Diferenču vienādojumi

Mazā matemātikas universitāte
2014. gada 5.aprīlī

LU Fizikas un matemātikas fakultāte
profesore **Inese Bula**

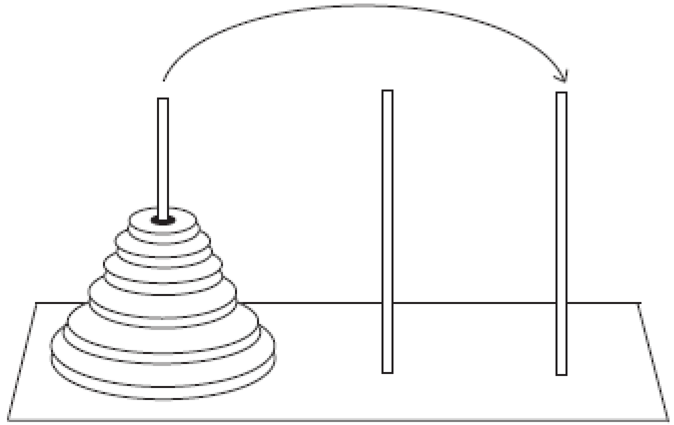
Diferenču vienādojuma jēdziens

- Diferenču vienādojums (rekurences sakarība) ir tāds vienādojums, kas rekursīvi definē skaitļu virkni, pie tam ir doti viens vai vairāki virknes sākuma locekļi: katrs nākošais virknes loceklis tiek definēts kā funkcija no iepriekšējiem locekļiem.

/pēc Wikipedijas/

$$a_{n+1} = f(a_n) \text{ vai}$$
$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}), \text{ vai}$$
$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}), \text{ u.c.}$$

Hanojas tornis



Ir trīs stabi. Uz viena no stabiem ir uzvērti diski, apakšā pats lielākais, uz tā nākošais lielākais un tā tālāk, virspusē pats mazākais. Jāpārvieto diski no viena staba uz citu. Nedrīkst likt uz mazāka diska virsū lielāku disku. Cik pācelšanas vajadzīgas, ja disku skaits ir 64?

Šāda problēma ir radusies austrumu Āzijā, kur kādā templī priesteri pārceļ tieši vienu disku katru dienu un disku skaits ir 64. Kad pārcelšana tikšot pabeigta, tad pienākšot pasaules gals!

disku skaits	1	2	3	4	5	...
pārvietošanu skaits	1	3	7	15	31	...

Katru nākošo virknes locekli var iegūt, divkāršojot iepriekšējo un pieskaitot viens. Nepieciešams ilgāks laiks, lai atrastu pārvietošanu skaitu, ja disku skaits ir 64. Šis skaitlis ir $1,84467 * 10^{19}$ jeb apmēram 18,5 miljonu miljonu miljoni!

Problēmu var apskatīt kā 1.kārtas diferenču vienādojumu

$$x_{n+1} = 2x_n + 1,\ x_1 = 1.$$

Atrisinājumu varam atrast, atrodot katru nākamo virknes locekli:

$x_1 = 1,$

$x_2 = 2x_1 + 1 = 2 * 1 + 1 = 3,$

$x_3 = 2x_2 + 1 = 2(2x_1 + 1) + 1 = 4x_1 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7,$

$x_4 = 2x_3 + 1 = 2(4x_1 + 2 + 1) + 1 = 8x_1 + 4 + 2 + 1 =$
$= 8 + 4 + 2 + 1 = 15,$

$x_5 = 2x_4 + 1 = 2(8x_1 + 4 + 2 + 1) + 1 = 16x_1 + 8 + 4 + 2 + 1 =$
$= 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31,$

jeb $x_5 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^2 + 2^0$.

Vispārīgā gadījumā

$x_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^3 + 2^2 + 2 + 1,$

tā ir ģeometriskā progresija ar pirmo locekli 1 un kvocientu 2,

tās summa ir $x_n = \dfrac{1 * (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$, $n \geq 1$.

Piemēri

1) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$

2) $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots$

3) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

4) $2, 6, 18, 54, 162, 486, \ldots$

5) $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, \ldots$

6) $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$

7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

1) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$ $\quad a_n = 2n - 1$

2) $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots$ $\quad a_n = 2n$

3) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ $\quad a_n = 2^{n-1}$

4) $2, 6, 18, 54, 162, 486, \ldots$ $\quad a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

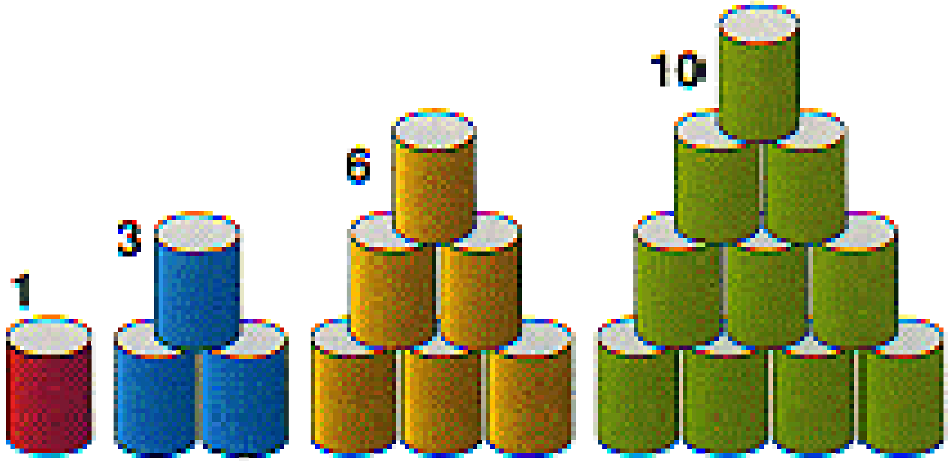
5) $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, \ldots$ $\quad a_n = n!$

6) $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots$ $\quad a_n = n^2$

7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$

1)	$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$	$a_n = 2n - 1$	$a_{n+1} = a_n + 2$
2)	$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$	$a_n = 2n$	$a_{n+1} = a_n + 2$
3)	$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$	$a_n = 2^{n-1}$	$a_{n+1} = 2a_n$
4)	$2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$	$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$	$a_{n+1} = 3a_n$
5)	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, \dots$	$a_n = n!$	$a_{n+1} = (n+1)a_n$
6)	$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots$	$a_n = n^2$	$a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + 1)^2$
7)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$	$a_n = \frac{1}{n}$	$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$

Trīsstūrveida skaitļi



- 1.kārtas diferenču vienādojums

$$x_{n+1} = x_n + n + 1, \quad n = 1,2,3,..., \quad x_1 = 1$$

- Vispārīgais atrisinājums ir formā

$$x_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Kā pārbaudīt?

Vai patiešām $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ir diferenču

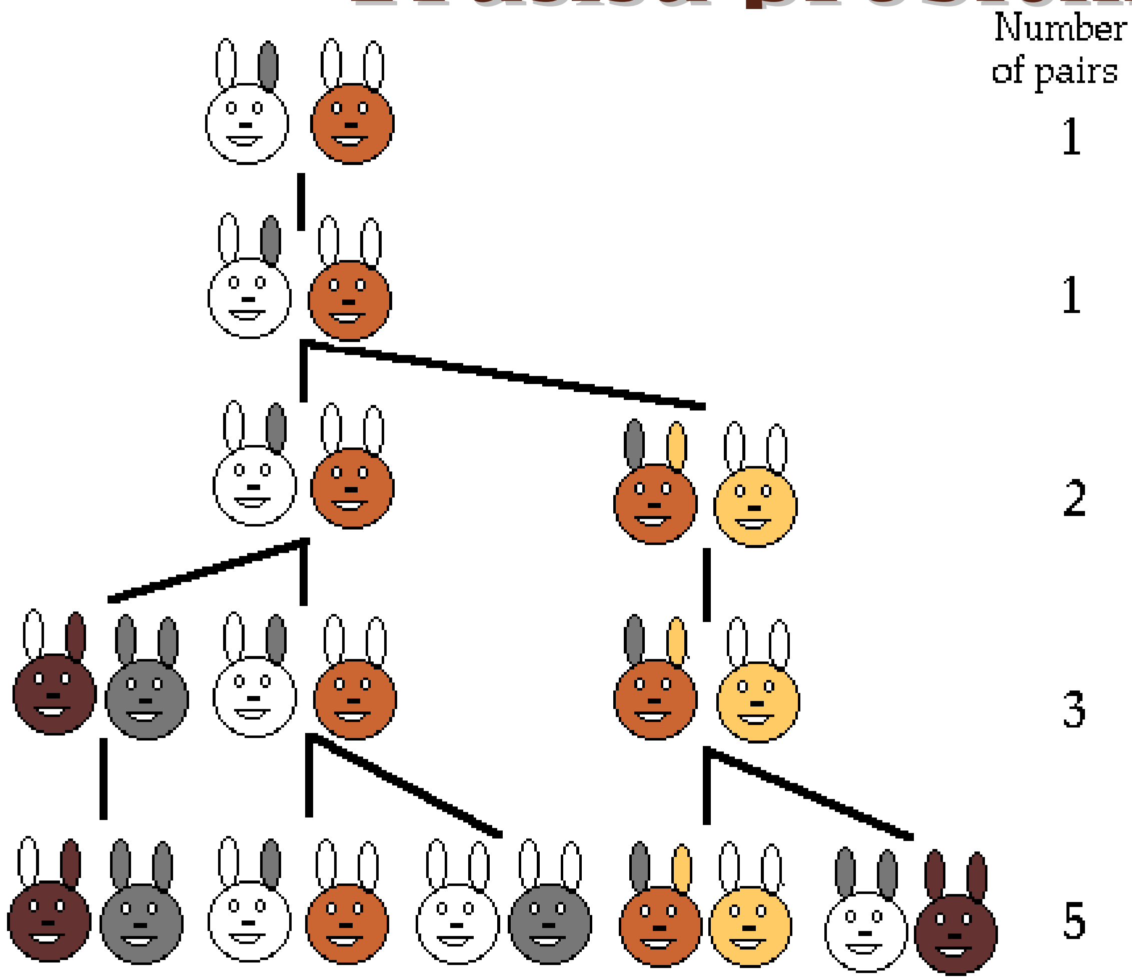
vienādojuma $x_{n+1} = x_n + n + 1$ atrisinājums?

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$x_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 =$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

Trusīšu problēma



- 1202.gadā, Itālijā, Leonardo Pisano jeb Fibonacci publicēja grāmatu *Liber Abaci*

Fibonači skaitļi

2.kārtas diferenču vienādojums

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

Ja $x_0 = x_1 = 1$, tad iegūsim virkni

$x_2 = 1 + 1 = 2,$

$x_3 = 2 + 1 = 3,$

$x_4 = 3 + 2 = 5$

$x_5 = 5 + 3 = 8,$

$x_6 = 8 + 5 = 13,$ utt.

Vai varam pateikt, kā izskatīsies x_n atkarībā no n vispārīgā gadījumā?

Lineāri 2.kārtas diferenču vienādojumi

Vienādojumu

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

sauc par lineāru homogēnu 2.kārtas diferenču vienādojumu ar konstantiem koeficientiem.

Raksturīgais vienādojums ir kvadrātvienādojums

$$au^2 + bu + c = 0.$$

Atkarībā no tā saknēm var uzrakstīt vispārīgo atrisinājumu.

$\star$ Ja raksturīgajam vienādojumam ir
divas atšķirīgas reālas saknes u_1 un u_2,
tad vispārīgais atrisinājums ir formā
$x_n = C_1(u_1)^n + C_2(u_2)^n$,
kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

$\star$ Ja raksturīgajam vienādojumam ir
divas vienādas reālas saknes $u_1 = u_2$,
tad vispārīgais atrisinājums ir formā
$x_n = C_1(u_1)^n + C_2 n(u_2)^n$,
kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

⋆ Ja raksturīgajam vienādojumam ir kompleksas saknes $u_1 = c + di$ un $u_2 = c - di$, tad vispārīgais atrisinājums ir formā

$x_n = C_1 r^n \cos(n\theta + C_2)$,

kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes un $r = \sqrt{c^2 + d^2}$, $\cos\theta = \frac{c}{r}$, $\sin\theta = \frac{d}{r}$, $-\pi < \theta \leq \pi$.

Piemēri

$\star$ $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 0$

raksturīgais vienādojums ir

$u^2 + 4u - 5 = 0,$

tā saknes ir $u_1 = 1$, $u_2 = -5$.

Vispārīgais atrisinājums ir

$x_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-5)^n = C_1 + (-5)^n C_2.$

Ja doti sākumnosacījumi $x_0 = 9$ un $x_1 = 3$, tad

$$x_0 = C_1 + C_2 = 9,$$
$$x_1 = C_1 - 5C_2 = 3.$$

Sistēmas atrisinājums ir $C_1 = 8$ un $C_2 = 1$, tad

$x_n = 8 + (-5)^n.$

Tātad rekurences sakarība

$x_{n+2} = -4x_{n+1} + 5x_n$

ar sākumnosacījumiem $x_0 = 9$ un $x_1 = 3$

un naturāla argumenta funkcija $x_n = 8 + (-5)^n$, $n \geq 0$,

ģenerē vienu un to pašu virkni:

9, 3, 33, -117,...

$\star$ $4x_{n+2} - 12x_{n+1} + 9x_n = 0$

raksturīgais vienādojums ir

$4u^2 - 12u + 9 = 0,$

tā saknes ir $u_1 = u_2 = \frac{3}{2}$.

Vispārīgais atrisinājums ir

$x_n = C_1 \cdot (\frac{3}{2})^n + C_2 \cdot n \cdot (\frac{3}{2})^n$.

Ja doti sākumnosacījumi $x_0 = 9$ un $x_1 = 3$, tad

$x_0 = C_1 + 0 = 9,$
$x_1 = 9 \cdot \frac{3}{2} + C_2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = 3.$

Sistēmas atrisinājums ir $C_1 = 9$ un $C_2 = -7$, tad

$x_n = 9 \cdot (\frac{3}{2})^n - 7n \cdot (\frac{3}{2})^n = (\frac{3}{2})^n(9 - 7n).$

Fibonači diferenču vienādojuma

$\star\ x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$

raksturīgais vienādojums ir

$u^2 - u - 1 = 0,$

tā saknes ir $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ un $u_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vispārīgais atrisinājums ir

$x_n = C_1 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + C_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$

Tā kā sākumnosacījumi $x_0 = x_1 = 1$, tad

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} C_2 = 1. \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājums ir $C_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ un $C_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$, tad

$x_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10} + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$

Lietojumi

Ar diferenču vienādojumu palīdzību pēta likumsakarības ekonomikā, bioloģijā, sociālajos procesos, utt.
Piemēram, logistiskais vienādojums

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

ir viens no tādiem vienādojumiem, kuru izmanto populāciju modeļos. Kaut arī tas izskatās samērā vienkārši un tam var atrast vispārīgo atrisinājumu, tā izturēšanās, mainot sākumvērtības, ir neprognozējama. Tas ir viens no vienādojumiem, kas apraksta haotisku procesu.

Paldies par uzmanību!