MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

IEDOMU SKAITĻI

LU FMF docente
Ingrīda Uļjane

Mazā matemātikas universitāte
4. nodarbība, 2014. gada 1.marts

Saturs

Kardano un Tartalja

Gerolamo Cardano
1501 – 1576


Niccolò Fontana Tartaglia
1499/1500 - 1557

Kardano un Tartalja risinot trešās un ceturtās kārtas vienādojumus, ieguva izteiksmes, kur jārēķina kvadrātsakne no negatīva skaitļa.

Grāmata Artis Magne

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neque ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Iedomu vienība

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$i^2 = -1$$

$i = \sqrt{-1}$ iedomātā vienība

Imaginaruss - iedomātais (latīņu val.)

Imaginary unit - (angļu val.)

Iedomu vienība

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{4 \cdot i^2}}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 - \sqrt{4 \cdot i^2}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

Komlpeksais skaitlis

$$z = a + bi$$

$Re(z) = a$ kompleksā skaitļa z reālā daļa
$Im(z) = b$ kompleksā skaitļa z imaginārās daļas koeficients

$$z = Re(z) + Im(z)i$$

Ja $b = 0$, tad $z = a$ ir reāls skaitlis.
Ja $a = 0$, tad $z = bi$ ir "tīri" imaginārs skaitlis.

Saskaitīšana

$$z_1 = 1 + 2i$$
$$z_2 = 3 + 4i$$

$$z_1 + z_2 =$$
$$= (1 + 2i) + (3 + 4i) =$$
$$= 1 + 2i + 3 + 4i =$$
$$= 1 + 3 + (2 + 4)i =$$
$$= 4 + 6i$$

Saskaitīšana

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Saskaitīšana

Saskaitīt kompleksos skaitļus

$$(1+2i)+(1+2i)=$$

$$(1+2i)+(1-2i)=$$

$$(2+4i)+(1-3i)=$$

Saskaitīšana

$$(1+2i)+(1+2i)=2+4i$$

$$(1+2i)+(1-2i)=2$$

$$(2+4i)+(1-3i)=3-i$$

Atņemšana

$$z_1 = 1 + 2i$$
$$z_2 = 3 + 4i$$

$$z_1 - z_2 =$$
$$= (1 + 2i) - (3 + 4i) =$$
$$= 1 + 2i - 3 - 4i =$$
$$= 1 - 3 + (2 - 4)i =$$
$$= -2 - 2i$$

Atņemšana

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Atņemšana

Atņemt kompleksos skaitļus

$$(1 + 2i) - (1 + 2i) =$$

$$(1 + 2i) - (1 - 2i) =$$

$$(2 + 4i) - (1 - 3i) =$$

Atņemšana

Atņemt kompleksos skaitļus

$$(1 + 2i) - (1 + 2i) = 0$$

$$(1 + 2i) - (1 - 2i) = 4i$$

$$(2 + 4i) - (1 - 3i) = 1 + 7i$$

Reizināšana

$$z_1 = 1 + 2i$$
$$z_2 = 3 + 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 =$$
$$= (1 + 2i) \cdot (3 + 4i) =$$
$$= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2i \cdot 3 + 2i \cdot 4i =$$
$$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot i^2 + (1 \cdot +2 \cdot 3)i =$$
$$= 3 - 8 + (4 + 6)i =$$
$$= -5 + 10i$$

Reizināšana

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

Reizināšana

$$(1 + 2i) \cdot (1 + 2i) =$$

$$(1 + 2i) \cdot (1 - 2i) =$$

$$(2 + 4i) \cdot (1 - 3i) =$$

Reizināšana

$$(1 + 2i) \cdot (1 + 2i) = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$$

$$(1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 5$$

$$(2 + 4i) \cdot (1 - 3i) = 14 - 2i$$

Imaginārās vienības naturālās pakāpes

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = i$$

$$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i$$

Imaginārās vienības naturālās pakāpes

$i^{100} =$

$i^{2013} =$

$i^{2014} =$

Imaginārās vienības naturālās pakāpes

$$i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$$

$$i^{2013} = (i^2)^{1006} \cdot i = (-1)^{1006} \cdot i = i$$

$$i^{2014} = (i^2)^{1007} = (-1)^{1007} = -1$$

Dalīšana

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 3 + 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} =$$

$$= \frac{(1+2i)(3-4i)}{3^2 - (4i)^2} = \frac{3 - 8i^2 + 6i - 8i}{9 - 4^2 i^2} =$$

$$= \frac{11-2i}{25} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$$

Dalīšana

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}$$

Dalīšana

Izdalīt kompleksos skaitļus

$$\frac{2+i}{1+2i} =$$

$$\frac{1+2i}{i} =$$

$$\frac{1+i}{1-i} =$$

$$\frac{1+i}{2+2i} =$$

Dalīšana

Izdalīt kompleksos skaitļus

$$\frac{2+i}{1+2i} = -\frac{5}{3}i$$

$$\frac{1+2i}{i} = 2-i$$

$$\frac{1+i}{1-1} = i$$

$$\frac{1+i}{2+2i} = \frac{1}{2}$$

Otrās kārtas polinoma saknes

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1 + i$$

$$(x_1)^2 - 2x_1 + 2 = 0$$
$$(1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2 = 0$$
$$1 + 2i - 1 - 2 - 2i + 2 = 0$$

$$x_2 = 1 - i$$

$$(x_2)^2 - 2x_2 + 2 = 0$$
$$(1 - i)^2 - 2(1 - i) + 2 = 0$$
$$1 - 2i - 1 - 2 + 2i + 2 = 0$$

Otrās kārtas polinoma sadalīšana reizinātājos

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \text{saknes ir} \quad x_1 \quad \text{un} \quad x_2$$

$$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \text{saknes ir} \quad x_1 = 1 + i \quad \text{un} \quad x_2 = 1 - i$$

$$(x - (1 + i))(x + (1 - i)) = ((x - 1) + i)((x - 1) - i) =$$

$$= (x - 1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 1 + 1 =$$

$$= x^2 - 2x + 2$$

Trešās kārtas polinoma saknes

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{vai} \quad x^2 + 2x + 4 = 0$$

$x_1 = 2$

$x^2 + 2x + 4 = 0$
$D = 4 - 4 \cdot 4 = -12$
$x_2 = \frac{-2+\sqrt{-12}}{2} = \frac{-2+\sqrt{3 \cdot 4 i^2}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}i$
$x_3 = -1 - \sqrt{3}i$

Trešās kārtas polinoma saknes

$$x^3 - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - (-1 + \sqrt{3}i))(x - (-1 - \sqrt{3}i)) = 0$$

Trešās kārtas sadalīšana reizinātājos

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx^2 + D = 0 \quad \text{saknes ir} \quad x_1, \quad x_2 \text{ un } \quad x_3$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx^2 + D = A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

Algebras pamatteorēma

Katram *n*-tās kārtas polinomam ir tieši *n* saknes.

Polinomam var būt vairākas vienādas reālas saknes.
Ja polinomam sakne ir kompleksais sakitlis, tad tā kompleksi saistītais skaitlis arī būs šī polinoma sakne.

Algebras pamatteorēma

$(x+1)^2 = 0$

$(x+1)(x+1) = 0$
Polimomam ir divas vienādas reālas saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = -1$.

Algebras pamatteorēma

$$(x-1)^2(x^2+2x+2)=0$$

$$(x-1)(x-1)(x-(1+2i))(x-(1-2i))=0$$

Ceturtās kārtas polimomam ir tieši četras saknes.
Divas no tām ir vienādas reālas saknes $x_1=-1$ un $x_2=-1$,
bet divas - kompleksi saistītas $x_3=1+2i$ un $x_4=1-2i$.

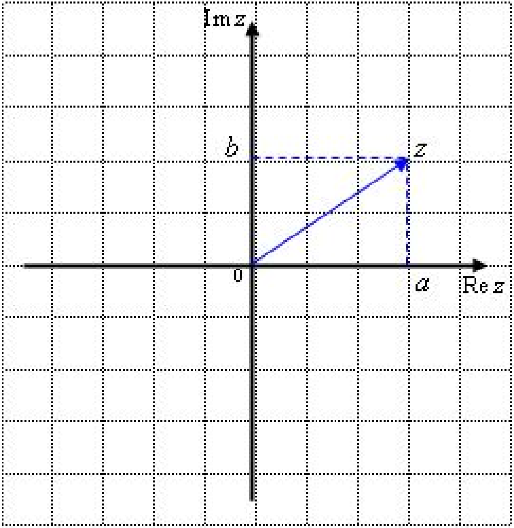
Algebras pamatteorēma

Atrast doto polinomu saknes

$$x^4 - 1 = 0$$

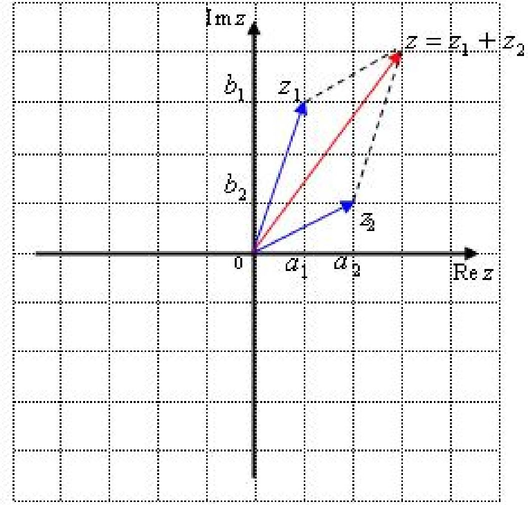
$$x^4 + 1 = 0$$

Kompleksā skaitļa ģeometriskā interpretācija



$$z = a + bi$$

Summas ģeometriskā interpretācija

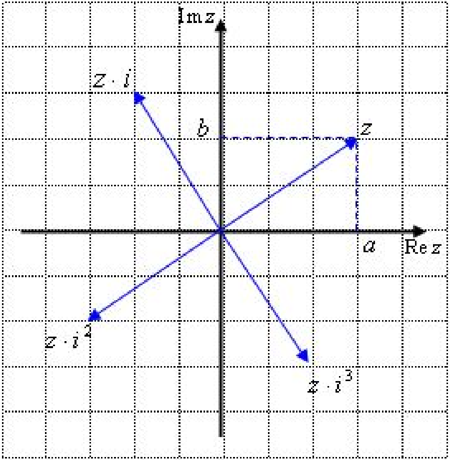


$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z = z_1 + z_2$$

Reizinājuma ģeometriskā interpretācija



$$z = a + bi$$

$$z \cdot i = ai - b$$

$$z \cdot i^2 = -a - bi$$

$$z \cdot i^3 = -ai - b$$

Mandelbrota kopa

Benoit Mandelbrot
(1924 –2010)

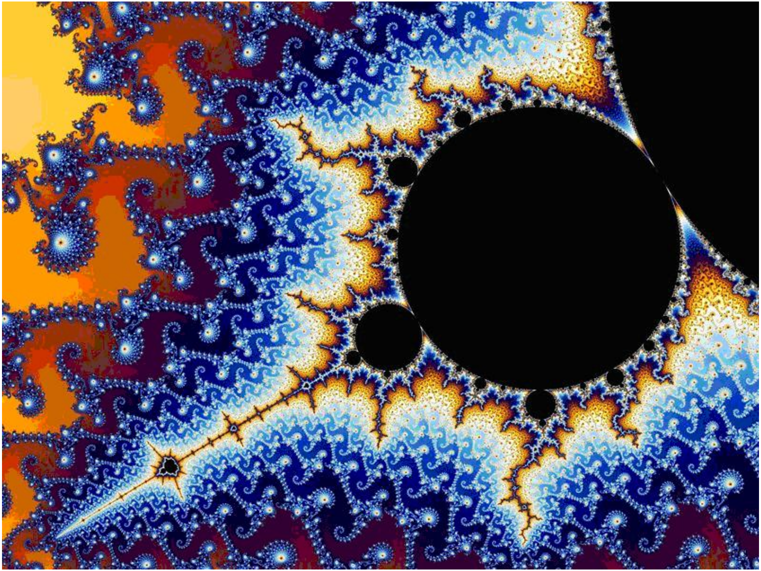
Konstruēja fraktāļa veida komplekso skaitļu kopu, par pamatu ņemot otrās kārtas vienādojumu

$$z^2 + c = 0, \text{ kur } c \text{ komplekss skaitlis.}$$

$$(z^2 + c)^2 + c = 0$$

$$((z^2 + c)^2 + c)^2 + c = 0$$

Mandelbrota kopa



Paldies par uzmanību!