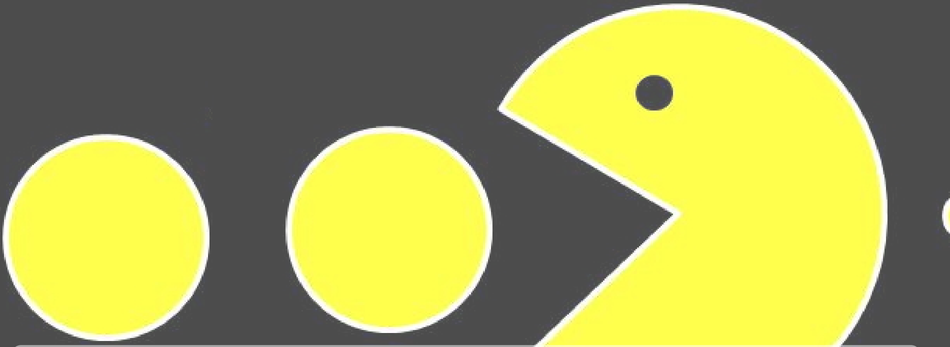
Nevienādības un to pierādījumi

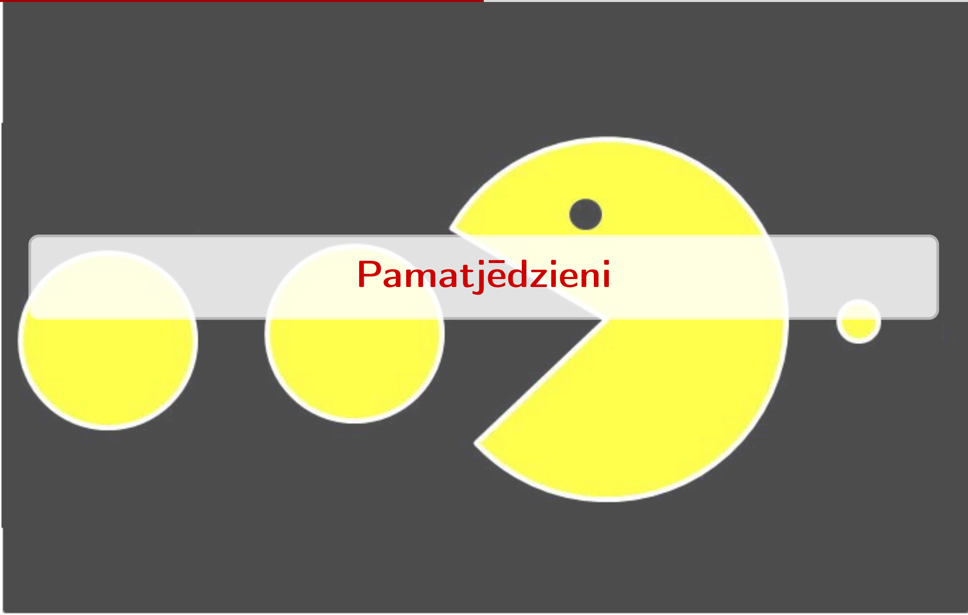


Mārtiņš Kokainis

Latvijas Universitāte, NMS

Rīga, 2014

Saturs



Pamatjēdzieni

Nevienādības

Nevienādība rodas, ja divas matemātiskās izteiksmes savieno ar kādu no zīmēm $<$, $>$, $\geq$ vai $\leq$. Turklāt nevienādība var būt patiesa vai aplama.

Piemēram,

- $3 + 5 \leq 8$ – patiesa nevienādība;
- $2 - 2 > 1$ – aplama nevienādība.

Par skaitlisku nevienādību sauc tādu nevienādību, kas nesatur mainīgos.

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).
2. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).
2. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
3. Ja $a > b$, tad jebkuram reālam skaitlim c izpildās nevienādības $a + c > b + c$ un $a - c > b - c$.

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).
2. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
3. Ja $a > b$, tad jebkuram reālam skaitlim c izpildās nevienādības $a + c > b + c$ un $a - c > b - c$.
4. Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $ac > bc$, bet ja $c < 0$, tad nevienādības zīme mainās uz pretējo: $ac < bc$.

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).
2. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
3. Ja $a > b$, tad jebkuram reālam skaitlim c izpildās nevienādības $a + c > b + c$ un $a - c > b - c$.
4. Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $ac > bc$, bet ja $c < 0$, tad nevienādības zīme mainās uz pretējo: $ac < bc$.
5. Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$.

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).
2. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
3. Ja $a > b$, tad jebkuram reālam skaitlim c izpildās nevienādības $a + c > b + c$ un $a - c > b - c$.
4. Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $ac > bc$, bet ja $c < 0$, tad nevienādības zīme mainās uz pretējo: $ac < bc$.
5. Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$.
6. Ja $a > b$ un $c > d$, turklāt $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ un $d > 0$ (visi četri skaitļi ir pozitīvi), tad $ac > bd$.

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).
2. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
3. Ja $a > b$, tad jebkuram reālam skaitlim c izpildās nevienādības $a + c > b + c$ un $a - c > b - c$.
4. Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $ac > bc$, bet ja $c < 0$, tad nevienādības zīme mainās uz pretējo: $ac < bc$.
5. Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$.
6. Ja $a > b$ un $c > d$, turklāt $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ un $d > 0$ (visi četri skaitļi ir pozitīvi), tad $ac > bd$.
7. Ja $a > b$ un $a > 0$, $b > 0$, tad $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Skaitlisko nevienādību īpašības

1. Ja $a > b$, tad $b < a$ (un otrādi: ja $a < b$, tad $b > a$).
2. Ja $a > b$ un $b > c$, tad $a > c$.
3. Ja $a > b$, tad jebkuram reālam skaitlim c izpildās nevienādības $a + c > b + c$ un $a - c > b - c$.
4. Ja $a > b$ un $c > 0$, tad $ac > bc$, bet ja $c < 0$, tad nevienādības zīme mainās uz pretējo: $ac < bc$.
5. Ja $a > b$ un $c > d$, tad $a + c > b + d$.
6. Ja $a > b$ un $c > d$, turklāt $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ un $d > 0$ (visi četri skaitļi ir pozitīvi), tad $ac > bd$.
7. Ja $a > b$ un $a > 0$, $b > 0$, tad $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.
8. Ja $a > b$ un $a > 0$, $b > 0$, tad jebkuram naturālam skaitlim n ir patiesa nevienādība $a^n > b^n$.

Par **nevienādību ar nezināmajiem** (vai īsāk – vienkārši par nevienādību) sauc nevienādību, kas satur vienu vai vairākus mainīgos. Tās mainīgo vērtības, ar kurām iegūtā skaitliskā nevienādība ir patiesa, sauc par nevienādības atrisinājumiem.

Par **nevienādību ar nezināmajiem** (vai īsāk – vienkārši par nevienādību) sauc nevienādību, kas satur vienu vai vairākus mainīgos. Tās mainīgo vērtības, ar kurām iegūtā skaitliskā nevienādība ir patiesa, sauc par nevienādības atrisinājumiem.

Atrisināt nevienādību nozīmē **atrast visus** tās atrisinājumus **un pierādīt**, ka citu atrisinājumu nav. Visu nevienādības atrisinājumu apvienojumu sauc par šīs nevienādības atrisinājumu kopu.

Par **nevienādību ar nezināmajiem** (vai īsāk – vienkārši par nevienādību) sauc nevienādību, kas satur vienu vai vairākus mainīgos. Tās mainīgo vērtības, ar kurām iegūtā skaitliskā nevienādība ir patiesa, sauc par nevienādības atrisinājumiem.

Atrisināt nevienādību nozīmē **atrast visus** tās atrisinājumus **un pierādīt**, ka citu atrisinājumu nav. Visu nevienādības atrisinājumu apvienojumu sauc par šīs nevienādības atrisinājumu kopu.

Pierādīt nevienādību ar vienu vai vairākiem mainīgajiem nozīmē pamatot, ka nevienādība ir patiesa pie jebkurām pieļaujamajām mainīgo vērtībām.

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $x^2 + 1 > 0$

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $x^2 + 1 > 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $x^2 + 1 > 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

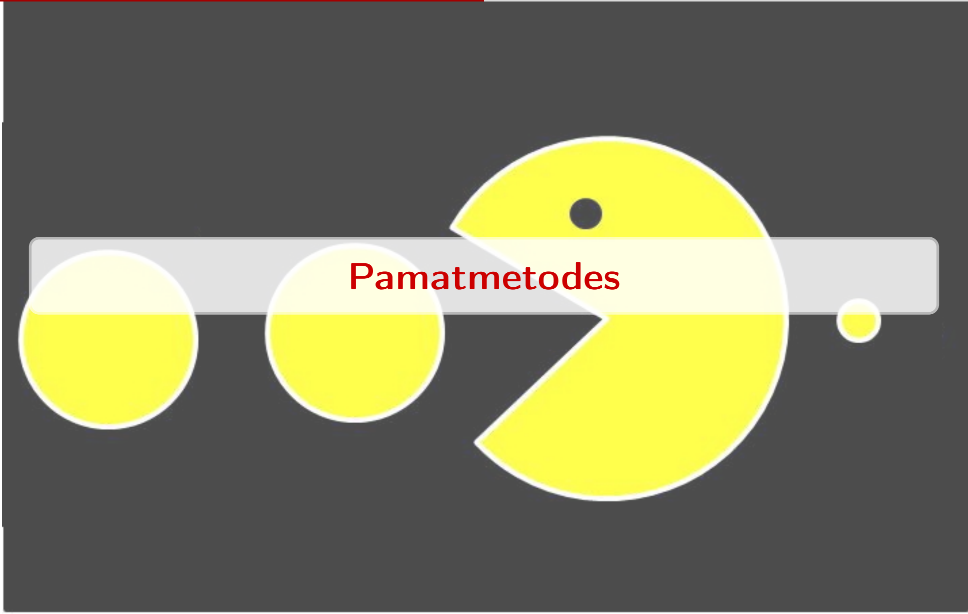
- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $x^2 + 1 > 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $a^2 + b^2 \geq 2ab$ – nevienādība ir patiesa visām reālām a, b vērtībām.

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $x^2 + 1 > 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $a^2 + b^2 \geq 2ab$ – nevienādība ir patiesa visām reālām a, b vērtībām.
- $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

Vai / kad šīs nevienādības ir patiesas?

- $x^2 - 10 > 6$ – nevienādība ir patiesa, ja $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
- $x^2 \geq 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $x^2 + 1 > 0$ – nevienādība ir patiesa visām reālām x vērtībām;
- $a^2 + b^2 \geq 2ab$ – nevienādība ir patiesa visām reālām a, b vērtībām.
- $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ – nevienādība ir patiesa visām **nenegatīvām** a, b, c vērtībām.
- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ – nevienādība ir patiesa visām **pozitīvām** a, b, c vērtībām.



Pamatmetodes

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Vai nevienādības ir ekvivalentas?

- $2x + 1 \geq 3$ un $x - 7 \leq -6$?

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Vai nevienādības ir ekvivalentas?

- $2x + 1 \geq 3$ un $x - 7 \leq -6$ nav ekvivalentas nevienādības;

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

Vai nevienādības ir ekvivalentas?

- $2x + 1 \geq 3$ un $x - 7 \leq -6$ nav ekvivalentas nevienādības;
- $2x + 1 \geq 3$ un $x - 7 \geq -6$?

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi

- Divas nevienādības sauc par **ekvivalentām**, ja tām ir viena un tā pati atrisinājumu kopa.

- $2x + 1 \geq 3$ un $x - 7 \leq -6$ nav ekvivalentas nevienādības;
- $2x + 1 \geq 3$ un $x - 7 \geq -6$ ir ekvivalentas nevienādības.

- Pārveidojumus, kas nevienādību pārveido par tai ekvivalentu nevienādību, sauc par ekvivalentiem pārveidojumiem.

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi I

- Nevienādības kādu pusi aizstāj ar tai identisku izteiksmi.

$$x^2 + 2x + 1 \geq 9 \qquad \Rightarrow \qquad (x+1)^2 \geq 9$$

- Nevienādības abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi, kas nemaina vienādojuma definīcijas apgabalu.

$$x^2 + 2x \geq 8 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 2x + 1 \geq 9$$

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi II

- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir pozitīva visām mainīgo vērtībām).

$$\frac{x^2}{2} + x \geq 4 \quad \Big/ \cdot 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 2x \geq 8$$

- Nevienādības abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu negatīvu skaitli (vai izteiksmi, kas ir negatīva visām mainīgo vērtībām) un maina nevienādības zīmi uz pretējo.

$$-\frac{x^2}{2} - x \leq -4 \quad \Big/ \cdot (-2) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 2x \geq 8$$

Nevienādību ekvivalenti pārveidojumi III

- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls **nepāra** skaitlis.

$$x \geq 3 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 \geq 27$$

- Nevienādības abas puses kāpina m-tajā pakāpē vai velk m-tās pakāpes sakni, kur m ir naturāls **pāra** skaitlis **un** definīcijas apgabalā dotās nevienādības abas puses ir nenegatīvas.

$$(a+b)^2 \geq 4 \qquad \Rightarrow \qquad a+b \geq 2, \text{ ja } a, b \text{ ir nenegatīvi skaitļi}$$

Nereti vienkāršākās nevienādības ir iespējams pierādīt, tās ar ekvivalentiem pārveidojumiem pārveidojot par acīmredzami patiesām nevienādībām.

1. piemērs

Pierādīt, ka pozitīva skaitļa summa ar tā apgriezto skaitli ir vismaz 2, t.i., $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ja $a > 0$.

- reizina pierādāmo nevienādību ar pozitīvu skaitli a:

$$a^2 + 1 \geq 2a.$$

Nereti vienkāršākās nevienādības ir iespējams pierādīt, tās ar ekvivalentiem pārveidojumiem pārveidojot par acīmredzami patiesām nevienādībām.

1. piemērs

Pierādīt, ka pozitīva skaitļa summa ar tā apgriezto skaitli ir vismaz 2, t.i., $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ja $a > 0$.

- reizina pierādāmo nevienādību ar pozitīvu skaitli a:

$$a^2 + 1 \geq 2a.$$

- abām pusēm pieskaita vienu un to pašu negatīvu skaitli $-2a$:

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$

Nereti vienkāršākās nevienādības ir iespējams pierādīt, tās ar ekvivalentiem pārveidojumiem pārveidojot par acīmredzami patiesām nevienādībām.

1. piemērs

Pierādīt, ka pozitīva skaitļa summa ar tā apgriezto skaitli ir vismaz 2, t.i., $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ja $a > 0$.

- reizina pierādāmo nevienādību ar pozitīvu skaitli a:

$$a^2 + 1 \geq 2a.$$

- abām pusēm pieskaita vienu un to pašu negatīvu skaitli $-2a$:

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$

- aizstāj $a^2 - 2a + 1$ ar ekvivalentu izteiksmi $(a-1)^2$:

$$(a-1)^2 \geq 0.$$

Nereti vienkāršākās nevienādības ir iespējams pierādīt, tās ar ekvivalentiem pārveidojumiem pārveidojot par acīmredzami patiesām nevienādībām.

1. piemērs

Pierādīt, ka pozitīva skaitļa summa ar tā apgriezto skaitli ir vismaz 2, t.i., $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ja $a > 0$.

- Nevienādības $(a-1)^2 \geq 0$ kreisajā pusē ir reāla skaitļa kvadrāts, tātad iegūtā nevienādība ir patiesa.
- Secinām, ka arī sākotnējā, ekvivalentā nevienādība ir patiesa.

2. piemērs

Visiem reāliem skaitļiem a, b un c pierādīt nevienādību

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$$

- Abām nevienādības pusēm pieskaita skaitli $-(a + b + c)$

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} - a - b - c \geq 0.$$

2. piemērs

Visiem reāliem skaitļiem a, b un c pierādīt nevienādību

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$$

- Abām nevienādības pusēm pieskaita skaitli $-(a + b + c)$

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} - a - b - c \geq 0.$$

- Kreisās puses izteiksmi ekvivalenti pārveido:

$$\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0.$$

2. piemērs

Visiem reāliem skaitļiem a, b un c pierādīt nevienādību

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$$

- Ievērojam, ka $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = x^2 - x + \frac{1}{4}$.
  Tāpēc nevienādības

  $$\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

  kreiso pusi var tālāk ekvivalenti pārveidot formā

  $$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

2. piemērs

Visiem reāliem skaitļiem a, b un c pierādīt nevienādību

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c.$$

- Iegūtā nevienādība

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

  ir patiesa, jo reālu skaitļu kvadrātu summa ir nenegatīva.
- Līdz ar to arī sākotnējā, ekvivalentā nevienādība ir patiesa.
- Varam arī ievērot, ka vienādība izpildās tikai tad, ja $a = b = c = 0.5$.

1. uzdevums

Visiem pozitīviem skaitļiem x, y pierādīt nevienādību

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

1. uzdevums

Visiem pozitīviem skaitļiem x, y pierādīt nevienādību

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

- Abām nevienādības pusēm pieskaita skaitli $-2\sqrt{xy}$, iegūstot ekvivalentu nevienādību:

$$x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0.$$

1. uzdevums

Visiem pozitīviem skaitļiem x, y pierādīt nevienādību

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

- Abām nevienādības pusēm pieskaita skaitli $-2\sqrt{xy}$, iegūstot ekvivalentu nevienādību:

$$x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0.$$

- Ekvivalenti pārveido iegūtās nevienādības kreiso pusi:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + \left(\sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

1. uzdevums

Visiem pozitīviem skaitļiem x, y pierādīt nevienādību

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

- Atkal ekvivalenti pārveido iegūtās nevienādības kreiso pusi:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

1. uzdevums

Visiem pozitīviem skaitļiem x, y pierādīt nevienādību

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}.$$

- Atkal ekvivalenti pārveido iegūtās nevienādības kreiso pusi:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

- Iegūtā nevienādība ir patiesa, jo reālu skaitļu kvadrāti ir nenegatīvi. Tātad arī sākotnējā, ekvivalentā nevienādība ir patiesa.

Kvadrātu atdalīšana

- Daudzas nevienādības var tikt pierādītas, ja to izteiksmēs izdodas saskatīt algebrisku izteiksmju kvadrātus.
- Vispārīgi runājot, šo principu varētu formulēt tā:

Kvadrātu atdalīšana

Lai pierādītu nevienādību $A \geq B$, ir pietiekami to ar ekvivalentiem pārveidojumiem pārveidot formā

$$c_1 S_1^2 + c_2 S_2^2 + \ldots c_n S_n^2 \geq 0,$$

kur $c_1, \ldots, c_n$ ir nenegatīvas izteiksmes, bet $S_1, \ldots, S_n$ – patvaļīgas izteiksmes.

3. piemērs

Pierādīt, ka visiem nenegatīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

- Izmanto identitāti

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

3. piemērs

Pierādīt, ka visiem nenegatīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

- Izmanto identitāti

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

- Tā kā reizinātāji ir nenegatīvi, tad arī reizinājums ir nenegatīvs, t.i., izpildās nevienādība

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0.$$

3. piemērs

Pierādīt, ka visiem nenegatīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

- Secinām, ka arī nevienādībai

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq 0$$

ekvivalentā nevienādība

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

ir patiesa.

3. piemērs

Pierādīt, ka visiem nenegatīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

- Pārbaudām, ka uzrakstītā identitāte ir patiesa:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left(2(a^2+b^2+c^2) - 2ab - 2bc - 2ca\right) =$$
$$= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) - (a+b+c)(ab+bc+ca) =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 -$$
$$- a^2b - a^2c - b^2a - b^2c - c^2a - c^2b - 3abc =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Nevienādības pastiprināšana

- Bieži vien sākotnēji pierādāmā nevienādība ir sarežģīta un pierādīt to nav viegli.
- Šādās situācijās pierādāmo nevienādību mēdz aizstāt ar "stiprāku" nevienādību.
- Mērķis: iegūt vienkāršāku nevienādību, kuru pierādīt ir vieglāk nekā sākotnējo.

Nevienādības pastiprināšana

Nevienādības pastiprināšana

Ja

1. ir jāpierāda nevienādība $A \geq B$;
2. taču izdodas atrast tādu skaitli (izteiksmi) X, ka nevienādības

$$A \geq X \quad \text{un} \quad X \geq B$$

   ir patiesas,
3. tad no tā izriet, ka arī sākotnējā nevienādība $A \geq B$ ir patiesa.

4. piemērs

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x izpildās nevienādība

$$x^2 + 4 > 0.$$

4. piemērs

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x izpildās nevienādība

$$x^2 + 4 > 0.$$

- Nevienādība ir patiesa, jo

$$x^2 + 4 > x^2 \geq 0.$$

5. piemērs

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x izpildās nevienādība

$$x^2 - 2x + 2 > 0.$$

5. piemērs

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x izpildās nevienādība

$$x^2 - 2x + 2 > 0.$$

- Ievēro, ka

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1.$$

5. piemērs

Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x izpildās nevienādība

$$x^2 - 2x + 2 > 0.$$

- Ievēro, ka
$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1.$$
- Nevienādība ir patiesa, jo
$$(x-1)^2 + 1 > (x-1)^2 \geq 0.$$

6. piemērs

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x > 1$ izpildās nevienādība

$$x^3 - 2x + 1 > 0.$$

6. piemērs

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x > 1$ izpildās nevienādība

$$x^3 - 2x + 1 > 0.$$

- Ja pierādāmā nevienādība būtu $x^2 - 2x + 1 > 0$, tad to pierādīt būtu viegli, jo kreiso pusi varētu identiski pārveidot par kvadrātu:

$$(x - 1)^2 > 0.$$

6. piemērs

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x > 1$ izpildās nevienādība

$$x^3 - 2x + 1 > 0.$$

- Ja pierādāmā nevienādība būtu $x^2 - 2x + 1 > 0$, tad to pierādīt būtu viegli, jo kreiso pusi varētu identiski pārveidot par kvadrātu:
$$(x-1)^2 > 0.$$

- Tā kā $x > 1$, tad $(x-1)^2 > 0$.

6. piemērs

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x > 1$ izpildās nevienādība

$$x^3 - 2x + 1 > 0.$$

- Taču var ievērot, ka no patiesas nevienādības $x^2 - 2x + 1 > 0$ izriet arī vajadzīgā nevienādība!
- Tā kā $x > 1$ pēc dotā, tad $x^3 > x^2$ (abu skaitļu starpība $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$ ir pozitīva).
- Tātad izpildās nevienādība

$$x^3 - 2x + 1 > x^2 - 2x + 1.$$

6. piemērs

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x > 1$ izpildās nevienādība

$$x^3 - 2x + 1 > 0.$$

- Secinām, ka visiem $x > 1$ izpildās gan nevienādība $x^2 - 2x + 1 > 0$, gan nevienādība $x^3 - 2x + 1 > x^2 - 2x + 1$.
- Tātad
$$x^3 - 2x + 1 > x^2 - 2x + 1 > 0.$$
- Šajā gadījumā doto nevienādību $x^3 - 2x + 1 > 0$ pastiprinājām, aizvietojot to ar nevienādību $x^2 - 2x + 1 > 0$, kas izrādījās patiesa.

2. uzdevums

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x \geq 1$ izpildās nevienādība

$$x^5 + 10 > 6x^2.$$

2. uzdevums

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x \geq 1$ izpildās nevienādība

$$x^5 + 10 > 6x^2.$$

- Ievērosim, ka $x^5 \geq x^4$, jo abu skaitļu starpība ir nenegatīva:

$$x^5 - x^4 = x^4(x-1) \geq 0.$$

2. uzdevums

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x \geq 1$ izpildās nevienādība

$$x^5 + 10 > 6x^2.$$

- Ievērosim, ka $x^5 \geq x^4$, jo abu skaitļu starpība ir nenegatīva:

$$x^5 - x^4 = x^4(x-1) \geq 0.$$

- Tātad $x^5 + 10 \geq x^4 + 10$. Mēģināsim pierādīt nevienādību

$$x^4 + 10 > 6x^2.$$

2. uzdevums

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x \geq 1$ izpildās nevienādība

$$x^5 + 10 > 6x^2.$$

- Ievērosim, ka $x^5 \geq x^4$, jo abu skaitļu starpība ir nenegatīva:

$$x^5 - x^4 = x^4(x-1) \geq 0.$$

- Tātad $x^5 + 10 \geq x^4 + 10$. Mēģināsim pierādīt nevienādību

$$x^4 + 10 > 6x^2.$$

- Ievēro, ka

$$x^4 - 6x^2 + 10 = (x^2 - 3)^2 + 1.$$

2. uzdevums

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x \geq 1$ izpildās nevienādība

$$x^5 + 10 > 6x^2.$$

- Tātad

$$x^4 - 6x^2 + 10 > (x^2 - 3)^2 \geq 0$$

un patiešām

$$x^4 + 10 > 6x^2.$$

2. uzdevums

Pierādīt, ka visiem skaitļiem $x \geq 1$ izpildās nevienādība

$$x^5 + 10 > 6x^2.$$

- Tātad
$$x^4 - 6x^2 + 10 > (x^2 - 3)^2 \geq 0$$
un patiešām
$$x^4 + 10 > 6x^2.$$
- Līdz ar to pierādīts, ka
$$x^5 + 10 \geq x^4 + 10 > 6x^2.$$

Nevienādības starp vidējiem

- Līdz šim aplūkotie paņēmieni faktiski ir tikai pamatpaņēmieni; daudzas sarežģītākas nevienādības nevar (vismaz, būtu ārkārtīgi grūti) pierādīt, neizmantojot speciālas nevienādības un teorēmas.

- Līdz šim aplūkotie paņēmieni faktiski ir tikai pamatpaņēmieni; daudzas sarežģītākas nevienādības nevar (vismaz, būtu ārkārtīgi grūti) pierādīt, neizmantojot speciālas nevienādības un teorēmas.
- Klasiskākā, visbiežāk lietotā un visnozīmīgākā no šādām nevienādībām ir tā saucamā nevienādība starp nenegatīvu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

Vidējais aritmētiskais

Par n skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējo aritmētisko sauc lielumu

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}.$$

Vidējais ğeometriskais

Par n nenegatīvu skaitļu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vidējo ğeometrisko sauc n-tās pakāpes sakni (aritmētisko sakni!) no šo skaitļu reizinājuma, t.i., lielumu

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}.$$

- Piemēram, ja doti skaitļi 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- Piemēram, ja doti skaitļi 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- Vidējais ğeometriskais nav definēts, jo starp dotajiem ir arī nenegatīvi skaitļi (ceturtās pakāpes sakne no negatīva skaitļa??)!

- Piemēram, ja doti skaitļi 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- Vidējais ğeometriskais nav definēts, jo starp dotajiem ir arī nenegatīvi skaitļi (ceturtās pakāpes sakne no negatīva skaitļa??)!
- Cits piemērs: ja doti skaitļi 1, 3, 2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3+2+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

- Piemēram, ja doti skaitļi 1, 3, -2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3-2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- Vidējais ğeometriskais nav definēts, jo starp dotajiem ir arī nenegatīvi skaitļi (ceturtās pakāpes sakne no negatīva skaitļa??)!
- Cits piemērs: ja doti skaitļi 1, 3, 2 un 4, tad to vidējais aritmētiskais ir

$$\frac{1+3+2+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

- Šo skaitļu vidējais ğeometriskais ir

$$\sqrt[4]{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt[4]{24} \approx 2.213$$

3. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ğeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.2; \quad 0.4; \quad 0.5; \quad 8; \quad 10; \quad 20.$$

3. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.2;\quad 0.4;\quad 0.5;\quad 8;\quad 10;\quad 20.$$

- Vidējais aritmētiskais:

3. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.2; \quad 0.4; \quad 0.5; \quad 8; \quad 10; \quad 20.$$

- Vidējais aritmētiskais:

$$\frac{0.2 + 0.4 + 0.5 + 8 + 10 + 20}{6} = \frac{39.1}{6} = 6\,\frac{31}{60} \approx 6.5166.$$

3. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.2; \quad 0.4; \quad 0.5; \quad 8; \quad 10; \quad 20.$$

- Vidējais aritmētiskais:

$$\frac{0.2+0.4+0.5+8+10+20}{6} = \frac{39.1}{6} = 6\,\frac{31}{60} \approx 6.5166.$$

- Vidējais ģeometriskais:

3. uzdevums

Aprēķināt vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko šiem skaitļiem:

$$0.2; \quad 0.4; \quad 0.5; \quad 8; \quad 10; \quad 20.$$

- Vidējais aritmētiskais:

$$\frac{0.2+0.4+0.5+8+10+20}{6} = \frac{39.1}{6} = 6\,\frac{31}{60} \approx 6.5166.$$

- Vidējais ģeometriskais:

$$\sqrt[6]{0.2\cdot 0.4\cdot 0.5\cdot 8\cdot 10\cdot 20} = \sqrt[6]{\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^3\cdot 2\cdot 5\cdot 2^2\cdot 5} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

AM-GM nevienādība

Ja a_1, a_2, ..., a_n ir nenegatīvi skaitļi, tad

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n},$$

t.i.,
nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais ir lielāks vai vienāds ar šo skaitļu vidējo ģeometrisko, turklāt vienādība ir tad un tikai tad, ja visi skaitļi ir vienādi, t.i., $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 2$

- Ja $n = 2$, tad iegūstam: visiem nenegatīviem a_1, a_2 izpildās

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

jeb

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 2$

- Ja $n = 2$, tad iegūstam: visiem nenegatīviem a_1, a_2 izpildās

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

jeb

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

- 1. uzdevums:

$$x + y - 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 3$

- Ja $n = 3$, tad iegūstam: visiem nenegatīviem a_1, a_2 izpildās

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

jeb

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

AM-GM nevienādība gadījumā $n = 3$

- Ja $n = 3$, tad iegūstam: visiem nenegatīviem a_1, a_2 izpildās

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

jeb

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

- 3. piemērs:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq 0.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Dala abas nevienādības puses ar 8, iegūstot ekvivalentu nevienādību:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq 1.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Dala abas nevienādības puses ar 8, iegūstot ekvivalentu nevienādību:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq 1.$$

- No *AM-GM* seko nevienādības

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \qquad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}; \qquad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = abc.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Sareizinot šīs nevienādības, iegūstam

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = abc.$$

- Izmantojot nosacījumu $abc = 1$, secinām

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq abc = 1.$$

7. piemērs

Dots, ka a, b un c ir tādi pozitīvi skaitļi, kas apmierina vienādību $abc = 1$. Pierādīt, ka izpildās nevienādība

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8.$$

- Pierādīta nevienādība

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2}\right) \geq 1;$$

tātad arī sākotnējā, ekvivalentā nevienādība ir patiesa.

8. piemērs

Pierādīt, ka $a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem a un b.

8. piemērs

Pierādīt, ka $a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem a un b.

- a^6 un b^6 ir nenegatīvi skaitļi jebkuriem reāliem a un b, tātad tiem var pielietot *AM-GM* nevienādību.

8. piemērs

Pierādīt, ka $a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem a un b.

- a^6 un b^6 ir nenegatīvi skaitļi jebkuriem reāliem a un b, tātad tiem var pielietot *AM-GM* nevienādību.
- Dotās nevienādības kreiso pusi pārveido kā sešu nenegatīvu skaitļu summu:

$$a^6 + 5b^6 = a^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6.$$

8. piemērs

Pierādīt, ka $a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem a un b.

- No *AM-GM* nevienādības seko

$$\frac{a^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6}{6} \geq \sqrt[6]{a^6 \cdot b^6 \cdot b^6 \cdot b^6 \cdot b^6 \cdot b^6}$$

8. piemērs

Pierādīt, ka $a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem a un b.

- No *AM-GM* nevienādības seko

$$\frac{a^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6}{6} \geq \sqrt[6]{a^6 \cdot b^6 \cdot b^6 \cdot b^6 \cdot b^6 \cdot b^6}$$

jeb

$$\frac{a^6 + 5b^6}{6} \geq \sqrt[6]{a^6 b^{30}} = \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{b^{30}} = |a| \cdot |b|^5 = \left|ab^5\right|.$$

8. piemērs

Pierādīt, ka $a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0$ visiem reāliem skaitļiem a un b.

- Tā kā visiem reāliem x ir spēkā $|x| \geq x$, tad $\left|ab^5\right| \geq ab^5$.
- Pierādīta nevienādība

$$\frac{a^6 + 5b^6}{6} \geq \left|ab^5\right| \geq ab^5,$$

tātad arī sākotnējā, ekvivalentā nevienādība ir patiesa.

4. uzdevums

Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\geq 9a^2b^2c^2.$$

4. uzdevums

Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

- Pielietosim *AM-GM* nevienādību katram kreisās puses reizinātājam atsevišķi:

4. uzdevums

Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\geq 9a^2b^2c^2.$$

- Pielietosim *AM-GM* nevienādību katram kreisās puses reizinātājam atsevišķi:

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}=abc$$
$$\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{3}\geq\sqrt[3]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2}=abc.$$

4. uzdevums

Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

- Iegūtās nevienādības sareizina (kāpēc to drīkst darīt?) iegūstot

$$\frac{\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{9} \geq a^2b^2c^2.$$

4. uzdevums

Pierādīt, ka visiem pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

- Iegūta patiesa nevienādība

$$\frac{\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{9} \geq a^2b^2c^2,$$

  kas ir ekvivalenta sākotnējai.
- Tātad arī sākotnējā nevienādība ir patiesa.

Citas nevienādības

Koši – Švarca (Cauchy-Schwarz inequality)

Visiem reāliem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir spēkā šāda nevienādība:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Citas nevienādības

Koši – Švarca (Cauchy-Schwarz inequality)

Visiem reāliem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir spēkā šāda nevienādība:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

- Pārkārtojuma nevienādība (Rearrangement inequality);
- Jensena nevienādība;
- Čebiševa un Bernulli nevienādības.

Citas nevienādības

Koši – Švarca (Cauchy-Schwarz inequality)

Visiem reāliem skaitļiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir spēkā šāda nevienādība:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

- Pārkārtojuma nevienādība (Rearrangement inequality);
- Jensena nevienādība;
- Čebiševa un Bernulli nevienādības.

Google!

Paldies par uzmanību!