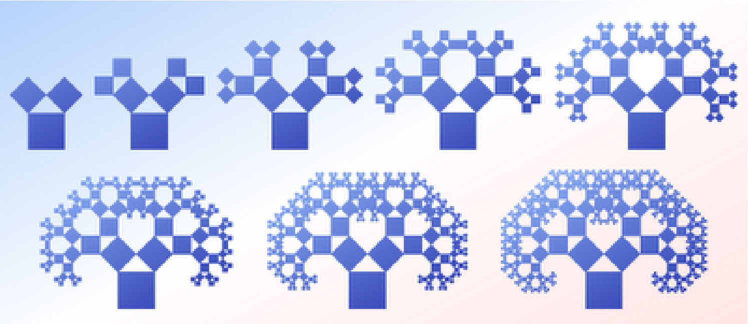
Koha līknei piemīt viena svarīga īpašība — tā ir bezgalīgi gara.

Savietojot kopā 3 Koha līknes, iegūst noslēgtu līkni, kuru sauc par **Koha sniegpārsliņu** (*Koch Snowflake*). Interesants ir fakts, ka sniegpārsliņa acīmredzami ierobežo galīgu laukumu, bet tās perimetrs ir bezgalīgi liels.



9.zīm. Koha sniegpārsliņa

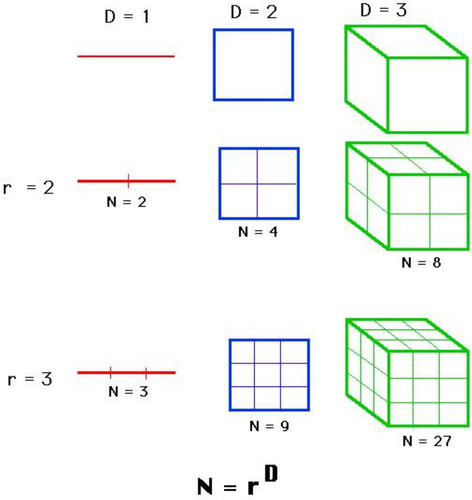
Pitagora koks (*Pythagorean tree*), 1957.gads, tā autors ir vācu matemātiķis A.E.Bosmans (*Bosman*) (1891-1961).



10.zīm. Pitagora koka konstrukcija

Dimensija

Samazinot divas reizes nogriežņa garumu, iegūsim divas tā samazinātas kopijas; ja samazināsim sākotnējā nogriežņa garumu trīs reizes, iegūsim trīs kopijas. Savukārt kvadrātā ietilpst četras kopijas, kuru malas garums ir divreiz mazāks kā sākotnējā kvadrāta malas garums; ja kopijas malas garums trīsreiz mazāks — būs 9 kopijas. Līdzīgi varam aplūkot kubu, tanī ietilpst 8 kopijas ar divreiz mazākām malām un 27 kopijas ar trīsreiz mazākām malām.



11.zīm. N — kopiju skaits, r — mērogošanas konstante

Apzīmēsim ar N kopiju skaitu un ar r skaitli, kas rāda, cik reizes samazināta figūra (skatīt 11.zīmējumu), tad iegūtos rezultātus varam apkopot tabulā:

figūra	dimensija	r	N
nogrieznis	1	2	$2 = 2^1$
nogrieznis	1	3	$3 = 3^1$
kvadrāts	2	2	$4 = 2^2$
kvadrāts	2	3	$9 = 3^2$
kubs	3	2	$8 = 2^3$
kubs	3	3	$27 = 3^3$

Tabula atspoguļo sakarību starp figūras kopiju skaitu samazinātajā mērogā un tās dimensiju: kopiju skaits ir vienāds ar mērogošanas konstanti kāpinātu dimensijas pakāpē D, t.i.,

$$N = r^D.$$

No šīs formulas var izrēķināt dimensiju D, ja zinām kopiju skaitu N un mērogošanas konstanti r:

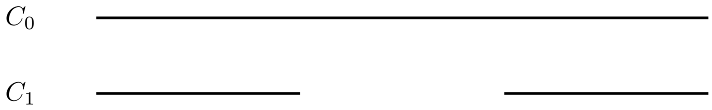
$$D = \frac{\ln N}{\ln r}. \qquad (*)$$

Kā redzams, šī dimensijas noteikšanas formula (*) atrod dimensiju nogrieznim, kvadrātam, kubam.

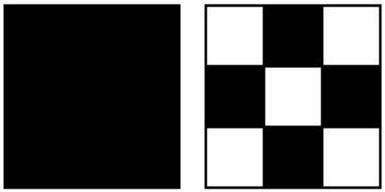
Ar formulas (*) palīdzību atrasto lielumu sauc par kopas **fraktālo dimensiju** (saka arī — līdzības dimensija) (*fractal dimension or similarity dimension*). Jēdziens par fraktālo dimensiju pirmo reizi parādījies jau 1919.gadā F.Hausdorfa darbā, tomēr tikai Mandelbrots apvienoja šīs idejas un uzsāka sistemātisku fraktāļu pētīšanu. Jēdzienu par fraktālo dimensiju Mandelbrots izveidoja 1977.gadā.

Fraktālās dimensijas aprēķināšana

1. Kantora kopa - taisnes apakškopa

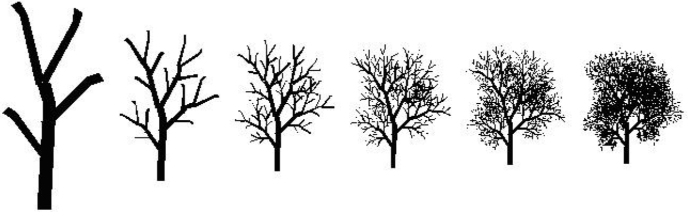


Fraktālā dimensija Kantora kopai $D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$.



2. Plaknes fraktālis

Kvadrāta malas garums ir samazinājies 3 reizes (mērogošanas konstante) un 1.iterācijā ir 4 kvadrāta kopijas, tāpēc $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$.



PALDIES PAR UZMANĪBU!